ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 1, 2021 Механика

УДК 517.977: 534.112 http://doi.org/10.33018/74.1.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Барсегян В. Р.

Ключевые слова: колебания струны, граничное управление, оптимальное управление колебаниями, промежуточные условия, разделение переменных

Optimal boundary control of string vibrations with given values of the velocities of the points at the intermediate moments of time

Barseghyan V. R.

Keywords: string vibrations, boundary control, optimal control of vibrations, intermediate conditions, separation of variables

We consider the problem of optimal boundary control for the equation of string vibrations with given initial and final conditions and given velocities of the points of the string at intermediate moments of time and with a quality criterion specified over the entire time interval. Using the method of separation of variables and methods of optimal control theory with multipoint intermediate conditions, optimal boundary controls are constructed for arbitrary numbers of the first harmonics. As an application of the proposed constructive approach, an optimal boundary control is constructed with given values of the velocities of the points of the string at some intermediate moments of time.

Եզրային տեղափոխություններով լարի փափանումների օպտիմալ ղեկավարումը, երբ ժամանակի միջանկյալ պահերին տրված են լարի կետերի արագությունները

Բարսեղյան Վ. Ռ.

Հիմնաբառեր. լարի տատանում, եզրային ղեկավարում, տատանումների օպտիմալ ղեկավարում, միջանկյալ պայմաններ, փոփոխականների անջատում

Դիտարկված է տրված սկզբնական և վերջնական պայմաններով, ժամանակի միջանկյալ պահերին լարի կետերի արագությունների տրված արժեքներով եզրերի տեղափոխություններով տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ որակի հայտանիշը տրված է ամբողջ ժամանակահատվածի վրա: Փոփոխականների անջատման և միջանկյալ բազմակետային պայմաններով օպտիմալ ղեկավարման տեսությունների կիրառմամբ առաջին կամայական թվով հարմոնիկների համար կառուցված է օպտիմալ եզրային ղեկավարումները: Որպես առաջարկված կոնստրուկտիվ մոտեցման կիրառություն կառուցված է օպտիմալ եզրային ղեկավարումը, երբ ժամանակի միջանկյալ որևէ պահի տրված են լարի կետերի արագությունները:

Рассматривается задача оптимального граничного управления для уравнения колебаниями струны с заданными начальным, конечным условиями и задаными скоростями точек струны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Используя метод разделения переменных и методы теории оптимального управления с многоточечными промежуточными условиями, для произвольных чисел первых гормоник построены оптимальные граничные управления. В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено граничное оптимальное управление с заданным значением скоростей точек струны в некотором промежуточном моменте времени.

Введение

Управляемые колебательные системы широко распространены в различных теоретических и прикладных областях науки. Необходимость управления и оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями, является актуальной задачей, решению которой уделяют внимание многие исследователи [1-14]. На практике часто возникают задачи граничного управления и оптимального управления, в частности, когда нужно сгенерировать с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами (формой прогиба, скоростью точек струны и т.д.) колебания. Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. К исследованиям таких задач посвящены, в частности, работы [8-16]. В работе [12] рассмотрена задача оптимального граничного управления колебаниями струны со смещением одного конца при закрепленном другом конце с заданными ограничениями в промежуточные моменты времени. В работе [13] предложен конструктивный подход построения граничного управления колебаниями струны с заданными начальным и конечным условиями, который позволяет установить в промежуточные моменты времени заданные значения функции прогиба. Данная работа примыкает к работам [12, 13].

Цель данной статьи состоит в разработке конструктивного подхода построения функции оптимального граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями скоростей точек струны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями и, используя метод разделения переменных, полученная задача сводится к задаче оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями. Методом проблем моментов для произвольных чисел первых гормоник построены оптимальные граничные управления. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

1 Постановка задачи

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q\,(x,t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.3}$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ - граничные управления.

В уравнении (1.1) $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, где T_0 - натяжение струны, ρ - плотность однородной струны. Предполагается, что функция $Q\,(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где множество $\Omega_T = \{(x,t):\ x \in [0,l]\,,\ t \in [0,T]\}$.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, ..., m)$,

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения функции прогиба струны

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, ..., m. \tag{1.4}$$

Задача граничного оптимального управления колебаниями струны с заданными значениями производной функции прогиба (скоростей точек струны) в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$, требуется найти оптимальные управления, переводящие систему из заданного начального состояния (1.2), удовлетворяя промежуточным условиям (1.4), в конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leq x \leq l \tag{1.5}$$

и минимизирующие функционал

$$\int\limits_0^T \left(\mu^2(t) + \nu^2(t)\right) dt. \tag{1.6}$$

Будем предполагать, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_T(x)$ принадлежат пространству

$C^2[0,l]$, а функции $\psi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, m, m{+}1)$ принадлежат пространству $C^1[0,l]$. Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования, которые приведены ниже.

Отметим, что так как в отдельные промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m)$ заданы только значения производной функции прогиба (1.4) струны, то использовать подход поэтапного решения задачи оптимального управления не целесообразно. Поэтому в работе предлагается такой подход решения рассмотренной задачи оптимального управления, в котором учитывается специфика промежуточных условий (1.4).

2 Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями

Так как граничные условия (1.3) неоднородны, решение поставленной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде суммы

$$Q(x,t) = V(x,t) + W(x,t) \tag{2.1}$$

где $V(x,t)$ - неизвестная функция с однородными граничными условиями

$$V(0,t) = V(l,t) = 0 \tag{2.2}$$

и предстоящая определению, а $W(x,t)$ - решение уравнения (1.1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t). \tag{2.3}$$

Функция $W(x,t)$ имеет вид

$$W(x,t) = (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l} + \mu(t). \tag{2.4}$$

Подставив (2.1) в (1.1) и учитывая (2.4), получим уравнение для функции $V(x,t)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{2.5}$$

где

$$F(x,t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t))\frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t). \tag{2.6}$$

В силу начальных, промежуточных и граничных условий, соответственно (1.2), (1.4) и (1.5), функция должна удовлетворять следующим начальным условиям

$$\begin{aligned} V(x,0) &= \varphi_0(x) - (\nu(0) - \mu(0))\frac{x}{l} - \mu(0), \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi_0(x) - (\dot{\nu}(0) - \dot{\mu}(0))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(0), \end{aligned} \tag{2.7}$$

промежуточным условиям

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x) - (\dot{\nu}(t_i) - \dot{\mu}(t_i))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(t_i), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.8}$$

и конечным условиям

$$\begin{aligned} V(x,T) &= \varphi_T(x) - (\nu(T) - \mu(T))\frac{x}{l} - \mu(T), \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} &= \psi_T(x) - (\dot{\nu}(T) - \dot{\mu}(T))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(T). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Из условий (2.7) - (2.9), с учетом (2.2), получим следующие условия согласования

$$\mu(0) = \varphi_0(0), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(0), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot{\nu}(0) = \psi_0(l), \tag{2.10}$$

$$\dot{\mu}(t_i) = \psi_i(0), \quad \dot{\nu}(t_i) = \psi_i(l), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.11}$$

$$\mu(T) = \varphi_T(0), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(0), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot{\nu}(T) = \psi_T(l). \tag{2.12}$$

Следовательно, с учетом условий (2.10)-(2.12), условия (2.7)-(2.9) запишутся следующим образом, соответственно:

$$\begin{aligned} V(x,0) &= \varphi_0(x) - (\varphi_0(l) - \varphi_0(0))\frac{x}{l} - \varphi_0(0), \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi_0(x) - (\psi_0(l) - \psi_0(0))\frac{x}{l} - \psi_0(0), \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x) - (\psi_i(l) - \psi_i(0))\frac{x}{l} - \psi_i(0), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} V(x,T) &= \varphi_T(x) - (\varphi_T(l) - \varphi_T(0))\frac{x}{l} - \varphi_T(0), \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} &= \psi_T(x) - (\psi_T(l) - \psi_T(0))\frac{x}{l} - \psi_T(0). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Таким образом, решение задачи оптимального граничного управления колебаниями струны с заданными значениями производной функции прогиба в промежуточные моменты времени сведена к задаче управления (2.5), (2.6) с граничными условиями (2.2) и минимизируемым функционалом (1.6), которая формулируется следующим образом: требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$ при $0 \le t \le T$, переводящие колебание, описываемое уравнением (2.5) с граничными условиями (2.2) из заданного начального состояния (2.13) через промежуточные состояния (2.14) в конечное состояние (2.15) и минимизирующие функционал (1.6).

3 Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов

Учитывая, что в задаче (2.5), (2.6) граничные условия (2.2) однородны, предположение выполнения условий согласованности (2.10)-(2.12) и принадлежность используемых функций указанным соответствующим пространствам, согласно теории рядов Фурье, решение уравнения (2.5) ищем в виде

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad \text{где} \quad V_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l V(x,t) \sin \frac{\pi k}{l} x dx. \tag{3.1}$$

Представим функции $F(x,t)$, $\psi_i(x)$, $(i = 0, 1, \ldots, m+1)$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_T(x)$ в виде рядов Фурье и, подставив их выражения вместе с $V(x,t)$ из (3.1) в уравнения (2.5), (2.6) и в условия (2.13)-(2.15), получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a\pi k}{l} \right)^2, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} V_k(0) &= \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \left[\varphi_0(0) - \varphi_0(l)(-1)^k \right], \\ \dot{V}_k(0) &= \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \left[\psi_0(0) - \psi_0(l)(-1)^k \right], \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\dot{V}_k(t_i) = \psi_k^{(i)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \left[\psi_i(0) - \psi_i(l)(-1)^k \right], \quad i = 1 \ldots, m, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} V_k(T) &= \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \left[\varphi_T(0) - \varphi_T(l)(-1)^k \right], \\ \dot{V}_k(T) &= \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \left[\psi_T(0) - \psi_T(l)(-1)^k \right], \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$F_k(t) = \frac{2a}{\lambda_k l} \left[\ddot{\nu}(t)(-1)^k - \ddot{\mu}(t) \right]. \tag{3.6}$$

Здесь через $\psi_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, m, m+1)$, $\varphi_k^{(0)}$ и $\varphi_k^{(T)}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответственно функциям $\psi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, m, m+1)$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_T(x)$.

Общее решение уравнения (3.2) с начальными условиями (3.3) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau. \tag{3.7}$$

Теперь учитывая промежуточные (3.4) и конечные (3.5) условия, из (3.7) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T F_k(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{1k}(T),\\
&\int\limits_0^T F_k(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{2k}(T), \qquad (3.8)\\
&\int\limits_0^{t_j} F_k(\tau)\cos\lambda_k(t_j-\tau)d\tau = \tilde{C}_{2k}(t_j), \quad j=1,\ldots,m,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k T,\\
\tilde{C}_{2k}(T) &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k T, \qquad (3.9)\\
\tilde{C}_{2k}(t_j) &= \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t_j - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t_j.
\end{aligned}$$

Подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (3.6) в (3.8) и интегрируя по частям, с учетом условий (2.10)-(2.12), получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T),\\
&\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T),\\
&\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(1)}(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)g_k^{(1)}(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_1), \qquad (3.10)\\
&\ldots\\
&\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(m)}(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)g_k^{(m)}(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_m), \quad k=1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k}\right],\\
C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k}\right], \qquad (3.11)\\
C_{2k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} - (-1)^k Y_{2k}^{(j)}\right], \quad j=1,\ldots,m,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&X_{1k} = \lambda_k \varphi_T(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(0)\cos\lambda_k T,\\
&X_{2k} = \psi_T(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(0)\sin\lambda_k T,\\
&Y_{1k} = \lambda_k \varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k T,\\
&Y_{2k} = \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k T,\\
&X_{2k}^{(j)} = \psi_j(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k\varphi_0(0)\sin\lambda_k t_j,\\
&Y_{2k}^{(j)} = \psi_j(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k t_j,\\
&g_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases}\cos\lambda_k(t_j-\tau), & 0\le\tau\le t_j,\\ 0, & t_j<\tau\le T,\end{cases} \quad j=1,\ldots,m.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Из соотношения (3.10) следует, что для каждой гармоники движение (т.е. для каждого $k = 1, 2, \ldots$), описываемое уравнением (3.2), (3.6) с условиями (3.3)-(3.5) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любых заданных значений постоянных $C_{1k}(T), C_{2k}(T), C_{2k}(t_1), \ldots, C_{2k}(t_m)$ в (3.11) можно найти управление $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющее условию (3.10).

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&H_k(\tau) = \begin{pmatrix}
\sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\
\cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\
g_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(1)}(\tau)\\
\cdots & \cdots\\
g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(m)}(\tau)
\end{pmatrix},\\
&C_k(t_1,\ldots,t_m,T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T)\\ C_{2k}(T)\\ C_{2k}(t_1)\\ \vdots\\ C_{2k}(t_m)\end{pmatrix}, \quad U(\tau) = \begin{pmatrix}\mu(\tau)\\ \nu(\tau)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Тогда соотношение (3.10) запишется следующим образом

$$
\int_0^T H_k(\tau)U(\tau)d\tau = C_k(t_1,\ldots,t_m,T), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.14}
$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (3.14).

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению таких граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, которые для каждого $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют интегральным соотношениям (3.10) (или (3.14)) и доставляют минимум функционалу (1.6). Задачу оптимального управления при функционале (1.6) с интегральными условиями (3.10) (или (3.14)) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления.

4 Решение задачи

Так как функционал (1.6) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, а интегральные соотношения (3.10) (или (3.14)), порожденные функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, линейны, то задачу определения оптимального управления для каждого $k = 1, 2, \ldots$ можно рассматривать как проблему моментов [1, 15, 17]. Следовательно, решение можно построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов.

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник упругих колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерыми системами. Поэтому построим решение задачи (1.6) и (3.10) при $k = 1, 2, \ldots, n$ с помощью алгоритма решения проблемы моментов. Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \ldots, n$) проблемы моментов (1.6) и (3.10), следуя [17], нужно найти величины p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^{n}\left[p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}C_{1k}(t_i)\right] = 1, \tag{4.1}$$

для которых

$$\left(\rho_n^0\right)^2 = \min_{(4.1)} \int_0^T \left[h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau)\right] d\tau, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} h_{1n}(\tau) &= \sum_{k=1}^{n}\left[p_k \sin\lambda_k\left(T-\tau\right) + q_k\cos\lambda_k\left(T-\tau\right) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}g_k^{(i)}(\tau)\right], \\ h_{2n}(\tau) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[p_k \sin\lambda_k\left(T-\tau\right) + q_k\cos\lambda_k\left(T-\tau\right) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}g_k^{(i)}(\tau)\right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для определения величин p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, минимизирующих (4.2), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$\begin{aligned} f_n = &\int_0^T \left[(h_{1n}(\tau))^2 + (h_{2n}(\tau))^2\right] d\tau + \\ &+ \beta_n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}C_{1k}(t_i)\right) - 1\right], \end{aligned}$$

где β_n - неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$ функции f_n и приравнивая к нулю, с учетом обозначения (4.3), (3.12) и присоединяя к полученным уравнениям условие (4.1), получим замкнутую систему $2n+mn+1$ алгебраических уравнений относительно стольких же неизвестных величин p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, $i =$

$1, \ldots, m$ и β_n:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j \left[a_{jk} p_j + b_{jk} q_j + \sum_{\alpha=1}^{m} c_{\alpha k}^{(\alpha)} \gamma_{\alpha j} \right] = -\frac{\beta_n}{2} C_{1k}(T),$$

$$\sum_{j=1}^{n} I_j \left[d_{jk} p_j + e_{jk} q_j + \sum_{\alpha=1}^{m} f_{\alpha k}^{(\alpha)} \gamma_{\alpha j} \right] = -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}(T), \tag{4.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} I_j \left[a_{jk}^{(i)} p_j + b_{jk}^{(i)}{}_{jk} q_j + \sum_{\alpha=1}^{m} g_{\alpha k}^{(\alpha i)} \gamma_{\alpha j} \right] = -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}(t_i),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} C_{2k}(t_i) \right] = 1,$$

$$k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где

$$a_{jk} = \int_0^T \sin \lambda_j (T - \tau) \sin \lambda_k (T - \tau) \, d\tau, \quad b_{jk} = \int_0^T \cos \lambda_j (T - \tau) \sin \lambda_k (T - \tau) \, d\tau,$$

$$c_{jk}^{(\alpha)} = \int_0^T g_j^{(\alpha)} (\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) \, d\tau, \quad d_{jk} = \int_0^T \sin \lambda_j (T - \tau) \cos \lambda_k (T - \tau) \, d\tau,$$

$$e_{jk} = \int_0^T \cos \lambda_j (T - \tau) \cos \lambda_k (T - \tau) \, d\tau, \tag{4.5}$$

$$a_{jk}^{(i)} = \int_0^T \sin \lambda_j (T - \tau) \, g_k^{(i)} (\tau) \, d\tau, \quad b_{jk}^{(i)} = \int_0^T \cos \lambda_j (T - \tau) \, g_k^{(i)} (\tau) \, d\tau,$$

$$f_{jk}^{(\alpha)} = \int_0^T g_j^{(\alpha)} (\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) \, d\tau, \quad g_{jk}^{(\alpha i)} = \int_0^T g_j^{(\alpha)} (\tau) \, g_k^{(i)} (\tau) \, d\tau.$$

Пусть величины p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$ и β_n^0, являются решением замкнутой системы алгебраических уравнений (4.4). Тогда, согласно (4.3), (4.2) будем иметь

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left[p_k^0 \sin \lambda_k (T - \tau) + q_k^0 \cos \lambda_k (T - \tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 g_k^{(i)}(\tau) \right],$$

$$h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[p_k^0 \sin \lambda_k (T - \tau) + q_k^0 \cos \lambda_k (T - \tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 g_k^{(i)}(\tau) \right], \tag{4.6}$$

$$
\left(\rho_n^0\right)^2=\int_0^T\left[\left(h_{1n}^0(\tau)\right)^2+\left(h_{2n}^0(\tau)\right)^2\right]d\tau .
$$

Следуя [17], оптимальные граничные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ для любого $n=1,2,\ldots$ представятся в виде:

$$
\mu_n^0(\tau)=\frac{1}{\left(\rho_n^0\right)^2}h_{1n}^0(\tau),\quad \nu_n^0(\tau)=\frac{1}{\left(\rho_n^0\right)^2}h_{2n}^0(\tau).
$$

Таким образом, оптимальные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$, $\tau\in[0,T]$, согласно формулам (3.12) и (4.6), записываются в виде:

$$
\mu_n^0(\tau)=\begin{cases}
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\gamma_{ik}^0\cos\lambda_k\left(t_i-\tau\right)\right], & 0\le\tau\le t_1\\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right)+\sum\limits_{i=2}^{m}\gamma_{ik}^0\cos\lambda_k\left(t_i-\tau\right)\right], & t_1<\tau\le t_2\\
\quad\ldots\\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right)+\gamma_{mk}^0\cos\lambda_k\left(t_m-\tau\right)\right], & t_{m-1}<\tau\le t_m\\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right), \quad t_m<\tau\le t_{m+1}=T
\end{cases}
$$

$$
\nu_n^0(\tau)=\begin{cases}
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right)+\sum\limits_{i=1}^{m}\gamma_{ik}^0\cos\lambda_k\left(t_i-\tau\right)\right],\\
\qquad\qquad 0\le\tau\le t_1\\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right)+\sum\limits_{i=2}^{m}\gamma_{ik}^0\cos\lambda_k\left(t_i-\tau\right)\right],\\
\qquad\qquad t_1<\tau\le t_2\\
\quad\ldots\\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right)+\gamma_{mk}^0\cos\lambda_k\left(t_m-\tau\right)\right],\\
\qquad\qquad t_{m-1}<\tau\le t_m\\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right), \quad t_m<\tau\le t_{m+1}=T
\end{cases}
$$

где $G_k\left(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\right)=\left[p_k^0\sin\lambda_k\left(T-\tau\right)+q_k^0\cos\lambda_k\left(T-\tau\right)\right]$.

Теперь построим функцию прогиба, соответствующую оптимальным управлениям $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$. Подставляя полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ в (3.6), а полученное для $F_k^0(t)$ выражение – в (3.7), получим функцию $V_k^0(t)$, $t\in[0,T]$, $k=1,\ldots,n$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь

$$
V_n^0(x,t)=\sum_{k=1}^{n}V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{4.7}
$$

а из (2.4) функция $W_n^0(x,t)$ имеет вид

$$W_n^0(x,t) = (\nu_n^0(t) - \mu_n^0(t))\frac{x}{l} + \mu_n^0(t). \tag{4.8}$$

Таким образом, согласно (2.1), для первых n гармоник оптимальная функция прогиба струны $Q_n^0(x,t)$, с учетом (4.7) и (4.8) запишется в виде

$$Q_n^0(x,t) = V_n^0(x,t) + W_n^0(x,t). \tag{4.9}$$

5 Построение решения в случае $m = 1$

Для иллюстрации вышеизложенного предположим, что в граничных условиях (1.3) $Q(l,t) = 0$, $0 \le t \le T$ (т.е. $\nu(t) = 0$), и в промежуточный момент времени t_1 $(0 = t_0 < t_1 < t_2 = T)$ заданы значения скоростей точек струны в виде:

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_1} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{5.1}$$

В этом случае из формулы (3.6) следует $F_k(t) = -\frac{2a}{\lambda_k l}\ddot{\mu}(t)$, а согласно формулам (3.10) будем иметь следующие интегральные соотношения

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T), \\
\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T), \\
\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_1),
\end{gathered} \tag{5.2}$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k}\right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k}\right],$$

$$C_{2k}(t_1) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_1) + X_{2k}^{(1)}\right].$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(t_1)$ определяются из формулы (3.9), а X_{1k}, X_{2k}, $X_{2k}^{(1)}$ из (3.12).

Применяя вышепредложенный подход, построим оптимальное граничное управление $\mu_n^0(\tau)$ при $n = 1$ (следовательно $k = 1$).

Для определения значения величин p_1, q_1, γ_{11}, и β_1, согласно (4.5) и (4.6), будем иметь следующую систему алгебраических уравнений:

$$a_{11}p_1 + b_{11}q_1 + c_{11}^{(1)}\gamma_{11} = -\frac{\beta_1}{2}C_{11}(T), \quad d_{11}p_1 + e_{11}q_1 + f_{11}^{(1)}\gamma_{11} = -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(T),$$
$$a_{11}^{(1)}p_1 + b_{11}^{(1)}q_1 + g_{11}^{(11)}\gamma_{11} = -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(t_1), \quad C_{11}(T)p_1 + C_{21}(T)q_1 + C_{21}(t_1)\gamma_{11} = 1 \tag{5.3}$$

где

$$a_{11} = \int\limits_0^T \sin\lambda_1(T-\tau)\sin\lambda_1(T-\tau)\,d\tau = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 T,$$

$$b_{11} = d_{11} = \int\limits_0^T \cos\lambda_1(T-\tau)\sin\lambda_1(T-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\lambda_1}\sin^2\lambda_1 T,$$

$$a_{11}^{(1)} = c_{11}^{(1)} = \int\limits_0^T g_1^{(1)}(\tau)\sin\lambda_1(T-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 T + \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1(T-t_1),$$

$$e_{11} = \int\limits_0^T \cos\lambda_1(T-\tau)\cos\lambda_1(T-\tau)\,d\tau = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 T,$$

$$b_{11}^{(1)} = f_{11}^{(1)} = \int\limits_0^T g_1^{(1)}(\tau)\cos\lambda_1(T-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\lambda_1}\ \sin\lambda_1 t_1 \cos\lambda_1 T + \frac{t_1}{2}\cos\lambda_1(T-t_1),$$

$$g_{11}^{(11)} = \int\limits_0^T g_1^{(1)}(\tau)\,g_1^{(1)}(\tau)\,d\tau = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 t_1.$$

Для простоты, предположим, что $t_1 = 4\frac{l}{a}$, $T = 8\frac{l}{a}$. Тогда, с учетом $\lambda_1 = \frac{a\pi}{l}$ получим $t_1\lambda_1 = 4\pi$, $T\lambda_1 = 8\pi$, $\lambda_1(T-t_1) = 4\pi$, следовательно, будем иметь

$$a_{11} = e_{11} = \frac{4l}{a}, \quad b_{11} = d_{11} = a_{11}^{(1)} = c_{11}^{(1)} = 0, \quad b_{11}^{(1)} = f_{11}^{(1)} = g_{11}^{(11)} = \frac{2l}{a}.$$

В этом случае решая систему уравнений (5.3) для величин p_1, q_1, γ_{11}, получим

$$p_1^0 = \frac{A}{2}C_{11}(T), \quad q_1^0 = A\left[C_{21}(T) - C_{21}(t_1)\right], \quad \gamma_{11}^0 = -A\left[C_{21}(T) - 2C_{21}(t_1)\right],$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{2}C_{11}^2(T) + C_{21}^2(t_1) + \left[C_{21}(T) - C_{21}(t_1)\right]^2,$$

$$C_{11}(T) = \frac{l}{2a}\left(V_1(T) - V_1(0)\right) + \frac{\varphi_T(0) - \varphi_0(0)}{\lambda_1},$$

$$C_{21}(T) = \frac{l}{2a\lambda_1}\left(\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)\right) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1^2},$$

$$C_{21}(t_1) = \frac{l}{2a\lambda_1}\left(\dot{V}_1(t_1) - \dot{V}_1(0)\right) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1^2}.$$

Следовательно, оптимальное граничное управление $\mu_1^0(\tau)$ записывается в виде:

$$\mu_1^0(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(\rho_1^0)^2}\left[p_1^0 \sin\lambda_1(T-\tau) + q_1^0\cos\lambda_1(T-\tau) + \gamma_{11}^0\cos\lambda_1(t_1-\tau)\right], & 0 \le \tau \le t_1, \\ \frac{1}{(\rho_1^0)^2}\left[p_1^0 \sin\lambda_1(T-\tau) + q_1^0\cos\lambda_1(T-\tau)\right], & t_1 < \tau \le T, \end{cases}$$

где

$$\left(\rho_1^0\right)^2 = \int\limits_0^{t_1}\left[p_1^0 \sin\lambda_1(T-\tau) + q_1^0\cos\lambda_1(T-\tau) + \gamma_{11}^0\cos\lambda_1(t_1-\tau)\right]^2 d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{T}\left[p_1^0 \sin\lambda_1(T-\tau) + q_1^0\cos\lambda_1(T-\tau)\right]^2 d\tau.$$

Далее, согласно приведенным формулам (4.7)-(4.9), будем иметь

$$Q_1^0(x,t) = V_1^0(x,t) + W_1^0(x,t) = V_1^0(t)\sin\frac{\pi}{l}x + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1^0(t).$$

Заключение

Предложен конструктивный метод построения оптимального граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданной скоростью точек струны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Предложенный подход оптимального граничного управления колебаниями струны, с использованием метода Фурье вместо метода Даламбера, допускает распространение на другие неодномерные колебательные системы.

Литература

[1] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.

[2] Абдукаримов М.Ф. Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны. ДАН РТ, 2013, т. 56, №8, с. 612-618.

[3] Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16), с. 5-10.

[4] Гибкина Н.В., Сидоров М.В., Стадникова А.В. Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны. Радиоэлектроника и информатика. Научно-технический журнал ХНУРЭ. 2016, № 2. С. 3-11.

[5] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. Успехи математических наук. 2005. т. 60, вып. 6 (366). с. 89-114.

[6] Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Об одной задаче оптимального граничного управления с динамическим граничным условием. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 667-671.

[7] Копец М.М. Задача оптимального управления процессом колебания струны. Теория оптимальных решений. Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2014. С. 32-38.

[8] Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени. Автоматика и телемеханика. 2020, № 2, 36–47.

[9] Barseghyan V.R. About One Problem of Optimal Control of String Oscillations with Non-separated Multipoint Conditions at Intermediate Moments of Time. In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. 2020. pp. 13-25.

[10] Barsegyan V.R. The Problem of Optimal Control of String Vibrations. International Applied Mechanics, Vol. 56, No. 4, 2020, pp. 471-480.

[11] Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времении. Известия НАН РА. Механика. 2008. т. 61, № 2. с. 52 – 60.

[12] Барсегян В.Р. Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени. "Аналитическая механика, устойчивость и управление": труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Ч. I. Казань, 13–17 июня 2017г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 119-125.

[13] Барсегян В.Р., Солодуша С.В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени. Вестник российских университетов. Математика. Тамбов, 2020. Т. 25, № 130. с. 131-146.

[14] Barseghyan V.R., Movsisyan L.A. Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation. International Applied Mechanics, Vol. 48, № 2, 2012, pp. 234-239.

[15] Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.

[16] Корзюк В.И., Козловская И.С., Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. т. 19, № 1, с. 62–70.

[17] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Сведения об авторе

Барсегян Ваня Рафаелович, доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.
Тел. (+374 91) 20 32 20 **email**: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 07.02.2021