

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ  
ПОЛУПЛОСКОСТЬ-СЛОЙ ПРИ УСЛОВИИ СКОЛЬЗЯЩЕГО  
КОНТАКТА МЕЖДУ НИМИ**

**Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.**

**Ключевые слова:** волна Рэлея, поперечное и продольные волны, волновое число, частота, условия затухания, дисперсионное уравнение.

**Propagation of surface waves in a halfplane-layer system under the  
condition of sliding contact between them**

**Amirjanyan A.A., Belubekyan M.V., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z.**

**Key words:** Rayleigh wave, transverse and longitudinal waves, wave number, frequency, damping conditions, dispersion equation.

The problem of the propagation of Rayleigh-type surface waves in the halfplane-layer system along the line of their connection is considered under the condition of sliding contact between them. A dispersion equation for the problem of the propagation condition of surface waves is obtained as a function of the physical and geometric characteristics of the half-plane and the layer under various conditions at the outer boundary of the layer.

**Մակերևույթային ալիքների փարածումը կիսահարթություն–շերտ համակարգում  
նրանց միջև սահող կոնտակտի պայմանների դեպքում**

**Ամիրջանյան Ն.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ.**

**Տիպագրություն:** Ռելեյի ալիքներ, երկայնական և լայնական ալիքներ, ալիքային թիվ, համախոսություն, մարման պայմաններ, դիսպերսիոն հավասարում:

Գիտարկված է Ռելեյի տիպի մակերևույթային ալիքների փարածումը կիսահարթություն–շերտ համակարգում միացման գծի երկայնքով նրանց միջև սահող կոնտակտի պայմանների դեպքում: Ստացվել են խնդրի դիսպերսիոն հավասարումները և մակերևույթային ալիքների փարածման պայմանները՝ կախված ֆիզիկական և երկրաչափական բնութագրիչներից և շերտի արտաքին մակերևույթի վրա փարքեր եզրային պայմանների դեպքում:

Рассмотрена задача распространения поверхностных волн типа Рэлея в системе полуплоскость-слой по линии их соединения при условии скользящего контакта между ними. Получены дисперсионное уравнение задачи и условия распространения поверхностных волн в зависимости от физических и геометрических характеристик полуплоскости и слоя при различных условиях на внешней границе слоя.

## Введение.

Исследованию поверхностных волн типа Рэлея в составной полуплоскости посвящено множество работ. Обзор публикаций по этой тематике можно найти в [1-6]. В работах [7-9] исследовано существование упругих волн, локализованных у границы раздела двух упругих сред, которые экспоненциально затухают по мере удаления от границы. Здесь рассмотрены задачи плоской деформации, при скользящем контакте между слоем и полуплоскостью и разных граничных условиях на внешней поверхности.

## 1 Постановка задачи

Рассматривается задача распространения плоской поверхностной волны для системы полупространство–слой (фиг.1).

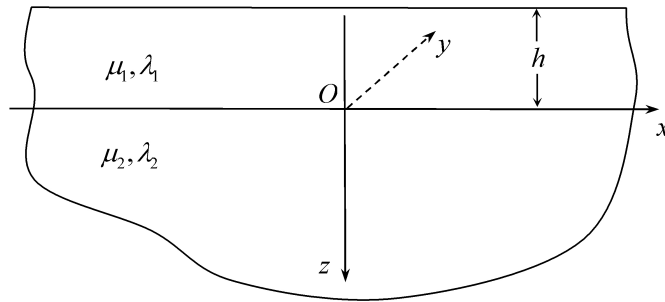
Для компонент упругих перемещений имеем

$$u_1^{(j)} = u^{(j)}(x, z, t), \quad u_3^{(j)} = w^{(j)}(x, z, t), \quad u_2^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

где  $j = 1$  относится к слою, а  $j = 2$  – к полуплоскости,  $t$  – время. Уравнения движения в перемещениях имеют вид [4]

$$\begin{aligned} c_{tj}^2 \Delta u^{(j)} + (c_{lj}^2 - c_{tj}^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} \\ c_{tj}^2 \Delta w^{(j)} + (c_{lj}^2 - c_{tj}^2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_{lj}$ ,  $c_{tj}$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в соответствующих средах,  $\lambda_j$ ,  $\mu_j$  – коэффициенты Ламе слоя и полупространства соответственно.



Фиг. 1

На линии раздела материалов  $z = 0$  заданы условия скользящего контакта:

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{31}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} \quad (3)$$

Посредством скалярных потенциалов представим перемещения в виде [4]

$$u^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z}, \quad w^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \quad (4)$$

уравнения (2) сводятся к

$$\Delta \Phi_j = \frac{1}{c_{l_j}^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi_j = \frac{1}{c_{t_j}^2} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial t^2}. \quad (5)$$

При этом для используемых в дальнейшем напряжений получаются следующие выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(j)} &= \lambda_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} - 2\mu_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z \partial x}, \\ \sigma_{31}^{(j)} &= \mu_j \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Введём обезразмеривающие обозначения

$$\begin{aligned} \eta_j &= \frac{c_{t_j}^2}{c_{l_j}^2} = \frac{\mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j}; \quad \theta = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2} = \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2}; \quad c = \frac{\omega}{k}; \quad \xi = \frac{c^2}{c_{t2}^2} \\ \nu_{11} &= \sqrt{1 - \xi \theta \eta_1}, \quad \nu_{12} = \sqrt{1 - \xi \theta}, \quad \nu_{21} = \sqrt{1 - \xi \eta_2}, \quad \nu_{22} = \sqrt{1 - \xi} \\ \beta_2 &= 1 - \frac{\xi}{2}, \quad \beta_1 = 1 - \frac{\xi \theta}{2}, \quad \mu_* = \mu_2 / \mu_1 \end{aligned} \quad (7)$$

здесь  $c$  – неизвестная фазовая скорость,  $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число. Тогда решение уравнений (5) для слоя будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (A_1 \operatorname{sh}(k\nu_{11}z) + B_1 \operatorname{ch}(k\nu_{11}z)) \exp ik(x - ct) \\ \Psi_1 &= (A_2 \operatorname{ch}(k\nu_{12}z) + B_2 \operatorname{sh}(k\nu_{12}z)) \exp ik(x - ct) \end{aligned} \quad (8)$$

Общие решения уравнений (5) для полуплоскости, удовлетворяющие условиям затухания [4]:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Psi_2 = 0$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= A_3 e^{-k\nu_{21}z} \exp ik(x - ct) \\ \Psi_2 &= B_3 e^{-k\nu_{22}z} \exp ik(x - ct) \end{aligned} \quad (9)$$

$\nu_{2,1}, \nu_{2,2} > 0$  откуда вытекает что  $0 < \xi < 1$

Также будем использовать обозначение  $\xi_{Rj} = \left( \frac{v_{Rj}}{c_{t2}} \right)^2$   $j = 1, 2$  где  $v_{Rj}$   $j = 1, 2$  скорости распространения волн Релея в материалах полосы и полуплоскости соответственно.

## 2 Решение задачи

Рассмотрим различные граничные условия при  $z = -h$

### а. Свободная поверхность

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0 \quad (10)$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_* \left( \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}[s\nu_{1,2}] \operatorname{ch}[s\nu_{1,1}]} \right) 2\beta_1^2 \nu_{1,1} \nu_{1,2} - \operatorname{th}[s\nu_{1,1}] \operatorname{th}[s\nu_{1,2}] (\beta_1^4 + \nu_{1,1}^2 \nu_{1,2}^2) \right) \nu_{2,1} - \\ - \theta \nu_{1,1} (\operatorname{th}[s\nu_{1,2}] \beta_1^2 - \operatorname{th}[s\nu_{1,1}] \nu_{1,1} \nu_{1,2}) (\beta_2^2 - \nu_{2,1} \nu_{2,2}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

где  $s = kh$ ; При  $h \rightarrow 0$  или  $\mu_1 \rightarrow 0$  приходим к задаче Релея. При  $s \ll 1$ , т.е. когда длина волны намного больше толщины слоя, дисперсионное уравнение, с точностью до порядка  $s^2$ , примет вид

$$-s\xi\theta^2 \nu_{1,1} \nu_{1,2} \left( s\mu_* \frac{1}{4} \xi^2 \theta \nu_{2,1} + (\beta_2^2 - \nu_{2,1} \nu_{2,2}) \right) \left( \frac{\xi\theta}{4} - (1 - \eta_1) \right) = 0 \quad (12)$$

откуда

$$\xi = \xi_{R2} - s \frac{\mu_* \theta \xi_{R2}^2 \sqrt{1 - \eta_2 \xi_{R2}} (2 - \xi_{R2})^2}{2(12\xi_{R2} - 8\eta_2 \xi_{R2} - 6\xi_{R2}^2 + \xi_{R2}^3 - 4(1 - \eta_2))} + O(s^2) \quad (13)$$

То есть, независимо от упругих характеристик материалов слоя и полуплоскости существует поверхностная волна, распространяющаяся со скоростью  $\xi$ , меньшей скорости волн Релея в полуплоскости  $\xi_{R2}$ .

Уравнение (12) имеет также корень

$$\xi = 4 \frac{1 - \eta_1}{\theta} + O(s^2) = \xi_S + O(s^2) \quad (14)$$

который, в зависимости от упругих характеристик слоя и полуплоскости, может быть меньше единицы, что означает возможность существования и второй волны.

При  $s \gg 1$  т.е. когда длина волны намного меньше толщины слоя, возможны три случая:

I.)  $1 - \xi\theta > 0$ ; будем иметь  $\operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta}) \sim \operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta\eta_1}) \sim 1$  откуда для (11) получаем [5]

$$-(\beta_1^2 - \nu_{1,1} \nu_{1,2}) (\mu_* (\beta_1^2 - \nu_{1,1} \nu_{1,2}) \nu_{2,1} + \theta \nu_{1,1} (\beta_2^2 - \nu_{2,1} \nu_{2,2})) = 0 \quad (15)$$

Первый множитель этого уравнения совпадает с уравнением Релея для полуплоскости из материала полосы, что является следствием принятого условия  $s \gg 1$ , и имеет корень  $\xi = \xi_{R,1}$ . Второй множитель уравнения (15) представляет собой дисперсионное уравнение для двух полуплоскостей при условии контакта Навье (3).

Исследуем второй множитель на предмет существования корня. Если

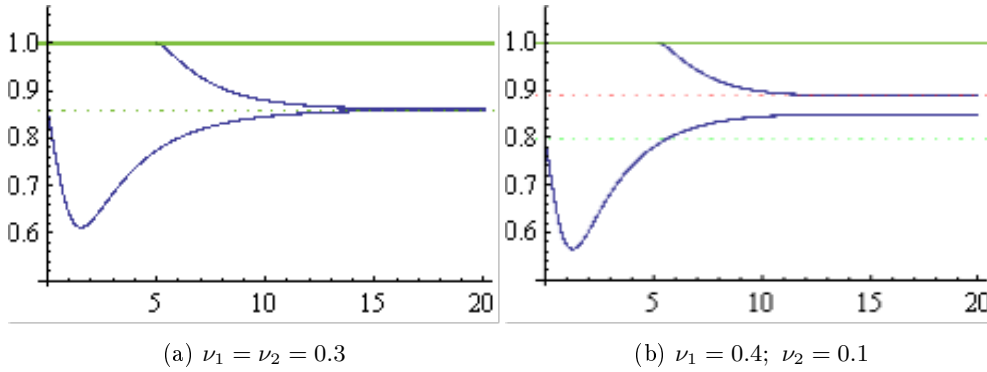
$$\theta < 1 \text{ и } \mu_* < \frac{\theta\sqrt{1-\theta\eta_1}}{4\left(\sqrt{1-\theta}\sqrt{1-\theta\eta_1} - (1-\theta/2)^2\right)\sqrt{1-\eta_2}} \quad (16)$$

или

$$\theta > 1 \text{ и } \mu_* > \frac{-1 + 4\theta(1-\theta + \sqrt{\theta-1}\sqrt{\theta-\eta_2})}{\sqrt{\theta(\theta-\eta_2)}}\sqrt{1-\eta_1} \quad (17)$$

то в концах интервала  $0 < \xi < \min(1, 1/\theta)$  второй множитель принимает разные знаки, что означает, что в этом интервале он имеет по крайней мере один корень ( $\xi = \xi_0$ ).

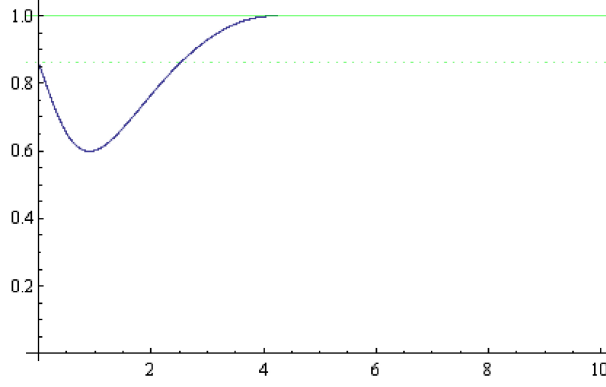
На фиг. 2 представлены графики зависимости параметра  $\xi$ , характеризующего фазовую скорость, от параметра  $s$ , характеризующего волновое число, в случае (а), когда материалы полосы и полуплоскости одинаковы:  $\mu_* = 1$ ;  $\theta = 1$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  и (б), когда  $\mu_* = 1$ ;  $\theta = 1$ ;  $\nu_1 = 0.4$ ;  $\nu_2 = 0.1$ .



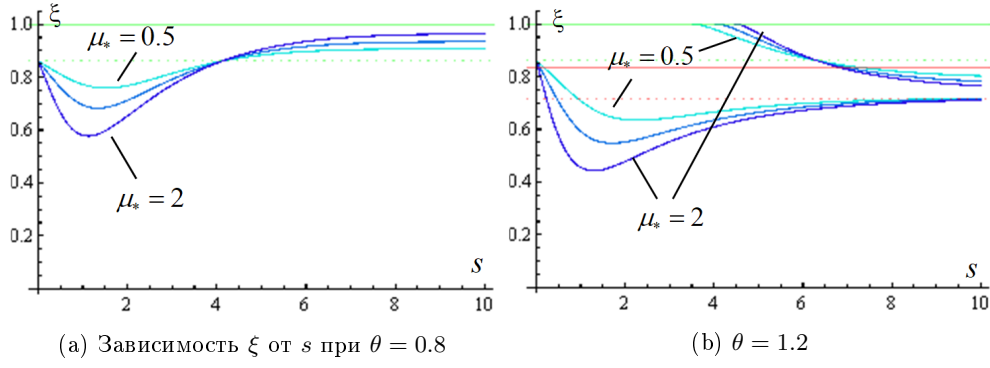
Фиг. 2: Зависимость  $\xi$  от  $s$  при  $\mu_* = 1$ ;  $\theta = 1$ ;

Графики фиг. 2(а) указывают на то, что для очень коротких волн в однородной полуплоскости, содержащей на некоторой глубине линию скольжения, поверхностные волны, распространяющиеся вдоль свободной границы слоя и вдоль линии скольжения, имеют одинаковую скорость, равную скорости волн Рэлея полуплоскости. Графики же фиг. 2(б) показывают, что отличие только лишь коэффициентов Пуассона уже приводит к разнице в скоростях распространения поверхностных волн вдоль свободной границы и линии раздела материалов. При этом скорость распространения поверхностной волны вдоль свободной границы стремится к скорости волн Рэлея для материала слоя, а скорость волны вдоль линии соединения занимает промежуточное значение  $\xi_0$  между скоростями волн Рэлея для слоя и полуплоскости.

При  $\theta < 1$ ; и  $\mu_* > \frac{\theta\sqrt{1-\theta\eta_1}}{4\left(\sqrt{1-\theta}\sqrt{1-\theta\eta_1} - (1-\theta/2)^2\right)\sqrt{1-\eta_2}}$  для больших значений  $s$  волны отсутствуют. В частном случае, при определенных значениях параметров задачи, это представлено на Фиг. 3.



Фиг. 3: Зависимость  $\xi$  от  $s$  при  $\mu_* = 3$ ;  $\theta = 0.6$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$



(a) Зависимость  $\xi$  от  $s$  при  $\theta = 0.8$

(b)  $\theta = 1.2$

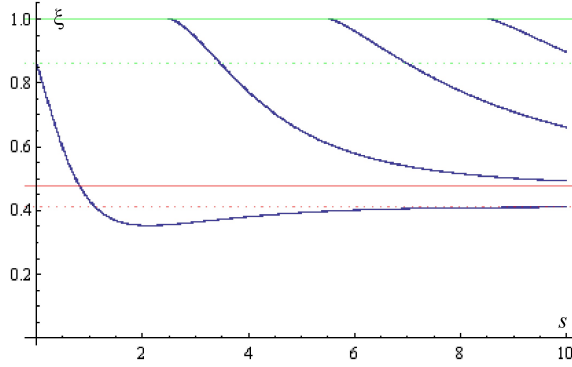
Фиг. 4

На фиг. 4а, 4б показаны графики зависимости квадрата фазовой скорости  $\xi$  поверхностных волн от  $s$  для различных значений параметра  $\mu_* = 0.5, 1, 2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ , при  $\theta = 0.8$  и  $\theta = 1.2$  соответственно. При  $\xi = \xi_{R2}$  все графики пересекаются в одной точке, что подтверждает тот факт, что в этом случае дисперсионное уравнение (11) не зависит от  $\mu_*$ .

II) Пусть теперь,  $1 - \xi\theta < 0$ ;  $1 - \xi\theta\eta_1 > 0$   
 $\text{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta}) = \text{itg}(kh\sqrt{\xi\theta - 1})$ ;  $\text{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta\eta_1}) \sim 1$   
из (11) следует

$$\begin{aligned} \text{tg}\left(s\sqrt{\xi\theta - 1}\right) &= \\ &= \frac{\sqrt{\xi\theta - 1}\nu_{1,1}\left(2\mu_*\beta_1^2\nu_{2,1} + \theta\nu_{1,1}\left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\right)}{\mu_*\left(1 + \beta_1^4\right)\nu_{2,1} + \mu_*\xi^2\theta^2\eta_1\nu_{2,1} + \theta\left(-\mu_*\xi\left(1 + \eta_1\right)\nu_{2,1} + \beta_1^2\nu_{1,1}\left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\right)} \end{aligned} \quad (18)$$

В этом случае получается бесконечное число мод поверхностных волн

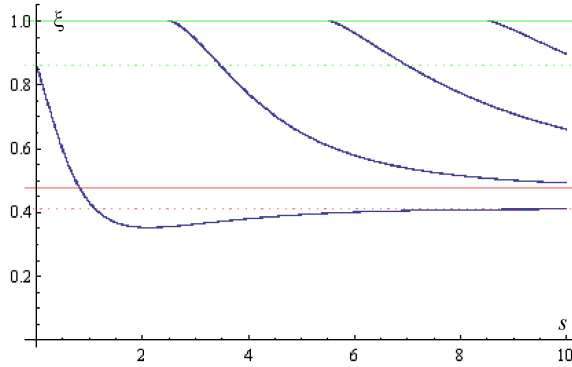


Фиг. 5: Зависимость  $\xi$  от  $s$  при  $\mu = 1$ ;  $\theta = 2$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

На фиг 5 приведены графики зависимости квадрата фазовой скорости  $\xi$  от параметра  $s$ . Эти графики напоминают графики волн Лява [4]. В отличие от волн Релея скорости распространения этих мод зависят от длины волны, т.е. имеет место дисперсия.

III) при  $1 - \xi\theta < 0$ ;  $1 - \xi\theta\eta_1 < 0$  не удаётся получить аналитическую формулу для фазовой скорости. На фиг (6) приведены графики зависимости фазовой скорости поверхностных волн от  $s = kh$ , представляющего волновое число.

При  $c_{t,1} < c_{t,2}$  с увеличением  $s$  количество мод поверхностных волн увеличивается.



Фиг. 6: Зависимость  $\xi$  от  $s$  при  $\mu_* = 1$ ;  $\theta = 6$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

Очевидно, что решение задачи в каждом из рассмотренных случаев определяется с точностью до постоянного множителя. Немалый интерес представляет изменение перемещений вдоль оси  $Oz$ , однако, как известно, в общем случае их вычислить невозможно. Учитывая, что для волны с волновым числом  $k$  всегда

выполняется равенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \left( \int_{-h}^0 E_P^{(1)} dz + \int_0^{\infty} E_P^{(2)} dz \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \left( \int_{-h}^0 E_K^{(1)} dz + \int_0^{\infty} E_K^{(2)} dz \right) dx$$

где

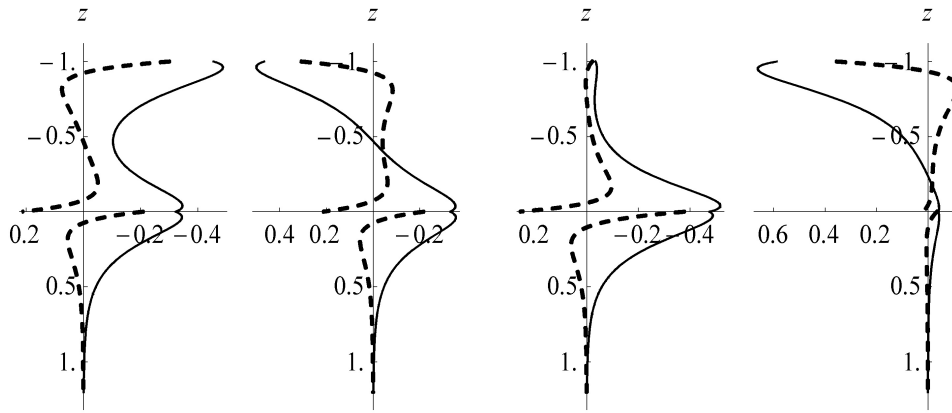
$$E_K^{(j)} = \rho_j \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u^{(j)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^{(j)}}{\partial t} \right)^2 \right) - \text{удельная кинетическая энергия,}$$

$$E_P^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \sigma_{l,m}^{(j)} \varepsilon_{l,m}^{(j)} - \text{потенциальная энергия,}$$

произвольный множитель в решении выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \left( \int_{-h}^0 E_P^{(1)} dz + \int_0^{\infty} E_P^{(2)} dz \right) dx = 1 \quad (19)$$

Вычисленные таким образом перемещения назовем нормализованными. На фиг. 7 представлены нормализованные перемещения, соответствующие данным Фиг.2(б).



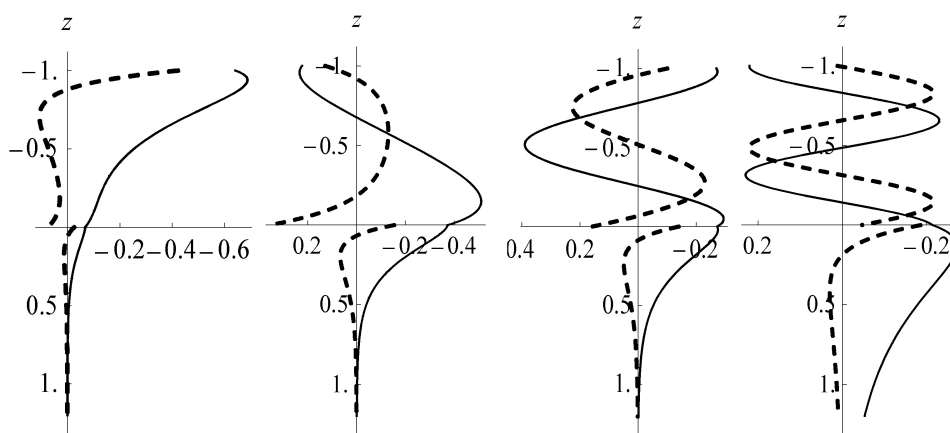
Фиг. 7: Нормализованные перемещения  $u$  (пунктир) и  $w$  (сплошная линия) по оси  $z$  при  $s = 15$  и  $\xi = \{0.857, 0.862\}$  для правой пары графиков и  $\xi = \{0.85, 0.89\}$  - для левой пары.

Левая пара графиков Фиг.7 показывает, что вследствие близости скоростей распространения волн вдоль свободной границы слоя и линии скольжения, перемещения точек слоя стремятся к симметричному и кососимметричному, относительно середины слоя, распределению, в то время как во втором случае (правая пара) явно выделяются две волны, распространяющиеся вдоль свободной границы слоя и по линии раздела материалов. При этом график на Фиг. 2(б),



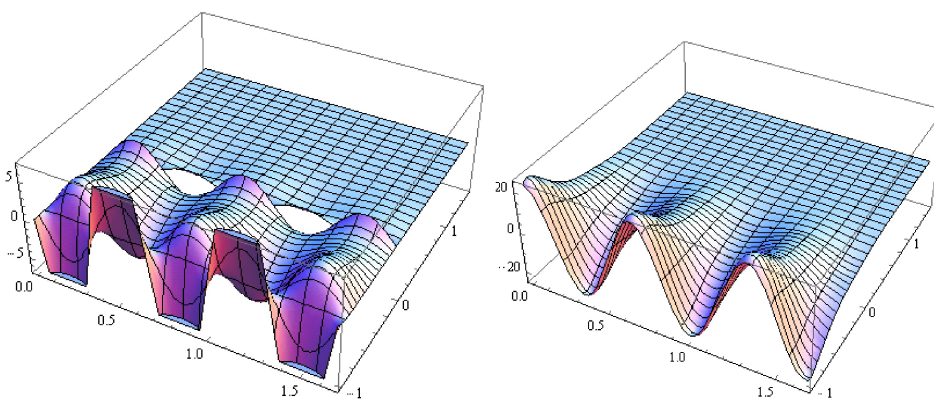
расположенный ниже, соответствует волне, распространяющейся по линии раздела материалов, а график, расположенный выше, - волне, распространяющейся вдоль свободной границы слоя.

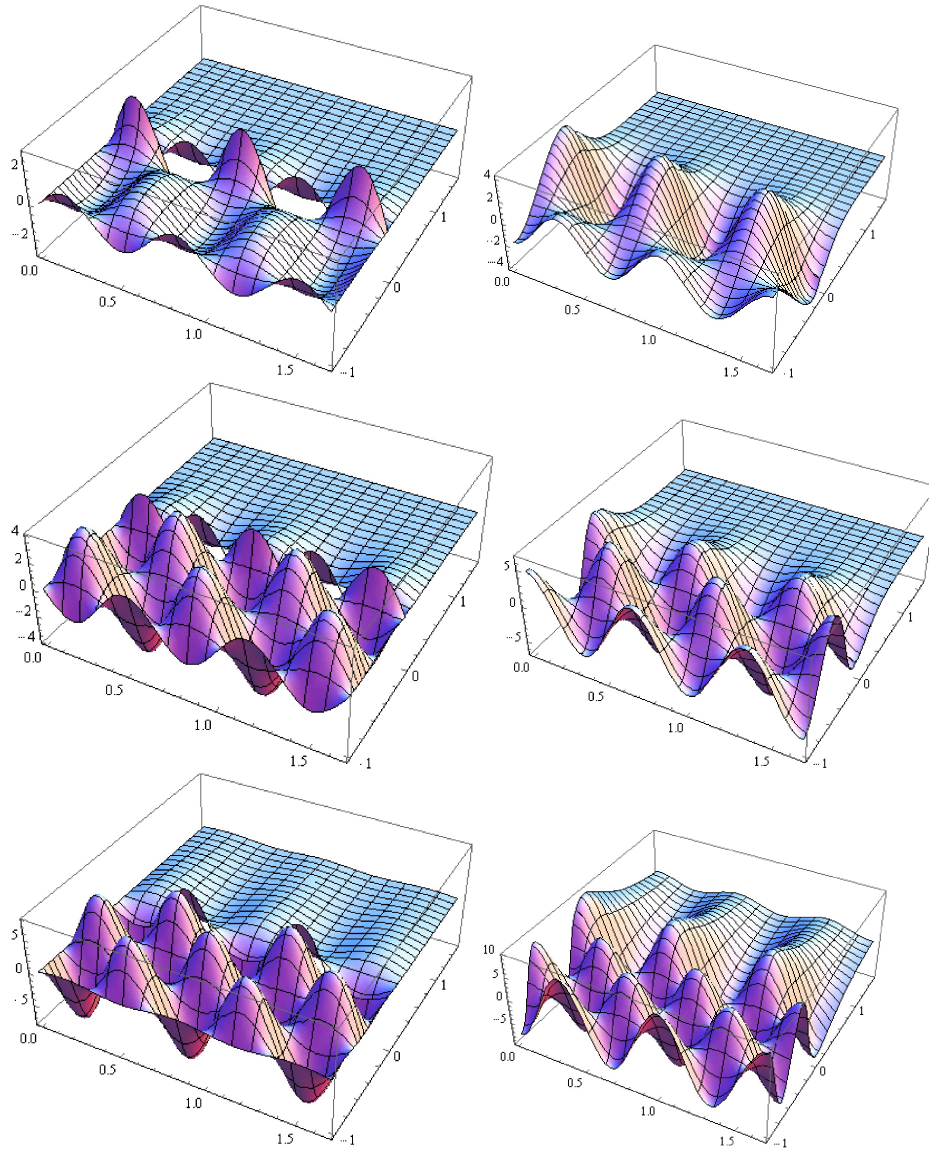
На Фиг.8 представлены нормализованные перемещения  $u$  и  $w$  по оси  $z$  вглубь полуплоскости для четырёх мод волны.



Фиг. 8: Нормализованные перемещения  $u$  (пунктир) и  $w$  (сплошная линия) по оси  $z$  для четырёх мод волны при  $s = 9.5$  и  $\xi = \{0.43, 0.55, 0.711, 0.96\}$

Для наглядности на Фиг.9 приведены также рельефные картины, соответствующие графикам на Фиг.8.





Фиг. 9: Рельефы перемещений  $u$  (слева) и  $w$  (справа) для четырёх мод.

Численный анализ показывает, что при увеличении  $s$  энергия волн переходит от полуплоскости к слою. При этом для волны, распространяющейся со скоростью, близкой к скорости Рэлея в слое  $\xi_{R,1}$ , максимальное значение энергии достигается около наружной поверхности слоя  $z = -h$ , а в случае волны, распространяющейся со скоростью, близкой к скорости  $\xi = \xi_0$ , энергия концентрируется вблизи поверхности  $z = 0$ . Для остальных мод волн энергия распределяется в

слое более равномерно.

## б. Защемлённая поверхность

$$u^{(1)} = 0, w^{(1)} = 0$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$4\theta\nu_{1,1} (\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}) (\nu_{1,1}\nu_{1,2} \operatorname{th} [s\nu_{1,1}] - \operatorname{th} [s\nu_{1,2}]) + \\ + \mu_*\nu_{2,1} \left( \left( (1 + \nu_{1,2}^2)^2 + 4 - 8 \operatorname{sech} [s\nu_{1,1}] \operatorname{sech} [s\nu_{1,2}] \beta_1 \right) \nu_{1,1}\nu_{1,2} - \right. \\ \left. - 4 (\beta_1^2 + \nu_{1,1}^2\nu_{1,2}^2) \operatorname{th} [s\nu_{1,1}] \operatorname{th} [s\nu_{1,2}] \right) = 0 \quad (20)$$

При  $s \ll 1$

$$\theta^2\nu_{1,1}\nu_{1,2}\xi (\mu_*\xi\nu_{2,1} - 4\eta_1 (\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}) s + \mu_*\xi\nu_{2,1} (1 - 2\eta_1) s^2) + O(s^3) = 0 \quad (21)$$

При  $s \rightarrow 0$  получается тривиальное решение  $\xi = 0$ , а это означает, что при защемлённой внешней границе слоя, длинные относительно толщины слоя поверхностные волны отсутствуют. При  $s \gg 1$

Если  $1 - \xi\theta > 0$ , то  $\operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta}) \sim \operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta\eta_1}) \sim 1$  и из (21) получаем

$$-4(1 - \nu_{1,1}\nu_{1,2}) (\mu_* (\beta_1^2 - \nu_{1,1}\nu_{1,2}) \nu_{2,1} + \theta\nu_{1,1} (\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2})) = 0.$$

Равенство нулю первого множителя  $1 - \nu_{1,1}\nu_{1,2} = 0$ , приводит к значению

$$\xi = \frac{1 + \eta_1}{\theta\eta_1} \quad (22)$$

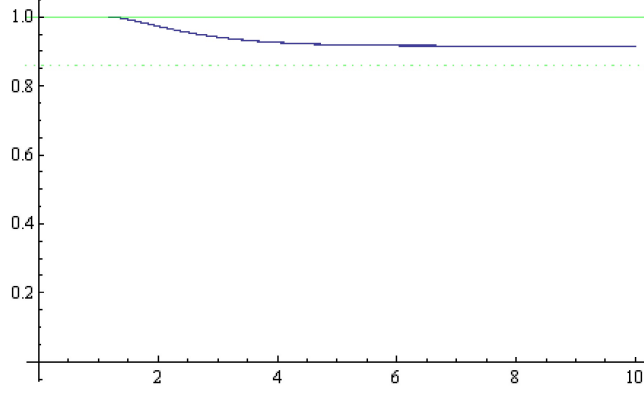
которое не удовлетворяет условию  $1 - \xi\theta > 0$ .

Приравнивая к нулю второй множитель, приходим к уравнению

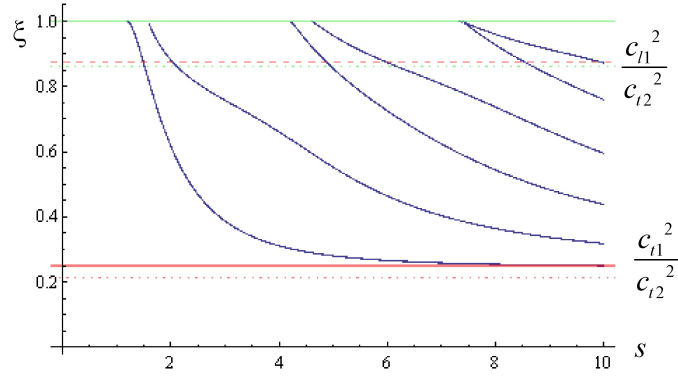
$$\mu_* (\beta_1^2 - \nu_{1,1}\nu_{1,2}) \nu_{2,1} + \theta\nu_{1,1} (\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}) = 0, \quad (23)$$

которое было исследовано выше. Отметим, что при  $\theta \leq 1$  в зависимости от значений других параметров либо поверхностной волны не существует, либо распространяется одна поверхностная волна, в то время как при  $\theta > 1$  существует бесконечное число мод поверхностных волн.

На Фиг.10 и Фиг.11 приведены графики зависимости квадрата фазовой скорости  $\xi$  от параметра  $s$  в случае одной волны при  $\theta \leq 1$  и в случае  $\theta > 1$  соответственно.



Фиг. 10: Зависимость  $\xi$  от  $s$  при  $\mu_* = 1.5$ ;  $\theta = 4$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$



Фиг. 11: Зависимость  $\xi$  от  $s$  при  $\mu_* = 1$ ;  $\theta = 0.85$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

**в. Условие симметрии (условие анти Навье).**

$$w^{(1)} = 0, \quad \sigma_{31}^{(1)} = 0$$

Дисперсионное уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \theta \nu_{1,1} (\beta_2^2 - \nu_{2,1} \nu_{2,2}) \operatorname{th}(s \nu_{1,1}) \operatorname{th}(s \nu_{1,2}) + \\ & + \mu_* \nu_{2,1} (\beta_1^2 \operatorname{th}(s \nu_{1,2}) - \nu_{1,1} \nu_{1,2} \operatorname{th}(s \nu_{1,1})) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

При  $s \ll 1$

$$\nu_{1,2} \theta s \left( \mu_* \xi \left( \frac{\xi c_0}{4} - (1 - \theta_1) \right) \nu_{2,1} + \nu_{1,1}^2 (\beta_2^2 - \nu_{2,1} \nu_{2,2}) s \right) = 0 \quad (25)$$

откуда

$$\xi = \xi_S - \frac{(1 - 2\eta_1)^2 \left( (1 - \xi_S/2)^2 - \sqrt{1 - \xi_S} \sqrt{1 - \xi_S \eta_2} \right)}{\mu_* (1 - \eta_1) \sqrt{1 - \xi_S \eta_2}} s + O(s^2)$$

Что совпадает с (14) в первом приближении.

#### г. Условие антисимметрии (условие Навье)

$$u^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\theta \nu_{1,1} (\beta_2^2 - \nu_{2,1} \nu_{2,2}) + \mu_* \nu_{2,1} (\beta_1^2 \operatorname{th} [s \nu_{1,1}] - \nu_{1,2} \nu_{1,1} \operatorname{th} [s \nu_{1,2}]) = 0 \quad (26)$$

При  $s \ll 1$

$$\nu_{1,1} \theta \left( \frac{1}{4} s \mu_* \xi^2 \theta \nu_{2,1} + (\beta_2^2 - \nu_{2,1} \nu_{2,2}) \right) = 0 \quad (27)$$

откуда  $\xi = \xi_{R2} + \frac{\mu_* \theta \xi_{R2}^2 \sqrt{1 - \eta_2 \xi_{R2}} (4 - 4\xi_{R2} + \xi_{R2}^2)}{2(4 - 4\eta_2 - 12\xi_{R2} + 8\eta_2 \xi_{R2} + 6\xi_{R2}^2 - \xi_{R2}^3)} s + O(s^2)$  совпадает с (10) в первом приближении.

Проведенный для последних двух случаев граничных условий на внешней границе слоя численный анализ показал, что картина распространения волн вдоль линии раздела материалов подобна картинам, представленным выше для случая свободной внешней границы слоя.

## Заключение

Исследован вопрос существования поверхностных волн в системе слоев – полуплоскость, когда на линии стыка имеют место условия скольжения. Выяснено, что при  $s \gg 1$  (когда длина волны намного меньше толщины слоя) и  $\xi < \min(\frac{1}{\theta}, 1)$  поверхностная волна, распространяющаяся вдоль линии раздела материалов  $z = 0$  и имеющая скорость  $\xi_0$ , существует при всех четырех граничных условиях на поверхности слоя  $z = -h$ .

При  $s \gg 1$  и  $\theta > 1$  для любого  $\xi$  из  $1/\theta < \xi < 1$  существует бесконечное множество волновых чисел  $k$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению.

При  $s \ll 1$  (длинные волны) волна, которая распространяется вдоль линии  $z = 0$  и имеет скорость  $\xi_S$ , существует только в случаях свободной поверхности слоя и при условии симметрии на внешней границе.

Волна, которая распространяется вдоль линии  $z = 0$  и имеет скорость, определяемую формулой (13), распространяется при граничных условиях свободной поверхности и условиях антисимметрии на границе слоя.

При длинных волнах энергия волны главным образом распределена в полуплоскости, а при увеличении  $s$ , т.е. для коротких волн, она переходит в слой.

## Литература

- [1] Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space. // Pure and Applied Geophysics. 1971. V 86. №3. P 69-79.
- [2] Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полуплоскостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т 2. С 31-37.
- [3] Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С. 120-121.
- [4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
- [5] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М. Изд АН СССР 1957. 502 с.
- [6] Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела." Ереван: Изд. НАН Армении 1997. С. 79-96.
- [7] Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. Механика, 58, №2, 2005. Ереван, Изд. НАН Армении. С.9-15.
- [8] Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с усиливающим тонким полубесконечным упругим слоем. Труды V международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды", 2-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, Ер.: НУАСА, 2017, с. 69-70.
- [9] Ардашишвили Р В. Влияние закрепления лицевых поверхностей на демпфирование антисимметричных кромочных волн высшего порядка в пластинах. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике. Казань, 20-24 августа 2015г с 198-200

**Сведения об авторах**

**Амирджанян Арутюн Арменович** - к.ф.-м.н., научный сотрудник . Института механики НАН РА.

**Тел.:** (37410) 27-62-23

**Email:** [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

**Белубекян Мелс Вагаршакович** - к.ф.-м.н., гл.н.с. Института механики НАН РА

**Геворкян Гнун Завенович** - к.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА

**Email:** [gnungev2002@yahoo.com](mailto:gnungev2002@yahoo.com)

**Дарбинян Артавазд Завенович** -к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА

**Email:** [darbinyan\\_1954@mail.ru](mailto:darbinyan_1954@mail.ru)

Поступила в редакцию 14.12.2020