ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 2, 2021 Механика

УДК 539.3 http://doi.org/10.33018/74.2.3

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ К СКОРОСТИ ПОТОКА ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Белубекян М. В., Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: устойчивость, сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, дивергенция панели, панельный флаттер, сосредоточенные инерционные массы и моменты

Supersonic flutter panel with one free edge, compressed in the direction, perpendicular to the gas flow velocity, in presence of concentrated inertial masses and moments

M. V. Belubekyan, S. R. Martirosyan

Keywords: stability, compressive forces, supersonic overrunning, divergence of the panel, flutter, concentrated inertial masses and moments

In a linear formulation, the dependence of the types of loss of stability of the disturbed motion of the "plate-flow" dynamic system on the character of the initial stress state of a rectangular plate of moderate dimensions we is investigated. An analytical solution of the stability problem in the presence of concentrated inertial masses and moments at its free edge under the assumption that the direction perpendicular to the velocity of the flowing supersonic gas flow incident on its free edge we have found. We have shown, that during flow, the initial stress state caused by compressive forces leads to both significant destabilization and stabilization of the disturbed motion of the system depending on the parameters of the system.

Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որում սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Հիմնաբառեր. ուղղանկյուն սալ, կայունություն, սեղմող ուժեր, պանելային դիվերգենցիա, ֆլատեր, գերձայնային շրջհոսում, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ

Ուսումնասիրված է նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը գերձայնային գազի հոսքում միջին չափերի սեղմված ուղղանկյուն սալի խոտորված շարժման կայունության մի խնդրում, որում գազի հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը:

Ցույց է տրված պանելային դիվերգենցիայի և ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են գազի հոսքի համապատասխան կրիտիկական արագությունների արժեքները: Ցույց է տրված սեղմող ուժերի ինչպես ապակայունացնող, այնպես էլ կայունացնող ազդեցությունը «սալ–գազի հոսք» համակարգի խոտորված շարժման վրա, կապված համակարգի պարամետրերի արժեքներից:

В линейной постановке исследуется зависимость видов потери устойчивости возмущённого движения динамической системы “пластинка-поток” от характера первоначального напряжённого состояния прямоугольной пластинки умеренных размеров при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов на её свободном крае в предположении, что пластинка сжата в направлении, перпендикулярном скорости обтекающего сверхзвукового потока газа, набегающим на ее свободный край. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «плстинка-поток». Установлено, что при обтекании первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими усилиями, приводит, как к дестабилизации, так и к стабилизации возмущённого движения системы, в зависимости от её параметров.

Введение

Как известно [1– 4], выпучивание пластинок в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной плоскости пластинки. Так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, на много мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки [1]. Поэтому задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той “классической задачей”, решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

Изучению статической и динамической неустойчивости пластинок и оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, посвящено огромное количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и в статьях [1– 10]. Однако в этих работах, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [15], получено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Рассматриваемая первоначально сжатая прямоугольная пластинка умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями обтекается сверхзвуковым потоком газа в направлении, перпендикулярном сжимающим силам; поток газа набегает на её свободный край, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Показано, что возмущённое движение системы, теряет устойчивость как в виде дивергенции панели, так и в виде панельного флаттера, или же только в виде дивергенции панели, в зависимости от отношения сторон пластинки и её относительной толщины. Найдены соответствующие критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера. А также, установлены «опасные» границы области устойчивости [12], при переходе через которых происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Как оказалось, первоначальное напряжённое состояние пластинки умеренных размеров, обусловленное сжимающими силами, приводит, в основном, к стабилизации возмущённого движения системы «пластинка-поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [15].

1 Постановка задачи

Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка умеренных размеров, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$: $ab^{-1} \in (0.193, 1.96)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 11].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_y = 2h\sigma_y$, равномерно распределённых по краям $y = 0$ и $y = b$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [13, 14]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$. Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp, сжимающими усилиями σ_y в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что сжимающие усилия σ_y малы по сравнению с критическими напряжениями $(\sigma_y)_{cr}$, которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания.

Отметим, что в работе, с целью получения возможности аналитического исследования в рассматриваемой задаче динамической устойчивости системы “пластинка–поток”, распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота, приложенными вдоль свободного края пластинки [2, 11, 15]. Такая замена вовсе не приводит к искажению динамической картины явления – потери устойчивости системы; быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа, которые могут быть несколько завышенными.

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [13,14] будет описываться соотношением [2, 8,18]:

$$D\Delta^2 w + 2h\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ– дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 11]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D^{-1} I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

при $x = 0$;

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \text{ при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr}– наименьшую скорость потока газа в сверхзвуковом и гиперзвуковом интервале скоростей:

$$V_{cr} \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}), \ M_0 = \sqrt{2}, \ M_{2\cos m} \approx 33.85; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.} < (\sigma_y)_{pr.}. \tag{1.6}$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1]; $(\sigma_y)_{cr.}$– критические напряжения, приводящие к выпучиванию пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$), найденные в работе [17]; $(\sigma_y)_{pr.}$ – нижняя граница текучести [1, 17].

Анализ устойчивости возмущённого движения динамической системы “пластинка–поток” (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае прямоугольных пластинок умеренных размеров:

$$\gamma = ab^{-1} \in (0.193, 1.96), \tag{1.7}$$

γ– отношение ширины пластинки a(сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Заметим, что в работах [15, 16] получено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в предположении отсутствия первоначального напряжённого состояния пластинки, в работе [17] – задачи статической устойчивости панели с нагруженными краями $y = 0$ и $y = b$. как при обтекании ($V \neq 0$), так и в отсутствии обтекания ($V = 0$).

Данная работа является продолжением работы [18], в которой исследована задача устойчивости (1.1) – (1.4) в случае достаточно удлинённых панелей ($\gamma \leq 0.193$).

2 Решение задачи

Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\mu_n r x + \lambda t\right) \sin\left(\mu_n y\right), \ \mu_n = \pi n b^{-1} \tag{2.1}$$

C_n– произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Возмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda > 0$). Критическая скорость потока V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\operatorname{Re}\lambda = 0$). Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение в виде алгебраического уравнения четвёртой степени:

$$r^4 - 2r^2 + \alpha_n^3 r + (1 - \beta_y^2) = 0, \ \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \ \beta_y^2 = 2h\sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2}, \tag{2.2}$$

которое в соответствии с методом решения Феррари можно представить в виде [17]:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1)}r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right)\left(r^2 - \sqrt{2(q+1)}r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) = 0, \tag{2.3}$$

где $q = q(V)$– параметр, характеризующий скорость потока газа V– действительный корень кубического уравнения

$$8(q+1)\left(q^2-1+\beta_y^2\right)-\alpha_n^6=0, \tag{2.4}$$

удовлетворяющий условию [17]:

$$q \in (q_0, \infty) \tag{2.5}$$

$q_0 = \left(-1+2\sqrt{(4-3\beta_y^2)}\right)/3,\ \beta_y^2 \leq 4/3$ и $q_0 = 1,\ \beta_y^2 > 4/3$ (табл. 1);

β_y^2– коэффициент напряжения, который

$$\beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.},\ (\beta_y^2)_{cr.} = \beta_y^2(n,\gamma,\nu) = 2h(\sigma_y)_{cr.}D^{-1}\mu_n^{-2}, \tag{2.6}$$

в соответствии с ограничением (1.6) и обозначениями (1.7) и (2.2).

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	1.333	>1.333
q_0	1.0	0.840	0.721	0.510	0.338	0.072	-0.333	1.0

Таблица 1

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.193	1.0	0.840	0.721	0.510	0.338
0.20	14.202	12.359	11.605	10.456	8.493
0.30	6.822	6.029	5.695	5.180	4.272
0.33	5.799	5.150	4.875	4.447	3.686
0.40	4.245	3.815	3.625	3.332	2.797
0.50	3.058	2.792	2.672	2.479	2.114
0.60	2.416	2.237	2.153	2.015	1.745
0.70	2.032	1.903	1.841	1.735	1.523
0.80	1.785	1.687	1.639	1.555	1.379
0.90	1.616	1.539	1.500	1.431	1.282
1.00	1.496	1.434	1.401	1.342	1.212
1.20	1.341	1.297	1.273	1.228	1.124
1.50	1.215	1.186	1.168	1.135	1.052
1.80	1.149	1.126	1.113	1.086	1.016
1.90	1.133	1.112	1.099	1.074	1.0084
1.96	1.125	1.105	1.092	1.067	1.004

Таблица 2

В таблице 2 приведены для некоторых значений параметров $\gamma \in (0.193, 1.96)$

и ν значения функции $(\beta_y^2)_{cr.} = \beta_y^2(n,\gamma,\nu)$ при $n=1$– решения уравнения

$$K_3 = \left(\sqrt{\beta_y^2}+1-\nu\right)^2 \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\,\mathrm{sh}\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\right)\cos\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\right)-$$
$$-\left(\sqrt{\beta_y^2}-1+\nu\right)^2 \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\,\mathrm{ch}\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\right)\sin\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\right)=0$$

в интервале $\beta_y^2 > 1$, полученные в работе [17].

Необтекаемая прямоугольная пластинка умеренных размеров $\gamma \in (0.193, 1.96)$ для всех значений коэффициента Пуассона ν при условии $\beta_y^2 \ge (\beta_y^2)_{cr.}$(табл.2) теряет статическую устойчивость в виде неустойчивости панели: локализованная неустойчивость отсутствует [17].

В работе [17] с помощью графоаналитических методов исследований показано, что в допустимом интервале значений параметра скорости $q \in (q_0, \infty)$ (2.5) характеристическое уравнение (2.2) имеет два действительных корня $r_1 \in R^1$, $r_2 \in R^1$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4} \in W$ с положительной вещественной частью, которые легко находятся, как решения квадратных уравнений – сомножителей соотношения (2.3):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)} \tag{2.7}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)} \tag{2.8}$$

При этом, имеем [17]:

$$r_1<0,\ r_2<0,\ \text{когда } \beta_y^2 \in [0,1),\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3, \infty\right) \tag{2.9}$$

$$r_1<0,\ r_2=0,\ \text{когда } \beta_y^2 = 1,\ q \in (1/3,\infty) \tag{2.10}$$

$$r_1<0,\ r_2>0,\ \text{когда } \beta_y^2 \in (1,4/3],\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3, \infty\right) \text{ и} \tag{2.11}$$
$$\beta_y^2 > 4/3,\ q \in (1,\infty)$$

Отсюда следует, что общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\sin(\mu_n y),\ \mu_n = \pi n b^{-1} \tag{2.12}$$

C_{nk} – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b ; r_k ,$k=\overline{1,4}$ – корни характеристического уравнения (2.2), определяемые выражениями (2.7) и (2.8).

Учитывая обозначения (2.2), из соотношения (2.4) находим явный вид зависимости скорости потока газа V от параметров q,n,γ,β_y^2 и ν системы «пластинка–поток»:

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu) = 2\sqrt{2(q+1)\left(q^2-1+\beta_y^2\right)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D\left(a_0\rho_0 a^3\right)^{-1}, \tag{2.13}$$

$q\in(q_0,\infty)$ (табл.1), $\beta_y^2\le(\beta_y^2)_{cr.}$ (табл.2) и $\gamma\in(0.193, 1.96)$.

В силу условия (1.5), отсюда, очевидно, следует, что

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\in\left(V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu),\ a_0M_{2\cos m}\right)\subseteq(a_0M_0, a_0M_{2\cos m}) \tag{2.14}$$

когда $V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\ge a_0M_0$, и

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\in(a_0M_0, a_0M_{2\cos m}),\ \text{когда } V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)<a_0M_0. \tag{2.15}$$

Тогда, согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=\dfrac{E(2h)^3}{12(1-\nu^2)}$, допустимые интервалы значений приведённой скорости $V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}a_0\rho_0a^3$ при $V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\ge a_0M_0$, и при $V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)<a_0M_0$ соответственно будут вида:

$$\begin{gathered}V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}(a_0\rho_0a^3), a_0M_{2cosm}\Psi)\subseteq\\ \subseteq(a_0M_0\Psi, a_0M_{2cosm}\Psi);\end{gathered} \tag{2.16}$$

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(a_0M_0\Psi, a_0M_{2\cos m}\Psi) \tag{2.17}$$

где

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m}\approx 33.85. \tag{2.18}$$

Из соотношений (2.16)–(2.18) видно, что длины $d(\nu, 2ha^{-1})\le a_0(M_{2\cos m}-M_0)\Psi$ допустимых интервалов (2.16) и (2.17) являются убывающими функциями как от относительной толщины пластинки $2ha^{-1}$, так и от коэффициента Пуассона ν, при фиксированных значениях остальных параметров системы. Для стальных прямоугольных пластинок умеренных размеров $\gamma\in(0.193, 1.96)$ подсчитанные интервалы допустимых значений приведённых скоростей потока газа $VD^{-1}(a_0\rho_0a^3)$ даны в таблице 3.

Как следует из данных таблицы 3, с ростом параметра $2ha^{-1}$ длины $d(\nu, 2ha^{-1})$ допустимых интервалов уменьшаются примерно в 15.6 раз при всех фиксированных значениях ν , а с ростом коэффициента Пуассона ν– уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях параметра $2ha^{-1}$.

ν / $2ha^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Таблица 3

3 Дисперсионное уравнение

Перейдем к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4). Подставляя общее решение (2.12) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель – после несложных преобразований описывается биквадратным уравнением вида:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2)\lambda^2 + A_3 = 0, \tag{3.1}$$

где

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \ \delta_n > 0, \ \chi_n > 0, \tag{3.2}$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$\begin{aligned} A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_y^2) = \sqrt{2(q+1)} \left(1 - e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}\right) B_1 B_2 - \\ - 2B_2 \left(q + 1 + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma} \operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1) \cos(\pi n\gamma B_2) - \\ - 2B_1 \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma} \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1) \sin(\pi n\gamma B_2); \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_1(q,n,\gamma,\beta_y^2) = 2(q+1)\times \\
&\times \left[(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) + (q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}\right] B_1B_2+ \\
&+ 2B_2\Big[\sqrt{2(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)}\left(q+1+\sqrt{(q^2-1+\beta_y^2)}\right)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)+ \\
&+ 2B_1((2q-1)(q+1)+\beta_y^2)\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}+ \\
&+ 2\Big[B_1\sqrt{2(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)}(q+1-\sqrt{(q^2-1+\beta_y^2)})\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)+ \\
&+(q+1)(q-1+\beta_y^2)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\Big]\sin(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= A_2\left(q,n,\gamma,\beta_y^2\right) = 2\left(q+1\right)\left(1+e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}\right)B_1B_2- \\
&- 4\left(q+1\right)B_1B_2\operatorname{ch}\left(\pi n\gamma B_1\right)\cos\left(\pi n\gamma B_1\right)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}+ \\
&+ 2\left(3\left(q^2-1\right)+2\beta_y^2\right)\operatorname{sh}\left(\pi n\gamma B_1\right)\sin\left(\pi n\gamma B_1\right)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma};
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) = \\
&= \sqrt{2(q+1)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu-(1-\nu)^2\right\}B_1B_2- \\
&- \sqrt{2(q+1)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu-(1-\nu)^2\right\}B_1B_2\times \\
&\times e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma} + 2\Big\{\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-(2q^2-4q+1)(q+1)- \\
&- \left(q-1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\beta_y^2 - 2\left((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2\right)\nu+ \\
&+ \left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\nu^2\Big]\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1) + 2\sqrt{2(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)}(q+1)B_1\times \\
&\times \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}+ \\
&+ 2\Big\{-B_1\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+(2q^2-4q+1)(q+1)+ \\
&+ (q-1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\beta_y^2 + 2((2q-1)(q+1)+q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2)\nu- \\
&-(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\nu^2\Big]\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1) - \sqrt{2(q+1)}(3(q^2-1)+2\beta_y^2)\times \\
&\times\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\Big\}\sin(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma} = 0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)},\ B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)} \tag{3.7}
$$

При всех допустимых значениях параметра скорости $q \in (q_0, \infty)$ (2.5), коэффициента напряжения $\beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.}$ (табл. 2) и $n \geq 1$ для $\gamma \in (0.193, 1.9)$ очевидно, что $B_1 = B_1(q, \beta_y^2) > 0$ и $B_2 = B_2(q, \beta_y^2) > 0$, откуда следует справедливость неравенств:

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_y^2) > 0, A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_y^2) > 0 \tag{3.8}$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \delta_n^1 \tag{3.9}$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.8), перепишем в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \delta_n > 0, \chi_n > 0, k_n > 0 \tag{3.10}$$

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.10), определяющих собственные движения системы в пространстве существенных параметров $\Im = \left\{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2, k_n\right\}$ - параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – несущественных» – принимаются фиксированными.

4 Разбиение пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости

Введём в рассмотрение в пространстве $\Im$ параметров системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости $\Im_1, \Im_2, \Im_3$. В области $\Im_0$ все λ_k уравнения (3.10) находятся в левой части комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda < 0$); в областях $\Im_1, \Im_2$ и $\Im_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью. Ясно, что возмущённое движение системы в области $\Im_0$ устойчиво, а в областях $\Im_1, \Im_2, \Im_3$ – неустойчиво. Ясно, что область устойчивости $\Im_0 \in \Im$ будет определяться соотношениями:

$$k_n A_1 + A_2 > 0,\ A_3 > 0,\ \Delta > 0 \tag{4.1}$$

а области неустойчивости $\Im_l$, $l = \overline{1, 3}$ – соотношениями:

$$\Im_1 : k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 < 0, \Delta > 0 \text{ и } k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 < 0, \Delta > 0 \tag{4.2}$$

$$\Im_2 : k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0 \tag{4.3}$$

$$\Im_3 : k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta < 0 \text{ и } k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta < 0 \tag{4.4}$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического определителя (3.10):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_y, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \qquad (4.5)$$

Очевидно, что в области устойчивости $\Im_0$, определяемой условиями (4.1), уравнение (3.10) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$. При этом обтекаемая прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния. В области $\Im_1$, определяемой условиями (4.2), характеристический определитель (3.10) имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В силу этого, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\Im_1$ имеет место дивергенция панели.

В области $\Im_2$, определяемой условиями (4.3), уравнение (3.10) имеет четыре действительных корня λ_i, по два отрицательных $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ и положительных $\lambda_3 > 0,\ \lambda_4 > 0$: из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. Тем самым, возмущённое движение системы в области $\Im_2$ так же, как и в $\Im_1$, является статически неустойчивым: имеет место дивергенция панели. Однако, в отличие от области$\Im_1$, в области $\Im_2$ явление дивергенции более ярко выражено.

В области $\Im_3$, определяемой условиями (4.4), характеристическое уравнение (3.10) имеет, по крайней мере, два комплексно сопряженных корня с положительной вещественной частью. Следовательно, возмущённое движение системы теряет динамическую устойчивость: имеет место панельный флаттер. Пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде.

Границами области устойчивости $\Im_0$ возмущённого движения системы «пластинка- поток» в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности [12, 15]:

$$A_3 = 0 \qquad (4.6)$$

$$\Delta = 0 \qquad (4.7)$$

Характеристическое уравнение (3.10) на гиперповерхности (4.6) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.7) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе (4.6) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ возмущённое движение системы «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div.}$, соответствующие первому корню $q^{(1)}_{cr.div.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.6) и подсчитанные по формуле (2.13), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической (дивергентной) неустойчивости $\Im_1$ возмущённого движения прямоугольной пластинки. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения сжатой прямоугольной пластинки в потоке газа: в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция.

Заметим, что уравнение (4.6) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой сжатой панели в статической постановке с помощью метода Эйлера.

На границе (4.7) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_nA_1 + A_2 > 0, A_3 > 0$, а так же, на границе (4.7) области дивергентной неустойчивости $\Im_2$ при условии $k_nA_1 + A_2 < 0, A_3 > 0$, возмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ теряет динамическую устойчивость в виде панельного флаттера.

Критические скорости панельного флаттера $V_{cr.fl.}$, соответствующие первому корню $q^{(1)}_{cr.fl.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.7) и подсчитанные по формуле (2.13), в зависимости от значений параметров системы γ, β_y^2, k_n при условии $k_nA_1+A_2 > 0$ разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и $\Im_3$, или области $\Im_2$ и $\Im_3$. В обоих случаях при значениях скоростей потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям – к колебаниям по нарастающей амплитуде.

Однако, в первом случае плоская по форме пластинка начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния, а во втором случае – «выпученная» (изогнутая) пластинка. Соответственно, переходы $\Im_0 \to \Im_3$ и $\Im_2 \to \Im_3$ определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [12, 15].

Следует отметить, что в соответствии с соотношениями (4.1) – (4.5) очевидно, что при $k_n = 0$ – при отсутствии момента поворота I_c на свободном крае пластинки $x = 0$ возмущённое движение системы теряет устойчивость только в виде дивергенции панели, как и в случае системы при ненагруженной панели $(\beta_y^2 = 0)$[15]: панельный флаттер отсутствует.

Таким образом, критические скорости дивергенции панели флаттера $V_{cr.div.}$и панельного $V_{cr.fl.}$, соответствующие корням $q_{cr.div.}$ и $q_{cr.fl.}$ уравнений (4.6) и (4.7) соответственно, определяются по формуле (2.13) с достаточной точностью. При скоростях потока $V \geq V_{cr.div.}$и $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» переход возмущённого движения системы «пластинка–поток», соответственно, от устойчивости к неустойчивости в виде дивергенции панели и от устойчивости или от состояния дивергенции панели – к панельному флаттеру.

5 Численный анализ

В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\left\{q(n, \gamma, \nu, \beta_y^2, k_n)\right\} \in \Im$, параметризованных надлежащим образом в пространстве $\Im$. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому, ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из этого семейства кривых. Численные расчеты, проведённые для различных значений числа полуволн n , показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы наименьшие значения критических скоростей дивергенции и флаттера соответствуют значению $n = 1$.

В таблицах 4 – 19 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости возмущённого движения системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости приведённых критических скоростей дивергенции и флаттера от существенных параметров системы, применительно к интервалу сверх– и гиперзвуковых скоростей (1.5).

Как оказалось, качественные характеристики поведения возмущённого движения системы существенно зависят от параметра $\gamma \in (0.193, 1.96)$. Тем не менее, можно выделить три интервала значений $\gamma : (0.193, 0.33), [0.33, 0.74)$ и $[0.74, 1.96)$, в которых поведение возмущённого движения системы можно принять, примерно, одинаковым.

Для наглядной иллюстрации динамики изменения состояния системы «пластинка – поток» в указанных интервалах, составим цепочки переходов состояний системы из области $\Im_l \in \Im$ в область $\Im_k \in \Im$, основываясь на анализе численных результатов, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5). В частности, при составлении цепочек переходов для стальных пластинок учитывались интервалы допустимых значений приведённых скоростей потока газа, зависящих от относительной толщины пластинки $2ha^{-1}$ и коэффициента Пуассона ν [17, 18]. В данной статье приводится лишь часть этих данных (табл. 3).

5.1 Случай $\gamma \in (0.193, 0.33)$

Исследуем поведение возмущённого движения системы при $\gamma \in (0.193, 0.33)$ В этом случае сверхзвуковое обтекание приводит к резкому «скачкообразному падению» критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{cr}$ (табл.2): возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) – теряет устойчивость в виде дивергенции панели (область $\Im_1$), как и в случае достаточно удлинённых пластинок ($\gamma \leq 0.193$) [15, 18]. Если это состояние удаётся перейти, то в дальнейшем, в предположении $\beta_y^2 \in \left(0, \left(\beta_y^2\right)_{cr}\right)$ (табл. 2), при скоростях потока газа $V \geq V_0 > a_0\sqrt{2}$ (табл. 4) и $V \geq V_0^* > a_0\sqrt{2}$ (табл.5), соответствующих значениям $0 \leq k_1 < 0.3$ и $k_1 \geq 0.3$ соответственно, возмущённое движение системы становится устойчивым. Цепочки переходов состояний системы, в частности, для стальных пластинок относительной толщины $(2ha^{-1}) \in [0.006, 0.015]$, будут иметь следующее представление:

$$\Im_1 \xrightarrow{\mathrm{V_0}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crdiv}}} \Im_1,\ k = 0 \tag{5.1}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{\mathrm{V_0}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crfl}}} \Im_3 \xrightarrow{\mathrm{V_0^*}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crdiv}}} \Im_1,\ k \in (0, 0.3) \tag{5.2}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{\mathrm{V_2}} \Im_2 \xrightarrow{\mathrm{V_{crfl}}} \Im_3 \xrightarrow{\mathrm{V_0^*}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crdiv}}} \Im_1,\ k \geq 0.3 \tag{5.3}$$

Отметим две особенности, свойственные этому случаю:

1) в интервале $k_1 \in (0, 0.3)$ имеет место переход $\Im_0 \to \Im_3$, а в интервале

$k_1 \in (0.3, \infty)$ – переход $\Im_2 \to \Im_3$:

$$V_0(\gamma, \nu, \beta_y^2) = V_2(\gamma, \nu, \beta_y^2), \gamma \in (0.193, 0.33), \nu, \beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{cr} \tag{5.4}$$

$$2) \quad V_{cr.fl.} < V_{cr.div.}, k_1 \in (0, 0.3) \text{ и } V_2 < V_{cr.fl.} < V_{cr.div.}, k_1 \in (0.3, \infty) \tag{5.5}$$

Подробнее обсудим численные результаты для $\gamma = 0.3$, приведённые в таблицах 4 – 11. Данные таблиц 4 – 8 и 11 соответствуют значениям ν: 0.125; 0.25; 0.3; 0.375 и 0.5 соответственно при фиксированных значениях остальных параметров.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	88.203	89.830	90.982	93.020	94.303	95.629	102.11
	89.786	91.389	92.667	94.862	95.830	97.553	102.73
	90.435	92.331	93.151	95.638	96.128	98.342	103.36
	91.422	93.198	94.363	96.767	97.228	99.542	105.23
	93.111	94.776	96.160	98.700	98.579	101.60	107.75

Таблица 4

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 \in (0, 0.3)$	242.68	238.45	235.04	229.55	226.35	222.69	199.68
	237.54	231.81	228.82	224.68	219.89	215.46	185.85
	235.07	229.75	226.54	220.64	216.68	211.96	176.82
	231.79	226.17	222.50	216.63	211.91	206.43	-
	226.09	219.70	215.75	208.68	204.02	197.06	-

Таблица 5

β_y^2 \ k_1	0.3	0.5	0.8	1	5	10	20	200
0	296.69	292.38	279.57	269.87	214.82	200.93	191.32	176.17
	292.26	287.97	276.82	266.14	213.70	200.30	191.02	176.17
	288.73	286.10	275.26	264.43	213.22	200.99	190.86	176.17
	286.97	283.59	272.01	262.72	212.59	199.68	190.56	176.17
	280.23	278.36	268.39	259.32	211.63	199.05	190.18	176.17
2.25	278.79	275.32	264.67	254.82	209.09	197.36	189.66	175.90
	271.01	270.14	261.28	252.29	207.51	196.74	189.08	175.90
	269.28	268.08	258.46	249.77	206.72	196.58	188.90	175.90
	265.00	265.00	256.12	248.10	205.93	195.81	187.83	175.90
	258.20	259.89	251.74	244.76	205.15	195.04	187.38	175.90

Таблица 6: Значения $V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right) = V_0^*\left(\gamma, \nu, \beta_y^2, k_1\right)$ при $k_1 \geq 0.3$.

Приведённая критическая скорость устойчивости $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, а также, равная ей скорость дивергенции панели $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ согласно (5.4), возрастают с ростом параметров γ , β_y^2 и больше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл. 4). Следовательно, первоначальное напряжённое состояние в данном случае приводит к дестабилизации, в сравнении с ненагруженной панелью $\left(\beta_y^2 = 0\right)$ [15]. Приведённая критическая скорость устойчивости $V_0^* D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$, зависит от параметров γ , β_y^2, ν и $k_1 > 0$: убывает с ростом β_y^2 и ν; в интервале $k_1 \in (0,\, 0.3)$ от k_1 зависит неощутимо мало, а в интервле $k_1 \geq 0.3$ убывает с ростом k_1, примерно, в 1.7 раз (табл. 5 и 6); с ростом γ в интервале $k_1 \in (0,\, 0.3)$ убывает, а в интервале $k_1 \geq 0.3$ – возрастает.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	491.03	494.25	496.39	498.45	500.72	502.87	513.71
	480.56	483.76	485.89	488.05	490.18	492.33	500.97
	475.36	479.58	481.29	483.86	484.95	488.13	495.91
	470.17	473.34	474.84	477.60	479.31	479.77	488.34
	459.86	463.01	464.69	467.23	467.27	469.39	476.86

Таблица 7

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_{crfl} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	106.97	110.25	112.25	116.23	118.91	121.61	140.86
	109.51	113.08	115.74	120.15	122.86	125.58	150.65
$k_1 \in (0,\, 0.3)$	110.66	114.37	117.04	121.47	124.12	128.26	159.22
$(\Im_0 \to \Im_3)$	112.33	116.06	119.00	123.45	126.85	130.96	-
	115.31	119.33	122.69	128.13	132.24	136.40	-

Таблица 8

k_1 \ β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
0.3	90.44	92.19	93.51	95.63	96.37	98.35	105.36
0.5	93.33	95.26	96.55	98.51	99.81	101.13	107.37
0.8	99.45	102.04	103.36	104.71	106.05	107.39	113.23
1	104.44	105.93	107.14	108.55	109.71	111.21	116.72
5	133.69	134.74	135.63	136.25	136.98	138.19	141.55
10	143.21	144.42	144.62	145.63	146.32	146.81	149.38
20	150.53	151.68	151.74	152.45	152.97	153.36	155.63
200	163.40	163.64	163.96	164.23	164.51	164.82	166.26

Таблица 9: Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $k_1 \geq 0.3$ (переход $\Im_2 \to \Im_3$)

Приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ зависит от параметров γ , β_y^2 и ν: с ростом коэффициента напряжения β_y^2 возрастает примерно на 4%, меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл. 7). А с ростом γ при $\nu < 0.25$ – возрастает незначительно, в отличие от остальных ν, при которых убывает.

Приведённая критическая скорость флаттера панели $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ зависит от параметров γ , ν, β_y^2 и k_1.

Однако, при этом, в интервале $k_1 \in (0,\ 0.3)$ влияние параметра k_1 на скорость флаттера пренебрежимо мало, в отличие от значений в интервале $k_1 \geq 0.3$, в котором становится пренебрежимо малым влияние коэффициента Пуассона ν на скорость флаттера. При этом, при всех $k_1 > 0$ приведённая критическая скорость флаттера больше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν; с ростом коэффициента напряжения β_y^2 возрастает не более 16%; с ростом k_1 возрастает примерно в 1.82 раза; с ростом γ возрастает примерно 1.08 – 1.3 раза (табл. 8 и 9) .

Из сопоставления данных таблиц 7 – 9 следует, что $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ меньше $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ в 3 – 3.6 раза и более, а из сопоставления данных таблицы 3 с данными таблиц 4 – 9 следует достоверность представления (5.1) – (5.3).

В соответствии с формулой, полученной в работе [18] в предположении $V_0 \leq a_0\sqrt{2}$ и $V_0^* \leq a_0\sqrt{2}$, легко можно найти минимальную относительную толщину пластинки $\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$, при которой возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является устойчивым при всех γ , $\nu, \beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{cr.}$ и $k_1 \geq 0$,:

$$\left(2ha^{-1}\right)_{\min} = \sqrt[3]{\frac{a_0\sqrt{2}}{\left(V_{0\max}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\right)} \cdot \left(12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}\right)}, \tag{5.6}$$

где

$$\left(V_0\right)_{\max}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right) = \max_{\beta_y^2} V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right), 0 \leq k_1 < 0.3 \text{ (табл. 4)}; \tag{5.7}$$

$$\left(V_0\right)_{\max}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right) = \max_{\beta_y^2} V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right), k_1 \geq 0.3 \text{ (табл. 5 и 6)}. \tag{5.8}$$

Подставляя значения (5.7) и (5.8) в формулу (5.6), получаем, соответственно, значения минимальной относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$и $\left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$(табл. 10), которые, как оказалось, зависят от параметра $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$ неощутимо мало.

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$, $0 \leq k_1 < 0.3$	0.00487	0.00477	0.00472	0.00459	0.00438
$\left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$, $k_1 \geq 0.3$	0.00342	0.00338	0.00336	0.00329	0.00318

Таблица 10

Тогда, учитывая условие (5.4), для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < \left(2ha^{-1}\right)_{\min}$ при $k_1 = 0$ и $2ha^{-1} \in \left(\left(2ha^{-1}\right)^*_{\min},\ \left(2ha^{-1}\right)_{\min}\right)$ при $k_1 > 0$ цепочки переходов (5.1) – (5.3) в интервале $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$ будут вида:

$$
\begin{aligned}
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 = 0; \\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^{*}} \Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in (0,\, 0.3)\,; \\
&\Im_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^{*}} \Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \ge 0.3.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Из выражений (5.9) следует, что возмущённое движение динамической системы «пластинка–поток», будучи устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех $k_1 \in (0,\, 0.3)$, с увеличением скорости потока газа теряет сначала динамическую устойчивость в виде панельного флаттера при скоростях $V \ge V_{cr.fl.}$ (табл. 8) и после этого, вновь становясь устойчивым, теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях $V \ge V_{cr.div.}$(табл. 7), превышающих $V_{cr.fl.}$в 3 и более раз. А, при $k_1 \ge 0.3$ возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым: система находится в области $\Im_2$ – в состоянии более ярко выраженной дивергенции панели, в сравнении с областью $\Im_1$.

Для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$ (табл. 10) цепочки переходов в интервале $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$ имеют следующее описание:

$$
\begin{aligned}
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in [0,\ 1); \\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in [1, 20); \\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_2 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \ge 20.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Как следует из описания цепочек переходов (5.10), для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \le \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$ возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех $k_1 \ge 0$ является устойчивым, которую теряет в виде дивергенции панели при скоростях $V \ge V_{cr.div.}$. При дальнейшем увеличении скорости потока газа возмущённое движение системы для $k_1 \in [0,\ 1)$ теряет устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях $V \ge \tilde{V}_{cr.div.}$, превышающих $V_{cr.div.}$ примерно на порядок: панельный флаттер отсутствует.

β_y^2 \ k_1	1	5	10	20	200
0	1623.303	1689.451	1766.119	1830.869	1982.711
	1721.657	1742.038	1806.497	1854.521	1994.318
	1754.867	1766.118	1824.358	1879.938	2000.463
	-	1814.609	1869.936	1887.342	2010.526
	-	-	1916.034	1896.103	2038.150
2.25	-	1727.643	1798.690	1863.824	1996.387
	-	1785.756	1847.468	1896.680	2008.130
	-	1831.161	1863.824	1916.485	2014.851
	-	1896.680	1929.726	1949.644	2031.372
	-	-	-	-	-

Таблица 11: Значения $\tilde{V}_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 \ge 1$ (переход $\Im_2 \to \Im_3$)

Возмущённое движение системы в случаях, в которых $k_1 \geq 1$, теряет устойчивость в виде панельного флаттера при скоростях $V \geq \tilde{V}_{cr.fl.}$, превышающих $V_{cr.fl.}$ более, чем на порядок (табл. 9 и 11), после чего в виде дивергенции панели при скоростях $V \geq \tilde{V}_{cr.div.}$, превышающих $\tilde{V}_{cr.fl.}$ в 3 – 3.5 раза. Это означает, что с уменьшением относительной толщины пластинки $\left(2ha^{-1}\right)$ приведённая критическая скорость флаттера растёт больше, чем на порядок, в отличие от приведённой скорости дивергенции $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$(табл. 7), которая не зависит от относительной толщины пластинки.

Таким образом, при меньших значениях относительной толщины пластинки, начиная с значения $2ha^{-1} = \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$(табл. 10), возмущённое движение системы при всех $k_1 \geq 0$ является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей. Приведённые критические скорости дивергенции $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ (табл. 7) и флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, $\tilde{V}_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ (табл. 8, 9 и 11) являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения $\beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{cr.}$(табл. 2): первоначальное напряжённое состояние, обусловленное статическим нагружением, способствует стабилизации возмущённого движения системы, в сравнении с системой с ненагруженной панелью [15]. При этом, чем меньше относительная толщина пластинки $\left(2ha^{-1}\right)$, тем больше приведённые критические скорости дивергенции панели и флаттера: с уменьшением относительной толщины пластинки возмущённого движения системы становится более устойчивым.

5.2 Случай $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$

Возмущённое движение системы при $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ и $\beta_y^2 \in \left(0,\ \left(\beta_y^2\right)^*_{cr.}\right)$ является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей; $\left(\beta_y^2\right)^*_{cr} \approx \chi^{-1}(\gamma,\ \nu)\cdot\left(\beta_y^2\right)_{cr.}$, $\chi(\gamma,\nu)$ (табл. 12) – убывающая функция от γ и коэффициента Пуассона ν, характеризующая «скачкообразное падение» критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{cr.}$ (табл. 2), вследствие сверхзвукового обтекания.

γ	0.33	0.4	0.5	0.6	0.7
$\chi = \chi(\gamma, 0.125)$	4.142	3.265	2.548	2.301	2.117
$\chi = \chi(\gamma, 0.3)$	3.482	2.788	2.227	2.050	1.918
$\chi = \chi(\gamma, 0.5)$	2.632	2.151	1.761	1.662	1.586

Таблица 12

Цепочки переходов для стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in [0.006,\ 0.015]$ имеют следующее описание:

$$\begin{aligned}
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ 0 \leq k_1 < k_{11};\\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in (k_{11},\ k_{12})\,;\\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_2} \Im_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \geq k_{12};
\end{aligned} \tag{5.11}$$

где k_{11} и k_{12} – коэффициенты, зависящие от параметров γ, ν и β_y^2. Так как влияние параметров ν и β_y^2 на значения функций k_{11} и k_{12} неощутимо мало, то можно принять, что $k_{11} = k_{11}(\gamma)$ и $k_{12} = k_{12}(\gamma)$.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
$V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	14.650	13.707	13.007	11.681	10.649
	13.614	11652	10.946	9.639	8.538
	11.706	10.836	10.075	8.780	7.656
	10.448	9.557	8.822	7.500	6.207
	8.038	7.443	6.703	5.266	4.308

Таблица 13

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
$\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	501.104	507.192	511.359	518.069	522.256
	470.207	474.455	477.387	481.937	484.877
	458.144	462.079	464.361	468.073	470.474
	441.374	443.860	445.328	447.815	449.283
	413.702	413.945	414.125	414.257	414.327

Таблица 14

k_1 \ β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
0.5	125.501	132.932	140.407	150.003	158.154
	136.261	146.933	156.815	-	-
	141.602	154.500	172.547	-	-
	151.727	-	-	-	-
	-	-	-	-	-
0.8	113.652	119.822	124.403	129.733	134.057
	121.610	129.075	134.238	141.199	144.440
	125.180	133.361	138.470	149.016	157.473
	131.119	141.163	148.242	160.997	173.758
	143.487	158.651	177.549	-	-
1.0	112.627	117.532	121.796	127.478	131.407
	120.011	125.722	129.670	137.726	142.886
	123.752	129.501	133.473	142.751	148.350
	127.535	135.736	140.796	151.785	159.882
	138.256	149.310	158.629	-	-

Таблица 15: Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $0.5 \leq k_1 < 2$ (переход $\Im_0 \to \Im_3$)

В соответствии с численными результатами, коэффициенты $k_{11} = k_{11}(\gamma)$ и

$k_{12} = k_{12}(\gamma)$ при $\gamma = 0.4$; 0.5; 0.6; 0.7, соответственно, равны:

$$k_{11} \approx 0.5;\ 0.5;\ 0.8;\ 2 \text{ и } k_{12} \approx 0.8;\ 2;\ 3;\ 10. \tag{5.12}$$

Исследуем подробнее численные результаты искомой задачи при $\gamma = 0.5$, приведённые в таблицах 13 – 16.

Из сопоставления данных таблиц 13 и 14 следует, что $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ меньше $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ примерно на два порядка. Значения обеих скоростей меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν.

Однако, приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, в отличие от $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, является возрастающей функцией от $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ и убывающей от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0,\ 1.2)$: при росте β_y^2 от 0 до 1.0 убывает, примерно, в 1.5 раза (табл. 13). А приведённая скорость дивергенции $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, наоборот, является убывающей функцией от $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ и возрастающей от β_y^2: при росте $\beta_y^2 \in [0,\ 1.2)$ возрастает, примерно, на 4% (табл. 14).

Приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ (табл. 15 и 16) при $0.5 \le k_1 < 20$ больше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν; при $k_1 \ge 20$ влияние коэффициента Пуассона ν на скорость флаттера неощутимо мало. Критическая скорость $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ является возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_y^2: возрастает примерно в 1.17–1.25 раз в интервале $\beta_y^2 \in [0,\ 1.2)$.

k_1 \ β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
2	112.883 118.894 121.505 125.479 131.924	118.897 125.346 128.186 132.779 141.749	122.799 129.594 132.615 137.582 147.611	128.491 135.809 139.189 144.817 154.970	132.163 139.910 143.507 149.707 161.207
5	124.886 126.398 130.996 132.970 137.134	131.785 135.234 139.877 141.046 147.724	132.510 140.796 141.964 146.271 151.414	141.199 145.482 147.049 150.992 160.188	143.663 148.744 152.089 153.882 163.517
10	138.689 140.250 142.602 144.965 146.548	143.784 146.143 148.319 150.502 154.493	148.123 150.222 152.210 154.207 155.409	152.578 153.374 157.170 160.956 162.617	154.280 157.472 161.494 162.910 168.817
20	148.135	152.257	153.348	161.320	162.707
200	169.666	172.476	174.417	177.641	178.746

Таблица 16: Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 \ge 2$ (переход $\Im_2 \to \Im_3$)

Наряду с этим, приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$

является монотонно убывающей функцией от k_1 в интервале $0.5 \le k_1 < 2$ (табл. 15), а в интервале $k_1 \ge 2$ – возрастающей функцией от k_1. При этом, при $k_1 \ge 200$ влияние коэффициента k_1 на $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ становится неощутимо малым. Следует отметить, что приведённая критическая скорость флаттера является возрастающей функцией от $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ при всех фиксированных значениях остальных параметров. Тем самым, для стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in [0.006,\ 0.015]$ состояние динамической системы «пластинка–поток» при бо'льших значениях β_y^2 и γ является более устойчивым: возмущённое движение системы теряет устойчивость в виде панельного флаттера при бо'льших значениях скоростей потока газа. С помощью аналогичных рассуждений, изъясняющих поведение возмущённого движения системы «пластинка–поток» в разделе 5.1, можно показать, что цепочки переходов (5.11) при всех $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min} \approx 0.00342$ перепишутся в виде:

при $\nu \le 0.25,\ 0 \le k_1 < 2,\ \gamma \in [0.33,\ 0.5)$ и $\nu \le 0.125,\ 0 \le k_1 < 10,\ \gamma \in [0.5,\ 0.58)$:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{\tilde{V}}_{crdiv}} \Im_1;$$

при $\nu \le 0.125,\ 10 \le k_1 < 20,\ \gamma \in [0.5,\ 0.58)$:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{\tilde{V}}_{crdiv}} \Im_1;$$

при $\nu \le 0.25,\ k_1 \ge 2,\ \gamma \in [0.33,\ 0.5)$ и $\nu \le 0.125,\ k_1 \ge 20,\ \gamma \in [0.5,\ 0.58)$:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_2 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{\tilde{V}}_{crdiv}} \Im_1;$$

при остальных значениях параметров:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1. \tag{5.13}$$

Отсюда следует, что для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < 0.00342$, у которых $\gamma \in [0.58,\ 0.74)$, при всех $k_1 \ge 0$, β_y^2 и значениях коэффициента Пуассона ν панельный флаттер отсутствует. Отметим, что $\tilde{\tilde{V}}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ больше $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ на порядок и более; $\tilde{V}_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ больше $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ примерно в 3 – 4 раза. Из сопоставления цепочек переходов (5.11) и (5.13) очевидно, что с уменьшением относительной толщины пластинки $2ha^{-1}$ возмущённое движение системы теряет устойчивость при бо'льших значениях скоростей потока газа. Таким образом, в интервале $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ первоначальное статическое нагружение, обусловленное сжимающими силами, приводит к стабилизации состояния системы «пластинка–поток». Более того, в случае пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < 0.00342$ при всех $\gamma \in [0.58,\ 0.74)$ и фиксированных значениях остальных параметров панельный флаттер отсутствует: имеет место только дивергенция панели.

5.3 Случай $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$

Исследуем динамику возмущённого движения системы «пластинка–поток» при $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$. В этом случае, так же как и в разделе 5.2, при всех $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ и $\beta_y^2 \in \left(0,\ \left(\beta_y^2\right)^*_{cr.}\right)$ возмущённое движение системы является устойчивым вблизи начала интервала сверхзвуковых скоростей $a_0\sqrt{2}$ для пластинок относительной толщины, примерно, $2ha^{-1} \in (0.007,\ 0.015]$. Здесь, $\left(\beta_y^2\right)^*_{cr} \approx \chi^{-1}(\gamma,\ \nu)\cdot \left(\beta_y^2\right)_{cr.}$; $\chi = \chi(\gamma, \nu)$, так же как и в разделе 5.2, является монотонно убывающей функцией от γ и ν (табл. 17). При этом, с увеличением скорости потока газа V возмущённое движение системы при всех значениях её параметров теряет устойчивость только в виде дивергенции панели: панельный флаттер отсутствует. Заметим, что для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \leq 0.007$ возмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым: имеет место дивергенция панели.

γ	0.74	0.8	1.0	1.5	$\geq$1.9
$\chi = \chi(\gamma, 0.125)$	2.076	2.028	1.917	1.598	1.541
$\chi = \chi(\gamma, 0.3)$	1.893	1.862	1.796	1.537	1.495
$\chi = \chi(\gamma, 0.5)$	1.576	1.567	1.515	1.384	1.372

Таблица 17: Caption

Цепочки переходов при $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ и при всех значениях остальных параметров, в основном, будут иметь следующее описание:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1, \tag{5.14}$$

за исключением случаев, в которых $\gamma \in [0.74,\ 0.82)$, $\nu < 0.25$ и $\beta_y^2 < 0.5$. При этих значениях цепочки переходов будут вида: $\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1$.

В таблицах 18 и 19 даны значения приведённой критической скорости дивергенции панели $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.8$ и $\gamma = 1$ соответственно.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.79
	80.471	59.318	48.836	37.305
$V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	60.094	46.393	38.673	28.934
	54.320	41.877	34.945	25.759
	46.751	35.953	29.924	21.105
$(\gamma = 0.8)$	35.952	25.292	21.827	13.651

Таблица 18

β_y^2	0	0.3	0.5	0.75
$V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	524.286	501.362	125.924	77.458
	154.795	106.541	87.566	56.703
	128.470	93.215	67.203	49.539
$(\gamma = 1)$	102.100	86.247	60.693	40.153
	72.915	55.025	41.271	25.647

Таблица 19

Приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при всех $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν и коэффициента напряжения β_y^2 (табл. 18 и 19). При этом, с возрастанием ν критическая скорость дивергенции панели убывает примерно в 2.2 – 2.73 раза при $\gamma = 0.8$; при $\gamma = 1$ – в 3.7 – 5 раз. Соответственно, с ростом коэффициента напряжения критическая скорость дивергенции панели убывает в 2.16 – 2.63 раза при $\gamma = 0.8$, а при $\gamma = 1$ – в 2.84 – 6.76 раз. Тем самым, первоначальное статическое нагружение при больших $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы, в сравнении с возмущённым движением системы с ненагруженной панелью $\left(\beta_y^2 = 0\right)$.

Из сопоставления данных таблиц 18 и 19 следует, что приведённая критическая скорость дивергенции возрастает с ростом $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$: при $\gamma = 1$ больше в 2 раза и более, чем при $\gamma = 0.8$.

Таким образом, в случае, в котором $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$, первоначальное статическое нагружение, обусловленное сжимающими силами, приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка–поток».

6 Основные результаты

В работе, с помощью графоаналитического и численного методов исследований [15 – 18] изучается влияние первоначального напряжённого состояния прямоугольной пластинки умеренных размеров $\gamma \in (0.33,\ 1.96)$, обусловленного сжимающими силами, на устойчивость возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» при наличии на свободном крае пластинки сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток». Получены явные выражения дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости. Произведено разбиение многопараметрического пространства $\Im$ системы «пластинка–поток» на область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости: дивергенции панели $\Im_1$, $\Im_2$ и панельного флаттера $\Im_3$: определены интервалы изменения «существенных» параметров системы, разграничивающие области устойчивости и неустойчивости.

Введено понятие «цепочки переходов», звенья которой – переходы из одной области $\Im_k$ в другую $\Im_l$. «Цепочки переходов» позволяет наглядно проиллюстрировать всю динамику поведения возмущённого движения системы «пластинка–поток» в пространстве её «существенных» параметров $\Im$.

Найдены критические скорости сверхзвукового потока газа $V_{cr.div.}$ и $V_{cr.fl.}$, при превышении которых возмущённое движение динамической системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в параметрическом пространстве в виде дивергенции панели, либо в виде панельного флаттера соответственно, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба.

Найдены критические значения коэффициента напряжения изгиба $\left(\beta_y^2\right)^*_{cr.}$ при обтекании. Установлено, что обтекание приводит к «скачкообразному падению» критического коэффициента напряжения, в сравнении с критическим коэффициентом напряжения при отсутствии обтекания [17]. При этом, коэффициент, характеризующий «падение», является монотонно убывающей функцией от параметра отношения сторон пластинки γ и коэффициента Пуассона ν. Вследствие этого возмущённое движение динамической системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым при всех $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$, в частности, для стальных панелей относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in [0.006,\ 0.015]$. Для них найдена минимальная относительная толщина $\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$, при которой возмущённое движение динамической системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является устойчивым. Как оказалось, в этом случае приведённые критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения: первоначальное напряжённое состояние приводит к стабилизации возмущённого движения системы, в отличие от панелей, у которых $\gamma \geq 0.33$.

В случае панелей, у которых $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$, первоначальное напряжённое состояние приводит как к дестабилизации возмущенного движения системы, так и к стабилизации, в зависимости от параметров γ и $2ha^{-1}$; а при $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ – к существенной дестабилизации при всех значениях остальных параметров, в сравнении с ненагруженной панелью [15].

Установлены «опасные» границы области устойчивости $\Im_0$ в смысле Баутина Н.Н. [12], характеризующиеся наличием звеньев $\Im_0 \to \Im_3$ и $\Im_2 \to \Im_3$ в «цепочке переходов», при которых происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Заключение

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для решения широкого класса подобных задач устойчивости упругих систем как при первоначальном статическом нагружении, так и при динамическом.

Литература

[1] Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. Moscow: Physmathgiz. 1963. 880 p.

[2] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, 340 p. Izd. Fizmat lit. Moscow.

[3] Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same, limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates. // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V. 95. No. 3. Pp. 38-46.

[4] Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243. Movchan A.A.(1956). About vibrations of a plate, moving in gas. Izv. Acad. Nauk USSR. PMM. V. 20. No. 2, pp. 211-222.

[5] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука. 1972. 432 с. Volmir A.S. (1972). Nonlinear dynamics of plates and shells. Nauka. Moscow. 432p.

[6] Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods // Moscow: Science. Physmathlit. 1995. 320 p.

[7] Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968. Strength. Stability. Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I. A. Birger and Ya. G. Panovko. – Moscow.: Mechanical Engineering. 1968.

[8] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с. Algazin, S.D., Kijko, I.A. (2006). Flutter of Plates and Shells. Nauka. Moscow. 247 p.

[9] Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122. Novichkov Yu. N. A flutter of plates and shells. Results of science and technology Mechanics of deformable solids. – Moscow: Science. 1978. V. 11. Pp. 67-122.

[10] Crowell A.R., McNamara J.J., Miller B.A. (2011). Hypersonic aerothermoelastic response prediction of skin panels using computational fluid dynamic surrogates. Journal of aeroelasticity and structural dynamics. V. 2. No. 2, p. 3-30.

[11] . Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44. Rzhanitsyn A.R. (1985). “A cantilever elastic beam loaded by a follower force”, Izv. Acad. Nauk Arm. SSR, Mekhanika, 38, No. 5, pp. 33-44.

[12] Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с. Bautin N.N. The behavior of dynamical systems near the boundaries of the stability region. – M.: Science. 1984. 176 p.

[13] Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755. Il'yushin A.A.(1956). Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity. PMM, v. 20(6), pp. 733-755.

[14] Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.

[15] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V. 67(2). P. 12–42.

[16] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On a problem of supersonic panel flutter in the presence of concentrated inertial masses and moments // Изв. НАН Армении, Механика. 2016, т.69, № 3, с.41-59.

[17] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2017, т.70, № 4, с.12–34. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70(4). P.12–34.

[18] M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concetrated inertial masses and moments.// Изв. НАН Армении. Механика. Изв. НАН Армении, Механика. 2020. T.73, № 4, с. 58–74. Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2020. V. 73(4). P. 58–74.

Сведения об авторе

Белубекян Мелс Вагаршакович - кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
Тел.: (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
Email: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна - кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
Тел. (+374 10) 441010
Email: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 21.04.2021