

**ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ
КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО, СЛОЙСТОГО ПРОСТРАНСТВА С
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МЕЖФАЗНЫМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ
КОЛЬЦЕОБРАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ**

Акопян В.Н., Григорян А.А., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: периодические смешанные задачи, межфазная трещина, осесимметричная задача, слоистое пространство

**Axially symmetrical stress distribution of piecewise-homogeneous, layered space with
a periodic system of semi-infinite ring-shaped interfacial cracks**

Hakobyan V. N., Grigoryan A. A. Amirjanyan H. A.

Keywords: periodic mixed problems, interface cracks, layered space

This paper considers the axially symmetrical stress distribution of piecewise-homogeneous, equally layered space obtained by alternating connection of two heterogeneous layers of the same thickness, which along the planes of their junction contain semi-infinite interfacial parallel circular ring-shaped cracks, forming a periodic system. With the help of Hankel integral transform and rotation operators the solution of the problem is reduced to a system of singular integral equations, the solution of which is constructed by the method of mechanical quadratures. Some special cases of the problem that are of independent interest have also been considered. For one of them an exact solution of the problem in quadratures was obtained.

**Պարբերական միջֆազային կիսաանվերջ օղակաձև ճաքերով կտոր առ կտոր
համասեռ շերտավոր փարածույթյան առանցքահամաչափ լարվածային վիճակը**

Նակոբյան Վ. Ն., Գրիգորյան Ա. Ա., Ամիրջանյան Ա. Ա.

Տիմնաբառեր. պարբերական խառը եզրային խնդիրներ, միջֆազային ճաքեր, շերտավոր փարածույթյուն

Աշխատանքում դիտարկված է հավասար հաստության փարասեռ շերտերի հաջորդական միացումից ստացված հավասարաչափ կտոր առ կտոր համասեռ փարածույթյան առանցքահամաչափ լարվածային վիճակը, երբ այն փարասեռ շերտերի միացման հարթություններում պարունակում է կիսաանվերջ օղակաձև միջֆազային ճաքերի պարբերական համակարգ: Նանկելի ձևափոխության և պրոյեկտիվ օպերատորների օգնությամբ խնդրի լուծումը հանգեցվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որի լուծումը կառուցվել է մեխանիկական թառակուսացման բանաձևերի մեթոդով: Դիտարկվել են նաև խնդրի որոշ մասնավոր դեպքեր, որոնք ներկայացնում են ինքնուրույն հետաքրքրություն: Դրանցից երկուսում ստացվել են խնդիրների ճշգրիտ լուծումները:

В работе рассмотрено осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства, полученного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв одинаковой толщины, которое на плоскостях соединения слоёв содержит межфазные полубесконечные, круговые кольцеобразные параллельные трещины, которые образуют периодическую систему. При помощи интегрального преобразования Ханкеля и операторов вращения решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которой построено методом механических квадратур. Рассмотрены также некоторые частные случаи задачи, представляющие самостоятельный интерес. В одном из них получено точное решение задачи в квадратурах.

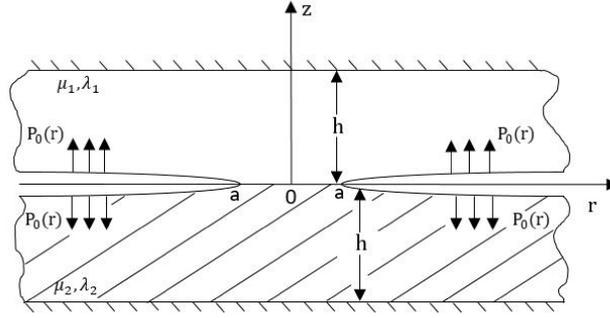
1 Введение

Контактным и смешанным задачам осесимметричной теории упругости посвящены многие исследования отечественных и зарубежных ученых. Часть из них посвящена изучению осесимметричного напряжённого состояния упругого однородного или составного пространства с дискообразными или кольцеобразными трещинами. Из них отметим работы [1-8], которые непосредственно связаны с настоящей работой. Что же касается исследования осесимметричного напряжённого состояния кусочнооднородного, равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых дискообразных параллельных межфазных или внутренних дефектов, которые на наш взгляд представляют интерес не только с научной, но и с практической точек зрения, началось совсем недавно и опубликовано лишь несколько работ. В этом направлении отметим работы [9-12]. В работе [9] построены разрывные решения осесимметричной теории упругости для равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых дискообразных параллельных межфазных дефектов и на их основе получены решения задач в случае, когда дефекты представляют трещину или абсолютно жёсткое включение. В работах [10-12] рассмотрены осесимметричные напряжённые состояния равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых дискообразных внутренних трещин и абсолютно жёстких включений.

2 Постановка задачи и вывод разрывных решений

Рассмотрим осесимметричное напряжённое состояние кусочнооднородного упругого пространства, полученного при помощи соединения двух разнородных слоев толщины $2h$ с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 , соответственно, отнесённого к цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, начало которой находится на одной из плоскостей стыка разнородных слоёв. Будем считать, что на плоскостях стыка разнородных слоёв $z = 2nh$ ($n \in Z$) в областях $\{r > a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ пространство содержит периодическую систему одинаковых круговых кольцеобразных полубесконечных межфазных параллельных трещин и деформируется при помощи осесимметричных нормальных нагрузок интенсивности $p_0(r)$ с конечной результирующей P_1 , действующих на берега трещин, и нагрузок с результирующей P_2 , приложенных на бесконечности. Несложно заметить, что

при этом все средние плоскости $z = (2n + 1)h$ ($n \in Z$) разнородных слоёв будут плоскостями симметрии. Вследствие этого можно отделить базовую ячейку в виде двухкомпонентного составного слоя, занимающего в пространстве область $\Omega = \{|z| \leq h; 0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, и поставленную задачу сформулировать как граничную задачу для этого слоя, на внешних плоскостях $z = \pm h$ которого заданы условия симметрии, а на плоскости $z = 0$ имеется круговая кольцеобразная полубесконечная межфазная трещина. На (Фиг.1) приведено осевое сечение базовой ячейки.



Фиг.1

Требуется определить нормальные и касательные контактные напряжения, действующие в зоне контакта разнородных слоёв, значение модуля комплексного коэффициента интенсивности напряжений на окружности $r = a$.

Снабдив индексами 1 и 2 все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние разнородных слоёв, соответственно, поставленную задачу, в общепринятых обозначениях, для базового слоя представим в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(1)}(r, h) = u_z^{(1)}(r, h) = 0 \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, -h) = u_z^{(2)}(r, -h) = 0 \end{cases} \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1a)$$

$$\begin{cases} u_r^{(1)}(r, 0) = u_r^{(2)}(r, 0) & (0 \leq r < a) \\ u_z^{(1)}(r, 0) = u_z^{(2)}(r, 0) & (0 \leq r < a) \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) & (0 \leq r < a) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) & (0 \leq r < a) \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) = -p_0(r) & (a \leq r < \infty) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0 & (a \leq r < \infty) \\ \sigma_r^{(j)}(r, z) = 0 \quad r \rightarrow \infty & (j = 1, 2) \end{cases} \quad (1c)$$

Чтобы построить решение граничной задачи (1), введём в рассмотрение неизвестные нормальные и касательные контактные напряжения $\sigma(r)$ и $\tau(r)$, решим вспомогательные задачи для каждого из разнородных слоёв на лицевых поверх-

ностях $z = \pm h$ которых заданы условия симметрии (1а), а на плоскости $z = 0$ заданы напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(j)}(x, 0) &= \begin{cases} \tau(r) & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} = T(r) \\ \sigma_z^{(j)}(x, 0) &= \begin{cases} \sigma(r) & (r < a) \\ -p_0(r) & (r > a) \end{cases} = P(r) \end{aligned} \quad (j = 1, 2) \quad (2)$$

и определим смещения точек зоны контакта обоих слоёв через введённые неизвестные контактные напряжения.

Чтобы построить решение вспомогательных граничных задач, представим решения уравнений Ламэ для разнородных слоёв в виде интегралов Ханкеля [9]:

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(r, z) &= \int_0^\infty [(A_j(s) + zB_j^*(s)) \operatorname{ch} zs + (B_j(s) + zA_j^*(s)) \operatorname{sh} zs] s J_1(rs) ds; \\ u_z^{(j)}(r, z) &= \int_0^\infty [(C_j(s) - zA_j^*(s)) \operatorname{ch} zs + (D_j(s) - zB_j^*(s)) \operatorname{sh} zs] s J_0(rs) ds - \\ &\quad - (z + (-1)^j h) w_0^{(j)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A_j^*(s) = \frac{s}{\kappa_j} (A_j(s) + D_j(s)); \quad B_j^*(s) = \frac{s}{\kappa_j} (B_j(s) + C_j(s)) \quad (j = 1, 2),$$

$J_j(x)$ ($j = 1, 2$) – функции Бесселя действительного аргумента, $A_j(s)$, $B_j(s)$, $C_j(s)$, $D_j(s)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $hw_0^{(j)}$ – неизвестная константа, κ_j ($j = 1, 2$) – известные постоянные Мусхелишвили. При этом, напряжения представляются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(j)}(r, z) &= -2 \int_0^\infty \left\{ \left[\vartheta_1^{(j)} A_j(s) - \vartheta_2^{(j)} D_j(s) + \mu_j z B_j^*(s) \right] \operatorname{ch} zs - \right. \\ &\quad \left. - \left[\vartheta_2^{(j)} C_j(s) - \vartheta_1^{(j)} B_j(s) - \mu_j z A_j^*(s) \right] \operatorname{sh} zs \right\} s^2 J_1(rs) ds; \\ \tau_{rz}^{(j)}(r, z) &= 2 \int_0^\infty \left\{ \left[\vartheta_2^{(j)} B_j(s) - \vartheta_1^{(j)} C_j(s) + \mu_j z A_j^*(s) \right] \operatorname{ch} zs + \right. \\ &\quad \left. + \left[\vartheta_2^{(j)} A_j(s) - \vartheta_1^{(j)} D_j(s) + \mu_j z B_j^*(s) \right] \operatorname{sh} zs \right\} s^2 J_0(rs) ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\theta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \theta_2^{(j)} = \frac{\mu_j(\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j} \quad (j = 1, 2)$$

При помощи представлений (3) и (4), удовлетворим условиям вспомогательных граничных задач и определим неизвестные коэффициенты $A_j(s)$, $B_j(s)$, $C_j(s)$ и $D_j(s)$ ($j = 1, 2$) через трансформанты Ханкеля функций напряжений $P(r)$ и $T(r)$. Получим:

$$\begin{aligned} A_j^*(s) &= \frac{\bar{P}(s) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + (-1)^j \bar{T}(s) \operatorname{ch}^2 \beta}{2\mu_1 (\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta)}; \quad (j = 1, 2; \beta = sh); \\ B_j^*(s) &= (-1)^j \frac{\bar{P}(s) \operatorname{sh}^2 \beta + (-1)^j \bar{T}(s) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta}{2\mu_1 (\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta)}; \\ A_j(s) &= \frac{j\vartheta_2^{(j)}}{s\mu_j} A_j^*(s) - \frac{\bar{P}(s)}{2s\mu_j}; \quad B_j(s) = \frac{j\vartheta_1^{(j)}}{s\mu_j} B_j^*(s) + \frac{\bar{T}(s)}{2s\mu_j}; \\ C_j(s) &= \frac{j\vartheta_2^{(j)}}{s\mu_j} B_j^*(s) - \frac{\bar{T}(s)}{2s\mu_j}; \quad D_j(s) = \frac{j\vartheta_1^{(j)}}{s\mu_j} A_j^*(s) + \frac{\bar{P}(s)}{2s\mu_j}; \end{aligned}$$

где

$$\bar{P}(s) = \int_0^\infty rP(r) J_0(sr) dr; \quad \bar{T}(s) = \int_0^\infty rT(r) J_1(sr) dr.$$

Теперь, используя полученные представления коэффициентов по формулам (3), найдём компоненты смещений точек контактной зоны обоих разнородных слоёв, составляющих базовую ячейку через неизвестные контактные напряжения:

$$\begin{aligned} u_z^{(j)}(r, 0) &= (-1)^j a_1^{(j)} L_{0,0}[\sigma] + b_1^{(j)} L_{0,1}[\tau] + L_{0,0}^{(j,1,1)}[\sigma] + L_{0,0}^{(j,1,2)}[\tau] - \\ &\quad - f_j(r) + (-1)^{j+1} h w_0^{(j)}; \\ u_r^{(j)}(r, 0) &= b_1^{(j)} L_{1,0}[\sigma] - (-1)^j a_1^{(j)} L_{1,1}[\tau] + L_{1,0}^{(j,2,1)}[\sigma] + L_{1,1}^{(j,2,2)}[\tau] - \\ &\quad - g_j(r) \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} L_{m,n}[\varphi] &= \int_0^a W_{m,n}(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi; \quad W_{m,n}(r, \xi) = \int_0^\infty J_m(tr) J_n(t\xi) dt; \\ L_{m,n}^{(k,i,j)}[\varphi] &= \int_0^a W_{m,n}^{(k,i,j)}(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi; \quad W_{m,n}^{(k,i,j)}(r, \xi) = \int_0^\infty K_{i,j}^{(k)}(t) J_m(tr) J_n(t\xi) dt; \\ f_j(r) &= (-1)^j a_1^{(j)} \bar{L}_{0,0}[p_0] + \bar{L}_{0,0}^{(j,1,1)}[p_0]; \quad g_j(r) = b_1^{(j)} \bar{L}_{1,0}[p_0] + \bar{L}_{1,0}^{(j,2,1)}[p_0]; \\ \bar{L}_{m,n}[\varphi] &= \int_a^\infty W_{m,n}(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi; \quad \bar{L}_{m,n}^{(k,i,j)}[\varphi] = \int_a^\infty W_{m,n}^{(k,i,j)}(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi; \\ K_{1,1}^{(j)}(\beta) &= a_1^{(j)} (-1)^{j+1} \frac{e^{-\beta} \operatorname{sh} \beta + \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta}; \quad K_{1,2}^{(j)}(\beta) = K_{2,1}^{(j)}(\beta) = -\frac{a_1^{(j)} \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta}; \end{aligned}$$

$$K_{2,2}^{(j)}(\beta) = (-1)^j a_1^{(j)} \frac{e^{-\beta} \operatorname{ch} \beta - \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta}; \quad a_1^{(j)} = \frac{\kappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\mu_j^2}; \quad b_1^{(j)} = \frac{1}{\lambda_j + \mu_j}; \quad \beta = hs \quad (j = 1, 2).$$

В представлениях (5) выделены главные части в виде интегралов Вебера–Сони́на. Вследствие этого ядра $W_{m,n}^{(k,i,j)}(r, \xi)$ – регулярные функции от обоих аргументов.

Далее, чтобы получить ключевые уравнения поставленной задачи, при помощи формул (5) удовлетворим условиям контакта двух разнородных слоёв, т.е. первым двум условиям (1b). После некоторых выкладок придём к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} -\left(a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\right) L_{0,0}[\sigma] + \left(b_1^{(1)} - b_1^{(2)}\right) L_{0,1}[\tau] + L_{0,0}^{(1,1)}[\sigma] + L_{0,1}^{(1,2)}[\tau] = F_1(r) - \delta; \\ \left(b_1^{(1)} - b_1^{(2)}\right) L_{1,0}[\sigma] + \left(a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\right) L_{1,1}[\tau] + L_{1,0}^{(2,1)}[\sigma] + L_{1,1}^{(2,2)}[\tau] = F_2(r) \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} L_{0,0}^{(1,1)}[\sigma] &= L_{0,0}^{(1,1,1)}[\sigma] - L_{0,0}^{(2,1,1)}[\sigma]; & L_{0,0}^{(1,2)}[\tau] &= L_{0,0}^{(1,1,2)}[\tau] - L_{0,0}^{(2,1,2)}[\tau]; \\ L_{1,0}^{(2,1)}[\sigma] &= L_{0,0}^{(1,2,1)}[\sigma] - L_{0,0}^{(2,2,1)}[\sigma]; & L_{1,0}^{(2,2)}[\tau] &= L_{0,0}^{(1,2,2)}[\tau] - L_{0,0}^{(2,2,2)}[\tau]; \\ F_1(r) &= -\left(a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\right) \bar{L}_{0,0}[p_0] + \bar{L}_{0,0}^{(1,1)}[p_0]; & \delta &= h\left(w_0^{(1)} + w_0^{(2)}\right); \\ F_2(r) &= \left(b_1^{(1)} - b_1^{(2)}\right) \bar{L}_{1,0}[p_0] + \bar{L}_{1,0}^{(2,1)}[p_0]. \end{aligned}$$

Развернув, систему уравнений (6) напомним в виде:

$$\begin{aligned} & -A^+ \int_0^a \left\{ \int_0^\infty [1 - K_{1,1}^*(\beta)] J_0(rs) J_0(\xi s) ds \right\} \xi \sigma(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^a \left\{ \int_0^\infty [B^- - A^- K_{1,1}^*(\beta)] J_0(rs) J_1(\xi s) ds \right\} \xi \tau(\xi) d\xi = F_1(r) - \delta; \\ & \int_0^a \left\{ \int_0^\infty [B^- - A^-(\beta)] J_1(rs) J_0(\xi s) ds \right\} \xi \sigma(\xi) d\xi - \\ & - A^+ \int_0^a \left\{ \int_0^\infty [1 + K_{1,1}^*(\beta)] J_1(rs) J_1(\xi s) ds \right\} \xi \tau(\xi) d\xi = F_2(r). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{1,1}^*(\beta) &= \frac{e^{-\beta} \operatorname{sh} \beta + \beta}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}; & K_{1,2}^*(\beta) &= K_{2,1}^*(\beta) = -\frac{\beta}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}; \\ K_{2,2}^*(\beta) &= \frac{e^{-\beta} \operatorname{ch} \beta - \beta}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}; & A^\pm &= a_1^{(1)} \pm a_1^{(2)}; & B^- &= b_1^{(1)} - b_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Систему интегральных уравнений (7) следует рассматривать при условиях

$$2\pi \int_0^a r \sigma(r) dr = P_0; \quad (P_0 = P_1 + P_2), \quad (8)$$

где P_0 – равнодействующая нагрузок, приложенных к полупространствам $z > 0$ или $z < 0$. Чтобы построить решение системы интегральных уравнений (7) при условий (8), следуя работам [4-12], сведём её к системе сингулярных интегральных уравнений. Для этого, как и в указанных работах, введём функции

$$\sigma_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi \sigma(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}}; \quad \tau_*(t) = \frac{2t}{\pi} \int_t^a \frac{\tau(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}},$$

продолжим $\sigma_*(t)$ на интервал $(-a, 0)$ чётным образом, а $\tau_*(t)$ – нечётным образом и применяя к обеим частям первого уравнения (7) оператор I , а ко второму – оператор I_1

$$I(\varphi(x)) = \int_0^x \frac{\varphi(r) r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}; \quad I_1(\varphi(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y \varphi(r) dr,$$

после некоторых выкладок, для определения функций $\sigma_*(t)$ и $\tau_*(t)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_*(x) - \frac{B^-}{\pi A^+} \int_{-a}^a \frac{\tau_*(t) dt}{t-x} - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a Q_{1,1}(t, x) \sigma_*(t) dt + \\ + \frac{A^-}{\pi A^+} \int_{-a}^a Q_{1,2}(t, x) \tau_*(t) dt = -F_1^*(x) + \delta_0 & (-1 < x < 1); \\ \tau_*(x) + \frac{B^-}{\pi A^+} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(t) dt}{t-x} + \frac{A^-}{\pi A^+} \int_{-a}^a Q_{2,1}(t, x) \sigma_*(t) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a Q_{2,2}(t, x) \tau_*(t) dt = -F_2^*(x) & (-1 < x < 1). \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{1,1}(t, x) &= \int_0^\infty K_{11}^*(\beta) \cos st \cos sx ds; \quad Q_{1,2}(t, x) = \int_0^\infty K_{12}^*(\beta) \sin st \cos sx ds; \\ Q_{2,1}(t, x) &= \int_0^\infty K_{21}^*(\beta) \cos st \sin sx ds; \quad Q_{2,2}(t, x) = \int_0^\infty K_{22}^*(\beta) \sin st \sin sx ds; \\ F_1^*(x) &= \frac{2}{\pi A^+} \left[\frac{d}{dx} I[F_1(r)] \right]; \quad F_2^*(x) = \frac{2}{\pi A^+} \frac{d}{dx} I_1[F_2(r)]; \quad \delta_0 = \frac{2\delta}{\pi A^+}. \end{aligned}$$

При этом, функция $F_1^*(x)$ продолжена на интервале $(-a, 0)$ чётным образом, а функция $F_2^*(x)$ – нечётным образом. Используя четность функции $\sigma_*(x)$, нечётность

функции $\tau_*(x)$ и условие (8), добавочные условия для решения системы (9) записываются в виде:

$$\pi \int_{-a}^a \sigma_*(x) dx = P_0; \quad \int_{-a}^a \tau_*(x) dx = 0. \quad (10)$$

Отметим, что при выводе системы (9) были использованы значения известных интегралов [14]:

$$\int_0^r J_1(rs) dr = -\frac{1}{s} [J_0(rs) - 1]; \quad \int_0^x \frac{J_0(rt) r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{\sin xt}{t};$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{J_0(rt) - 1}{\sqrt{x^2 - r^2}} r dr = \cos tx - 1;$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (9) при условиях (10).

3 Составное пространство с полубесконечной межфазной кольцеобразной трещиной

Прежде чем построить решение задачи в общем случае, рассмотрим два частных случая рассматриваемой задачи, представляющих самостоятельный интерес. В первой из этих задач рассмотрим случай, когда высота слоёв h стремится к бесконечности. Несложно проверить, что в этом случае все ядра $Q_{i,j}(x, t)$ в (9) исчезают и мы приходим к системе определяющих сингулярных интегральных уравнений для кусочно-однородного пространства с полубесконечной кольцеобразной межфазной трещиной:

$$\begin{cases} \sigma_*(x) - \frac{B^-}{\pi A^+} \int_{-a}^a \frac{\tau_*(t) dt}{t-x} = -F_1^*(x) + \delta_0; \\ \tau_*(x) + \frac{B^-}{\pi A^+} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(t) dt}{t-x} = -F_2^*(x), \end{cases} \quad (11)$$

которую нужно решать при условиях (10). С этой целью умножим второе уравнение (11) на отрицательную мнимую единицу $-i$, просуммируем с первым, перейдем на интервал $(-1, 1)$ и введя известную безразмерную комплексную комбинацию напряжений $\chi(x) = a [\sigma_*(ax) - i\tau_*(ax)] / P_0$, сведём решение системы (11) при условиях (10) к решению следующего сингулярного интегрального урав-

нения второго рода:

$$\chi(x) + \frac{a_*}{i\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi(t)}{t-x} dt = -F(x) + a \frac{\delta_0}{P_0} \quad (-1 < x < 1), \quad (12)$$

при условии

$$\pi \int_{-1}^1 \chi(x) dx = 1. \quad (13)$$

Здесь

$$a_* = \frac{B^-}{A^+}; \quad F(x) = a [F_1^*(ax) - iF_2^*(ax)] / P_0 = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x).$$

Для построения замкнутого решения уравнения (12) вводим в рассмотрение комплексную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\chi(t) dt}{t-z} \quad (14)$$

и используя формулы Племеля-Сохоцкого [13], сведём его к решению задачи Римана:

$$\Phi^+(x) = G\Phi^-(x) + F_*(x) \quad (-1 < x < 1). \quad (15)$$

Здесь

$$F_*(x) = C_0 [-F(x) + a\delta_0/P_0] = -C_0 F(x) + \delta_*;$$

$$\delta_* = \frac{2aC_0\delta}{\pi P_0 A^+}; \quad G = \frac{1-a_*}{1+a_*} = \frac{\mu_{12} + \mu_2}{\mu_{21} + \mu_1} > 0; \quad C_0 = \frac{A^+}{A^+ + B^-}.$$

Так как коэффициент G задачи Римана (14) положительное число, то точки ± 1 являются точками автоматической ограниченности [13] и, следовательно, решение уравнений (14) будет даваться формулой :

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{F_*(t) dt}{X^+(t)(t-z)} \quad (16)$$

$$\left(X(z) = (1+z)^{i\beta} (1-z)^{-i\beta}; \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln G \right).$$

Отсюда по формулам Племеля-Сохоцкого найдём:

$$\chi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{G+1}{2G} F_*(x) + \frac{(G-1)\omega(x)}{2\pi i G} \int_{-1}^1 \frac{F_*(t) dt}{\omega(t)(t-x)} \quad (17)$$

$$\left(\omega(x) = (1+x)^{i\beta} (1-x)^{-i\beta}, \quad -1 < x < 1 \right).$$

Для получения точного решения уравнений (12) осталось определить постоянную δ_* , входящую в правую часть определяющего сингулярного интегрального уравнения (12). С этой целью, используя представления (14) и (16) функции $\Phi(z)$, сравним коэффициенты при z^{-1} в разложениях этих представлений в ряд вокруг бесконечно удалённой точки. Получим:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \chi(t) dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{F_*(t) dt}{X^+(t)},$$

где $X^+(t)$ – значение функции $X(z)$ на интервале $(-1, 1)$ сверху и даётся формулой:

$$X^+(x) = \sqrt{G}\omega(x) \quad (-1 < x < 1).$$

Учитывая условие (13) и представление функции $F_*(t)$ через функции $\varphi_j(t)$ ($j = 1, 2$) и δ_* , можем написать:

$$\frac{1}{\pi} = \int_{-1}^1 \frac{\delta_* dt}{X^+(t)} - C_0 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(t) dt}{X^+(t)} - iC_0 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(t) dt}{X^+(t)},$$

откуда, используя значение интеграла [14]

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{i\beta} dx = \frac{2\pi\beta}{\text{sh } \pi\beta},$$

чётность функции $\varphi_1(t)$ и нечётность функции $\varphi_2(t)$, для определения жёсткого смещения δ получим формулу:

$$\delta = \frac{P_0 A^+ \sqrt{G} \text{sh } \pi\beta}{4\pi a\beta C_0} \left\{ 1 + \frac{2\pi}{\sqrt{G}} \int_0^1 \left[\text{Re} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{i\beta} \varphi_1(x) - \text{Im} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{i\beta} \varphi_2(x) \right] dx \right\}. \quad (18)$$

В частном случае, когда берега трещин свободны от нагрузок и кусочно-однородное пространство растягивается только усилиями, приложенными на бесконечности, из (17) и (18) получим:

$$\chi(x) = -\frac{\delta_*}{\sqrt{G}} \omega(x); \quad \delta = \frac{P_2 A^+ \sqrt{G} \text{sh } \pi\beta}{4\pi a\beta C_0}.$$

Теперь определим комплексный коэффициент интенсивности в концевых точках трещин. Для этого заметим, что истинные контактные напряжения определяются

формулами [8]:

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s\sigma_*(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}; \quad \tau(r) = -\frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\tau_*(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{a\sigma(ax)}{P_0} &= -\frac{1}{P_0 x} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{s\sigma_*(as) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} = -\frac{d}{P_0 dx} \int_x^1 \frac{\sigma_*(as) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} + \Phi_1(x); \\ \frac{a\tau(ax)}{P_0} &= -\frac{d}{P_0 dx} \int_x^1 \frac{\tau_*(sa) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

где $\Phi_1(x)$ – ограниченная функция в точке $x = 1$. Тогда будем иметь:

$$\chi_*(x) = \frac{a[\sigma(ax) - i\tau(ax)]}{P_0} = -\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\chi(s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} + \Phi_1(x). \quad (19)$$

Функцию $\chi(s)$ представим в следующем виде:

$$\chi(x) = \chi_0(x)\omega(x); \quad \chi_0(x) = -\frac{F_*(x)}{\sqrt{G}} + \frac{G-1}{2\pi i G} \int_{-1}^1 \frac{F_*(t) - F_*(x)}{\omega(t)(t-x)} dt.$$

Тогда (19) можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_*(x) &= -\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\omega(s)\chi_0(s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} + \Phi_1(x) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}(1/2 - i\beta)\Gamma(1 - i\beta)}{\Gamma(3/4 - i\beta)(1-x)^{1/2+i\beta}} \psi(1, x) + \Phi(x), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\Phi(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{[\psi(s, x) - \psi(1, x)] ds}{(1-s)^{i\beta} \sqrt{s-x}} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - i\beta)}{\Gamma(3/4 - i\beta)} (1-x)^{1/2-i\beta} \psi'(1, x) + \Phi_1(x);$$

$$\psi(s, x) = \frac{(1+s)^{i\beta}}{\sqrt{s+x}} \chi_0(s),$$

а $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция Эйлера. Заметим, что при выводе формулы

(20) было использовано значение интеграла [15]:

$$\int_x^1 \frac{ds}{(1-s)^\alpha \sqrt{s-x}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(3/4-\alpha)} (1-x)^{1/2-\alpha}.$$

Тогда комплексный коэффициент безразмерных разрушающих напряжений на окружности $r = a$ будет определяться формулой:

$$\begin{aligned} K_I[a] - iK_{II}[a] &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{1/2+i\beta}, \\ \chi_*(\eta) &= \frac{\sqrt{2\pi} (1/2 - i\beta) \Gamma(1 - i\beta)}{\Gamma(3/4 - i\beta)} \psi(1, 1) = \\ &= \frac{2^{i\beta} \pi (1/2 - i\beta) \Gamma(1 - i\beta)}{\Gamma(3/4 - i\beta)} \left[-\frac{F_*(1)}{\sqrt{G}} + \frac{G-1}{2\pi i G} \int_{-1}^1 \frac{F_*(t) - F_*(1)}{\omega(t)(t-1)} dt \right]. \end{aligned}$$

4 Однородное пространство с периодической системой полубесконечных кольцеобразных трещин

Теперь обратимся к ещё одному частному случаю поставленной задачи, когда все слои, составляющие пространство, изготовлены из одного и того же материала с коэффициентами Лямэ μ_1 и λ_1 , т.е. рассмотрим осесимметричное напряжённое состояние однородного пространства с периодической системой параллельных полубесконечных кольцеобразных трещин. В этом частном случае коэффициенты A^- и B^- обращаются в ноль и определяющая система (9), как и в плоской задаче, распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_*(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a Q_{1,1}(t, x) \sigma_*(t) dt &= -F_1^*(x) + \delta_0; \\ \tau_*(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a Q_{2,2}(t, x) \tau_*(t) dt &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения нужно рассматривать при условиях (10). Из второго уравнения (21) и второго условия (10) сразу следует, что $\tau_*(x) \equiv 0$. Первое же уравнение (21) представляет собой интегральное уравнение Фредгольмского типа и можно решить разными методами, например методом последовательных приближений или методом механических квадратур. Для этого перейдём на интервал $(-1, 1)$ и введём обозначения

$$\Lambda(\eta) = \frac{a}{P_0} \sigma_*(a\eta); \quad \varphi_1(\eta)_0 = \frac{a}{P_0} F_1^*(a\eta); \quad \delta_* = \frac{a}{P_0} \delta_0; \quad Q(\xi, \eta) = -\frac{a}{\pi} Q_{11}(a\xi, a\eta),$$

первое уравнение (21) представим в виде:

$$\Lambda(\eta) + \int_{-1}^1 Q(\xi, \eta) \Lambda(\xi) d\xi = -\varphi_1(\eta) + \delta_* \quad (-1 < \eta < 1). \quad (22)$$

При этом,

$$\pi \int_{-1}^1 \Lambda(\xi) d\xi = 1. \quad (23)$$

Решение уравнения (22) запишем в виде суммы двух решений:

$$\Lambda(\eta) = \Lambda_1(\eta) + \delta_* \Lambda_2(\eta), \quad (24)$$

где $\Lambda_1(\eta)$ – решение уравнений (22) при правой части $-\varphi_1(\eta)$, а $\Lambda_2(\eta)$ – решение уравнений (22), когда правая часть равна единице. Подставляя представление (24) в условие (23), выразим приведённое жёсткое смещение δ_* через указанные решения:

$$\delta_* = \frac{1 - \pi I_1}{\pi I_2} \left(I_j = \int_{-1}^1 \Lambda_j(\eta) d\eta; \quad j = 1, 2 \right).$$

Приведём также формулу для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$. С этой целью заметим, что истинные контактные напряжения определяются через функцию $\sigma_*(x)$ по формуле:

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_*(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \Phi(r) \quad \left(\Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s [\sigma_*(s) - \sigma_*(a)] ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right).$$

Следовательно,

$$K_I(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{a-x} \sigma(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sigma_*(a) = P_0 \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Lambda(1),$$

а безразмерный коэффициент интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ будет даваться формулой:

$$K_I^*(a) = \frac{\sqrt{a} K_I(a)}{P_0} = \sqrt{\pi} \Lambda(1).$$

Отметим, что в первом уравнении (21), устремляя высоту однородных слоёв h к бесконечности, придём к замкнутому решению задачи об осесимметричном напряжённом состоянии упругого пространства с полубесконечной кольцеобразной трещиной. Действительно, несложно проверить, что в этом случае ядро $Q_{11}(t, x)$ исчезает и мы приходим к соотношению:

$$\sigma_*(x) = -F_1^*(x) + \delta_0 \quad (-a < x < a), \quad (25)$$

где, на этот раз

$$F_1^*(x) = -\frac{2}{\pi a_1} \left[\frac{d}{dx} I[f_1(r)] \right] = -\frac{2}{\pi} \int_a^\infty \left\{ \int_0^\infty \cos sx J_0(s\xi) ds \right\} \xi q(\xi) d\xi.$$

Отсюда, используя формулу обращения оператора вращения, найдём

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \sigma_*(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s [-F_1^*(x) + \delta_0] ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = \frac{\delta_0 - F_1^*(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \Phi(r),$$

где

$$\Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s [F_1^*(x) - F_1^*(a)] ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}$$

– ограниченная функция на окружности $r = a$.

Тогда, для коэффициента интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ получим выражение:

$$K_I(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{a-r} \sigma(r) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} [\delta_0 - F_1^*(a)].$$

Приведём также формулы для контактных напряжений и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в случае, когда на берега трещин действуют равномерно распределённые по окружности $r = r_0 > a$ нагрузки с результирующей P_0 , т.е. когда $(r) = P_0 \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0}$. При помощи формулы [14]:

$$\int_0^\infty \cos sx J_0(\xi s) ds = \begin{cases} 0 & \xi < x, \\ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} & \xi > x \end{cases}$$

нетрудно установить, что в этом частном случае

$$F_1^*(x) = -\frac{P_0}{\pi^2 \sqrt{r_0^2 - x^2}}; \quad \sigma_*(x) = \frac{P_0}{\pi^2 \sqrt{r_0^2 - x^2}} + \delta_0 \quad (-a < x < a).$$

Далее, из условий равновесия (10) для приведённого жёсткого смещения δ_0 получим:

$$\delta_0 = \frac{P_0}{2\pi a} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{a}{r_0} \right) \right].$$

Тогда, используя значение интеграла [14,15]

$$\int_r^a \frac{2s ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(r_0^2 - s^2)}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r_0^2 + r^2 - 2a^2}{r_0^2 - r^2}$$

для истинных напряжений получим выражение:

$$\sigma(r) = \frac{P_0}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{r_0}\right) + \frac{2a\sqrt{r_0^2 - a^2}}{\pi(r_0^2 - r^2)} \right] \quad (0 < r < a).$$

Коэффициент интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ при этом будет даваться формулой:

$$K_I(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{a-x} \sigma(r) = \frac{P_0}{2a\sqrt{\pi a}} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{r_0}\right) + \frac{2a}{\pi\sqrt{r_0^2 - a^2}} \right].$$

Отсюда видно, что когда $r_0 \rightarrow \infty$, т.е. когда радиус окружности, где приложена нагрузка, стремится к бесконечности контактные напряжения и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений принимают соответственно следующие виды:

$$\sigma(r) = \frac{P_0}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (0 < r < a); \quad K_I(a) = \frac{P_0}{2a\sqrt{\pi a}},$$

которые соответствуют значениям контактных напряжений и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в случае, когда нагрузка с равнодействующей P_0 приложена на бесконечности и точно совпадают с результатами, приведёнными в монографии [16] для осесимметричного гладкого контакта двух тел, когда они изготовлены из одного и того же материала.

5 Решение определяющей системы уравнений в общем случае

Теперь построим решение системы определяющих уравнений (9) в общем случае. Для этого, как и выше, умножим второе уравнение (9) на $-i$, просуммируем с первым и при помощи замены переменных $\{x, t\} = \{a\eta, a\xi\}$ перейдём на интервал $(-1, 1)$. В итоге, введя обозначения

$$\chi(\eta) = \frac{1}{P_0} [\sigma_*(a\eta) - i\tau_*(a\eta)]; \quad \delta_* = \frac{\delta_0}{P_0};$$

$$a_* = \frac{B^-}{A^+}; \quad F(\eta) = \frac{1}{P_0} [f_1^*(a\eta) - if_2^*(a\eta)] = \varphi_1(\eta) - i\varphi_2(\eta).$$

$$R_1(\eta, \xi) = \frac{a}{2\pi} \left[Q_{22}(a\eta, a\xi) - Q_{11}(a\eta, a\xi) + \frac{iA^-}{A^+} (Q_{12}(a\eta, a\xi) - Q_{21}(a\eta, a\xi)) \right];$$

$$R_2(\eta, \xi) = -\frac{a}{2\pi} \left[Q_{22}(a\eta, a\xi) + Q_{11}(a\eta, a\xi) + \frac{iA^-}{A^+} (Q_{12}(a\eta, a\xi) + Q_{21}(a\eta, a\xi)) \right];$$

придём к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \chi(\eta) + \frac{a_*}{i\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \int_{-1}^1 R_1(\eta, \xi) \chi(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 R_2(\eta, \xi) \bar{\chi}(\xi) d\xi = \\ = -F(\eta) + \delta_* \quad (-1 < x < 1), \end{aligned} \quad (26)$$

которое нужно рассматривать при условии (13). Заметим, что аналогичные уравнения были получены в работе [9], в случае когда кусочно-однородное равномерно слоистое пространство расслаблено периодической системой круговых дискообразных межфазных трещин или включений. Следуя этой работе, решение уравнения (23) представим в виде суммы двух функций $\chi(\eta) = \delta_* \chi_1(\eta) + \chi_2(\eta)$, где $\chi_j(\eta)$ ($j = 1, 2$) – решения интегрального уравнения (23), когда его правая часть соответственно равна $-F(\eta)$ и 1. Тогда из условия (13) для определения приведённого жёсткого смещения δ_* , которое является одним из важных механических характеристик задачи, как и в [9], получим следующую формулу:

$$\delta_* = \frac{1 - I_2}{I_1}; \quad I_j = \pi \int_{-1}^1 \chi_j(\eta) d\eta \quad (j = 1, 2). \quad (27)$$

Решение уравнения (23) при условии (13) построим методом механических квадратур. С этой целью, учитывая особенность решения в концевых точках трещин, полученное выше, функции $\chi_j(\eta)$ ($j = 1, 2$) представим в виде:

$$\chi_j(\eta) = \chi_j^*(\eta) \omega(\eta) \quad (j = 1, 2), \quad (28)$$

где функция $\omega(\eta)$ та же самая, что и выше, а $\chi_j^*(\eta)$ ($j = 1, 2$) – непрерывные функции, ограниченные вплоть до концов отрезка $[-1, 1]$.

Подставляя представления функций $\chi_j(\eta)$ ($j = 1, 2$) из (25) в (23) и (13), используя соотношения, приведённые в [17], по стандартной процедуре, для каждой из правых частей, придём к системе из $2n$ алгебраических уравнений относительно значений $\chi_j^*(\xi_i)$ и $\bar{\chi}_j^*(\xi_i)$ ($j = 1, 2; i = \overline{1, n}$). После определения $\chi_*^*(\xi_i)$ при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа восстанавливаются функции $\chi_j(\eta)$ и определяются все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в кусочно-однородном равномерно слоистом пространстве. В частности, для определения безразмерных комплексных коэффициентов интенсивности приведенных разрушающих напряжений в концевых точках трещин получим формулу:

$$\begin{aligned} K_I[a] - iK_{II}[a] &= \sqrt{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 1-0} (1-\eta)^{1/2+i\beta} \chi_*(\eta) = \\ &= \frac{2^{i\beta} \pi (1/2 - i\beta) \Gamma(1 - i\beta) [\delta_* \chi_1^*(1) + \chi_2^*(1)]}{\Gamma(3/4 - i\beta)}. \end{aligned}$$

6 Численные результаты

Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения безразмерных комплексных коэффициентов интенсивности приведённых разрушающих напряжений в концевых точках трещин и приведённого жёсткого смещения δ_* в зависимости от параметра $l = h/a$ и отношения упругих характеристик $\mu_1/\mu_2 = \mu$ в случае, когда на берега трещин действует равномерно распределённая по окружности $r = r_0 > a$ нагрузка величины P_0 . При этом, функция $F(\eta)$, входящая в правую часть уравнения (23), будет даваться формулой:

$$F(\eta) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{\eta_0^2 - \eta^2}} + \frac{1}{l\pi^2} \int_0^\infty K_{11}^*(\beta) J_0\left(\frac{\eta_0\beta}{l}\right) \cos\left(\frac{\eta\beta}{l}\right) d\beta - \\ - \frac{iA^-}{l\pi^2 A^+} \int_0^\infty K_{21}^*(\beta) J_0\left(\frac{\eta_0\beta}{l}\right) \sin\left(\frac{\eta\beta}{l}\right) d\beta.$$

При вычислительных работах принято также $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$ и $\eta_0 = 2$.

Результаты вычислительных работ приведены в виде таблиц и фигур. В таблицах 1 и 2 приведены значения модуля комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в зависимости от параметров μ и l соответственно в случаях, когда $l = 2$ и $\mu = 2$.

μ	0.1	0.5	1	3	5	50	100	120
$ K(a) $	0.3141	0.2984	0.2962	0.3160	0.3303	0.3766	0.3807	0.3807

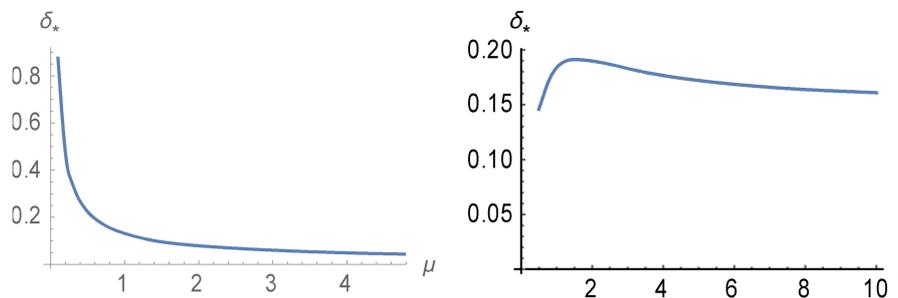
Таблица 1

μ	0.5	1	2	4	7	10
$ K(a) $	0.2719	0.2942	0.3051	0.3058	0.3063	0.3065

Таблица 2

Они показывают, что модуль комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений при увеличении параметра μ сначала убывает, а затем возрастает, стремясь к определённому пределу. При увеличении же параметра l модуль комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений монотонно возрастает, стремясь к определённому пределу.

На Фиг. 2 приведены графики зависимости приведённого жёсткого смещения соответственно от параметра μ при $l = 2$ и параметра l при $\mu = 2$. Из них видно, что при увеличении параметра μ приведённое жёсткое смещение уменьшается, стремясь к определённому пределу, соответствующему случаю, когда первый слой жёсткий. В случае же, когда увеличивается высота слоёв, при постоянном радиусе контактной зоны, приведённое жёсткое смещение сначала возрастает, а затем уменьшается, стремясь к определённому пределу, соответствующему случаю двухкомпонентного пространства.



Фиг. 1

Заключение

Таким образом, в работе получено эффективное решение задачи об осесимметричном напряжённом состоянии кусочнооднородного, равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых кольцеобразных полубесконечных, параллельных межфазных трещин. Получены простые формулы для определения важных механических характеристик задачи, каковыми являются контактные напряжения и модуль их комплексного коэффициента интенсивности. В случае, когда высота слоёв стремится к бесконечности, при помощи предельного перехода, получена определяющая система сингулярных интегральных уравнений задачи для двухкомпонентного пространства с круговой полубесконечной кольцеобразной межфазной трещиной и построено её точное решение. При помощи численного анализа выявлены закономерности изменения модуля комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений и жёсткого смещения слоёв в зависимости от физикомеханических и геометрических характеристик задачи.

Литература

- [1] Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities. Trans ASME, Ser. E, J. Appl. Mech. 1964, 32, №4, p. 829-836.
- [2] Mossakovskii V.I. and Rybka M.T. Generalization of the Griffith-Sneddon Criterion for the Case of a Nonhomogeneous Body, Journal of Applied Mathematics And Mechanics, Vol. 28, №6, 1964, pp1061-1069.
- [3] Willis J.R. The penny-shaped crack on an interface. Quart J. Mech. and Appl. Math., 1972, 25, №3, p. 367-385
- [4] Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения.- В сб.: "Современные проблемы механики и авиации", посвященном И.Ф. Образцову. 1980, с. 156-162.

- [5] Акопян В. Н., Даштоян Л. Л. Об одной осесимметричной задаче для составного пространства, ослабленного полубесконечной кольцеобразной трещиной. Изв. НАН РА, «Механика », т. 59, No1, 2006г, с. 3-10.
- [6] Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве. Сб. трудов межд. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды », посвя. 95-летию со дня рожд. Акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван-2007, с. 45-51.
- [7] Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.
- [8] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван, 2014, 322с.
- [9] Акопян В.Н., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. Разрывные решения осесимметричной теории упругости для кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства с периодическими межфазными дискообразными дефектами. Механика композитных материалов, т. 55, № 1, 2019г. стр.2-24.
- [10] Акопян В.Н. Осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного, слоистого пространства с параллельными монетообразными трещинами. Труды XVIII межд. конференции "Современные проблемы механики сплошной среды", Ростов-на-Дону, том 1, 2016, с. 35-39.
- [11] Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Мурашкин Е.В. Об осесимметричном напряжённом состоянии равномерно слоистого пространства, содержащего систему периодических внутренних дискообразных трещин. Известия НАН РА, Механика, 2019, т.72, № 4, с.27-37.
- [12] Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Казаков К. Осесимметричное напряжённое состояние равномерно слоистого пространства с периодическими системами внутренних дискообразных трещин и включений. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2020. №2, с.25-40.
- [13] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640с
- [14] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1110с.
- [15] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 738с.
- [16] Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л., Гостехтеориздат, 1949. 270с.
- [17] A.V.Sahakyan, H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi:10.1088/1742-6596/991/1/012070

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович - доктор физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (+374 10) 56 81 88, email: vhakobyan@sci.am

Григорян Арам Арутюнович - аспирант Института механики НАН РА

email: grigoryan.aram.4@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович - канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА

email: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию ...