ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 2, 2021 Механика

УДК 539.3 http://doi.org/10.33018/74.2.4

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СЖАТЫХ СТОРОН ПЛАСТИНКИ НА ЛОКАЛИЗОВАННУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Белубекян В.М., Терзян С.А.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, локализованная неустойчивость, метод Галёркина.

Influence of conditions of rigidly reinforced edges on plate localized instability

Belubekyan V.M, Terzyan S.A.

Keywords: Plate, localized instability, Galerkin method.

The problems of stability of a rectangular plate are considered, the two opposite sides of which are prepressed, one edge is free, and different edge conditions are applied to the fourth edge. Here replacing of hinged edges by rigidly reinforced edges does not allow the variable separation method to be used. In this case, the use of approximation methods, in particular the Galyorkin method, is necessary.

Սալի սեղմված եզրերի ամրակցման պայմանների ազդեցությունը փեղայնացված անկայունության վրա

Բելուբեկյան Վ.Մ., Թերզյան Ս.Հ.

Հիմնաբառեր. ուղղանկյուն սալ, փեղայնացված անկայունոյթյուն, Գալյորկինի մեթոդ:

Դիտարկվում են ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրներ, որի երկու հակադիր կողմերը նախապես սեղմված են, մի եզրը ազատ է, իսկ չորրորդ կողմի վրա տրվում են տարբեր եզրային պայմաններ: Հոդակապորեն ամրակցված եզրերի՝ կոշտ ամրակցված եզրերով փոխարինումը թույլ չի տալիս օգտվել փոփոխականների անջատման մեթոդից: Այս դեպքում մոտավոր մեթոդների, մասնավորապես Գալյորկինի մեթոդի կիրառումն անհրաժեշտ է:

Рассматриваются задачи устойчивости прямоугольной пластинки с двумя противоположными предварительно сжатыми сторонами с одним свободным краем при различных вариантах граничных условиях на четвёртой стороне. Замена шарнирно–закреплённых краёв на жёстко заделанные края не позволяет использовать метод разделения переменных. Для решения задачи в данной статье применяется приближённый метод Галёркина.

Введение

Задачам локализованной неустойчивости посвящены следующие работы [1-14]. Здесь рассматриваются задачи устойчивости прямоугольной пластинки с двумя противоположными предварительно сжатыми сторонами с одним свободным краем при различных вариантах граничных условий на четвёртой стороне. В отличие от [15], где на сжимаемых краях $y = 0$,$y = b$ заданы условия шарнирного–закрепления, здесь эти края полагаются жёстко заделанными, что приводит к тому, что метод разделения переменных становится неприменимым. В этом случае необходимо применение приближённых методов, в частности, метода Галёркина.

1 Постановка задачи

Пусть пластинка занимает область $0 \le x \le a$:$0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$ и сжата по сторонам $y = 0, b$, которые жёстко заделаны. Уравнение устойчивости пластинки удобно записать в виде:

$$L(w) \equiv \Delta^2 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \alpha^2 = \frac{P}{D} \tag{1.1}$$

Требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b \tag{1.2}$$

Решение уравнения (2.1) представим в виде бесконечного ряда

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(y) \tag{1.3}$$

где функции $q_n(y)$ удовлетворяют граничным условиям

$$q_n|_{y=0,b} = 0,\ \frac{dq_n}{dy}|_{y=0,b} = 0, \tag{1.4}$$

что обеспечивает удовлетворению граничным условиям закреплённого края (1.2). Функции $q_n(y)$, в частности, согласно методу Галёркина, могут быть определены из решения задачи устойчивости для уравнения балки

$$\frac{d^4 q_n}{dy^4} + \alpha^2 \frac{d^2 q_n}{dy^2} = 0 \tag{1.5}$$

Согласно методу Галёркина (или Бубнова–Галёркина) дифференциальные уравнения, определяющие функции $\varphi_n(y)$, получаются из равенств:

$$\int_0^b q_m(y) L \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n q_n \right) dy = 0,\ m = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Аналогичным образом устанавливаются также граничные условия для функции $\varphi_n(x)$ при $x = 0$ и $x = a$. В частности, для граничных условий свободного края (1.5) будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_0^b q_m \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_n \varphi_n'' + \nu \frac{d^2 q_n}{dy^2} \varphi_n \right) dy = 0 \\ \int\limits_0^b q_m \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_n \varphi_n''' + (2-\nu) \frac{d^2 q_n}{dy^2} \varphi_n' \right) dy = 0\end{gathered} \tag{1.7}$$

2 Приближенное решение

Для качественной оценки минимальной критической нагрузки в ряде (1.3) можно ограничиться одним членом

$$w(x, y) = \varphi_1(x) q_1(y) \tag{2.1}$$

В этом случае, вместо системы уравнений (1.6) получается одно уравнение

$$\varphi_1^{IV} - 2\gamma_1^2 \varphi_1'' + \left(\gamma_2^2 - \alpha^2 \gamma_1^2\right) \varphi_1 = 0 \tag{2.2}$$

где коэффициенты γ_1^2, γ_2^2, с учётом интегрирования по частям и условий (1.4)

$$\int\limits_0^b q_1 \frac{d^2 q_1}{dy^2} dy = -\int\limits_0^b \left(\frac{dq_1}{dy} \right)^2 dy, \int\limits_0^b q_1 \frac{d^4 q_1}{dy^4} dy = \int\limits_0^b \left(\frac{d^2 q_1}{dy^2} \right)^2 dy \tag{2.3}$$

имеют вид:

$$\gamma_1^2 = \left[\int\limits_0^b q_1^2 dy \right]^{-1} \int\limits_0^b \left(\frac{dq_1}{dy} \right)^2 dy, \ \gamma_2^2 = \left[\int\limits_0^b q_1^2 dy \right]^{-1} \int\limits_0^b \left(\frac{d^2 q_1}{dy^2} \right)^2 dy \tag{2.4}$$

Граничные условия свободного края $x = 0$ для функций $\varphi_1(x)$ согласно (1.7) будут:

$$\varphi_1'' - \nu \gamma_1^2 \varphi_1 = 0, \ \varphi_1''' - (2-\nu) \gamma_1^2 \varphi_1' = 0, \tag{2.5}$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.2), удобно записать в виде

$$\varphi_1(x) = A shr_1 \gamma_1 x + B chr_1 \gamma_1 x + C shr_2 \gamma_2 x + D chr_2 \gamma_2 x \tag{2.6}$$

где

$$r_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{1 - \gamma^2 + \beta_1^2} \right)^{1/2}, \quad \gamma^2 = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}, \ \beta_1^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma_1^2} = \frac{P}{D\gamma_1^2} \tag{2.7}$$

Требование, чтобы решение (2.6) удовлетворяло граничным условиям свободного края (2.5), приводит к новому выражению для функции $\varphi_1(x)$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) = \left(shr_1\gamma_1 x - \frac{r_1(r_1^2-2+\nu)}{r_2(r_2^2-2+\nu)}shr_2\gamma_2 x\right)A+\\ +\left(chr_1\gamma_1 x - \frac{r_1^2-\nu}{r_2^2-\nu}chr_2\gamma_2 x\right)B\end{aligned} \tag{2.8}$$

где оставшиеся произвольные постоянные A и B должны быть определены после удовлетворения граничным условиям на крае пластины $x = a$.

Пусть на кромке пластины $x = a$ заданы условия шарнирного закрепления (1.4), откуда следуют условия для функции $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(a) = 0,\ \varphi_1''(a) = 0, \tag{2.9}$$

Требование, чтобы решение (2.8) удовлетворяло граничным условиям (2.9), приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B. Условие равенства нулю детерминанта этой системы, после некоторых преобразований, приводит к уравнению

$$M(r_1, r_2) \equiv (r_1^2 - r_2^2)M_1(\beta_1, \nu) = 0 \tag{2.10}$$

где

$$M_1(\beta_1, \nu) = \frac{r_1^2-\nu}{r_2^2-\nu}th\chi_1 - \frac{r_1(r_1^2-2+\nu)}{r_2(r_2^2-2+\nu)}th\chi_2, \quad \chi_i = r_i\gamma_1 a,\ i = 1, 2 \tag{2.11}$$

При $r_1^2 - r_2^2 = 0$ получается корень уравнения (2.10) $\beta_1^2 = \gamma^2 - 1$, которому, как нетрудно проверить из решения (2.2), удовлетворяющего условиям (2.5) и (2.9), соответствует тривиальное решение $\varphi_1 = 0$ $(w = 0)$.

Из уравнения

$$M_1(\beta_1, \nu) = 0 \tag{2.12}$$

в приближении

$$th\chi_i \approx 1 \tag{2.13}$$

получается уравнение

$$r_1^2 r_2^2 + 2(1-\nu)r_1 r_2 - \nu^2 = 0 \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) совпадает с уравнением, определяющим критическую нагрузку локализованной неустойчивости полубесконечной пластины–полосы [4,5] с заменой r_1, r_2 на p_1, p_2.

Из (2.7) следует, что условие существования отличается от (2.11) работы [15] и имеет вид

$$0 < \beta_1^2 < \gamma^2\ \beta_1^2 > \gamma^2 - 1 \tag{2.15}$$

Уравнение (2.14) показывает, что, как и в случае шарнирно-закреплённых краёв $y = 0$ и $y = b$, локализованная неустойчивость существует при условии $\nu \neq 0$.

3 Условия локализованной неустойчивости

В рассматриваемом здесь случае, когда края пластинки $y = 0$,$y = b$ закреплены, условие появления локализованной неустойчивости в зависимости от отношения a/b,$\beta_1^2 > \gamma$, в решении (2.8) гиперболические функции $shr_2\gamma_1 x, chr_2\gamma_1 x$ заменяются тригонометрическими функциями.

При предельном переходе $r_2 \to 0\,(\beta_1^2 \to \gamma)$. В уравнении (2.11) получается уравнение, определяющее $\gamma_1 a$, при котором появится локализованная неустойчивость

$$-\frac{2-\nu}{\nu} th\sqrt{2}\gamma_1 a + \frac{\nu}{2-\nu}\sqrt{2}\gamma_1 a = 0 \tag{3.1}$$

Отсюда также получается приближённая формула

$$\gamma_1 a \geq \frac{2-\nu^2}{\sqrt{2}\nu^2} \tag{3.2}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (3.1) и неравенство (3.2) аналогичны уравнению (2.10) и неравенству (2.12) работы [15].

Для качественной оценки влияния закреплённых краёв $y = 0$ и $y = b$ можно взять в (2.1) функции

$$q_1(y) = y^2 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \tag{3.3}$$

Согласно формулам (2.4), необходимые параметры задачи определяются следующим образом:

$$\gamma_1^2 = \frac{12}{b^2},\ \gamma_2^2 = \frac{504}{b^4},\ \gamma^2 = \frac{42}{b^2} \tag{3.4}$$

Сравнение формулы (2.13) работы [15] и (3.2), с учётом (3.4), показывает, что минимальное отношение a/b сторон пластинки, при котором становится возможным появление локализованной неустойчивости, в случае шарнирно закреплённых сторон $y = 0$,$y = b$ больше, чем это же отношение в случае закреплённых краёв, приблизительно в три раза

Заключение

Исследована возможность появления локализованной неустойчивости у свободного края $x = 0$ пластинки, стороны $y = 0$,$y = b$ которой жёстко закреплены, а четвертая сторона шарнирно опёрта. Проведено сравнение полученных результатов с результатами работы [15], где аналогичное исследование было проведено для пластинки, на сторонах $y = 0$,$y = b$ которой заданы условия шарнирного опирания или скользящей заделки. Показано, что минимальное отношение a/b сторон пластинки, при котором становится возможным появление локальной неустойчивости, зависит от граничных условий и является наименьшим в случае шарнирного опирания боковых, от свободной кромки, сторон пластинки.

Литература

[1] Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // ДАН СССР, 1954, т.XCV, №3, с.477-479.

[2] Banichuk N.V., Ishlinskii A.Yu. Some special features of the stability and vibrations of rectangular plate //J. Appl. Math. And Mech.1995, 59(4), p.593-597.

[3] Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек (Асимптотические методы). М.: Наука, 1995. 320с.

[4] Белубекян М.В. Задача локализованной неустойчивости пластинки // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем: Ереван: Изд. ЕГУ, 1997, с.95-99.

[5] Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57, №2, с.34-39.

[6] Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластин с учётом поперечных сдвигов // Изв. РАН. МТТ. 2004. №2, с.126-131.

[7] Banichuk N.V., Barsuk A.A. Localization of eigenforms and limit transitions in problems of stability of rectangular plates // J.Appl. Math and Mech. 2008. v.72(2), p.302-307.

[8] Sharifian R. Belubekyan V. Stability of a rectangular plate axially compressed on its two opposite free edges // ZAMM, 2012, v.92, №7, p.558-564.

[9] Белубекян М.В., Саакян А.А. О локализованной неустойчивости свободного края, опёртой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки при различных условиях закрепления четвёртой стороны. // Изв. РАН, МТТ. 2018, №3, с.61-66.

[10] Коненков Ю.К. Об изгибной волне релеевского типа // Акуст. Журнал. 1960., т.6, №1, с.124-126.

[11] Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки // Прикл. Механика. НАН Украины, 1994, т.30, №2, с.61-68.

[12] Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Bending Waves in Rib-Rein-forced Elastic Orthotropic Plate. Journal of Appl/ Mechanics. 2007, v.74, Issue 1, p.169-173.

[13] Lawrie J.B., Kaplunov J. Edge waves and resonance on elastic structures: an overview // Mathematics and Mechanics of Solids. 2012, v.17, p.4-16.

[14] Белубекян М.В. Условия появления локализованных изгибных колебаний растянутой пластинки. В сб.: „Проблемы механики деформируемого твёрдого тела” Ереван, Гитутюн 2017, с.93-98. (Посв. 95-летию С.А. Амбарцумяна).

[15] Белубекян В.М., Терзян С.А. Влияние граничных условий на условия появления локализованной неустойчивости прямоугольной пластинки. В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Материалы 6-ой международной конференции, 01-06 октября 2019, Дилижан, Армения, стр. 60-63.

Сведения об авторе

Белубекян Вагаршак Мелсович - к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении.
Email: vbelub@gmail.com

Терзян Саркис Арутюнович - к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении.
Тел. (+374 91) 34 04 32 **Email**: sat_and_21@yahoo.com

Поступила в редакцию 19.01.2021