ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №4, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.4.4

СООТНОШЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ МОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ДЕФОРМАЦИОННОЙ КОНЦЕПЦИЕЙ «СДВИГ ПЛЮС ПОВОРОТ»

Саркисян С.О.

Ключевые слова: моментная теория оболочек, деформационная концепция «сдвиг плюс поворот», срединная поверхность оболочки, уравнения неразрывности деформаций

Relationships of deformation continuity of the middle surface of moment shells with the deformation concept "shear plus rotation"

Sargsyan S.H.

Key words: moment theory of shells, deformation concept "shear plus rotation", middle surface of the shell, equations of continuity of deformation

In this paper, based on the three-dimensional moment theory of elasticity, a mathematical model of moment shells with the deformation concept "shear plus rotation" is constructed, equilibrium equations, geometric and physical relations of elasticity are obtained and boundary conditions are established. Based on the completeness of the constructed applied theory, the equations of continuity of deformations of the middle surface of the shell are established as necessary and sufficient conditions for the integrability of the system of the differential equations, when the values of the components of the deformation and bending-torsion tensors are given and it is required to determine the components of the vectors of displacement and free rotation.

Սարգսյան Ս.Հ.

«Սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպցիայով մոմենտային թաղանթների միջին մակերևույթի դեֆորմացիայի անխզելիության առընչությունները

Հիմնական բառեր: «սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպցիա, մոմենտային թաղանթների միջին մակերևույթ, դեֆորմացիաների անխզելիության հավասարումներ

Աշխատանքում տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով առաձգականության մոմենտային եռաչափ տեսության հիման վրա կառուցվում է «սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպցիայի հատկանիշով օժտված մոմենտային թաղանթների մաթեմատիկական մոդելը՝ արտածվում են հավասարակշռության հավասարումները, երկրաչափական առընչությունները և հաստատվում եզրային պայմանները: Կառուցված այս տեսության լրիվության հանգամանքից ելնելով հաստատվում են թաղանթի միջին մակերևույթի դեֆորմացիայի անխզելիության հավասարումները, որպես դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, երբ խնդիր է դրվում դեֆորմացիայի և ծռում-ոլորումների թենզորների բաղադրիչների հայտնի արժեքների միջոցով որոշել տեղափոխության և անկախ պտույտի վեկտորների բաղադրիչները:

В работе на основе трехмерной моментной теории упругости строится математическая модель моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот», выводятся уравнения равновесия, геометрические соотношения, физические соотношения упругости и устанавливаются

граничные условия. Исходя из полноты построенной прикладной теории устанавливаются уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки как необходимые и достаточные условия интегрируемости той системы дифференциальных уравнений, когда заданы значения компонент тензоров деформаций и изгиба-кручения и требуется определить компоненты векторов перемещения и свободного поворота.

Введение. В классической теории упругости при определении смещений по компонентам деформации, выводятся условия совместности Сен-Венана [1]. Из таких же соображений в моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений выводятся соответствующие соотношения неразрывности [2], как условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений, к решению которой приводится задача о разыскании перемещений и свободных поворотов при заданных компонентах тензоров деформаций и изгиба-кручения.

Аналогичными соображениями выводятся уравнения неразрывности деформаций и в теории оболочек. Для оболочек, на основе классической теории упругости и гипотез Кирхгофа-Лява, эти зависимости были выведены в работе [3]. В рамках теории оболочек типа Тимошенко уравнения неразрывности выведены в работе [4].

В работе [5], в рамках моментой теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений,, на основе достаточно общих гипотез, построена прикладная теория оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» [6] (иначе назовем “моменто-мембранной теорией оболочек”), которая является моделью деформаций многих наноматериалов [7,8]. В данной работе для полноты теории [5], выведены соответствующие соотношения неразрывности (условия сплошности и гладкости) деформированной срединной поверхности оболочки.

1. Постановка задачи. Трехмерные уравнения и граничные условия моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Как основу будем рассматривать трехмерные уравнения линейной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [2] в области оболочки толщиной $2h$:

Уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0, \qquad \nabla \cdot \underline{\underline{\mu}} + \underline{\underline{\sigma}}_x = 0, \tag{1.1}$$

Геометрические уравнения

$$\underline{\underline{\gamma}} = \nabla \underline{V} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\omega}, \qquad \underline{\underline{\chi}} = \nabla \underline{\omega}. \tag{1.2}$$

Физические соотношения упругости

$$\begin{gathered}\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{E}} \cdot \cdot \underline{\underline{\gamma}} + 2\mu \underline{\underline{\gamma}}^{(s)} + 2\alpha \underline{\underline{\gamma}}^{(a)}, \\ \underline{\underline{\mu}} = \beta \underline{\underline{E}} \cdot \cdot \underline{\underline{\chi}} + 2\gamma \underline{\underline{\chi}}^{(s)} + 2\varepsilon \underline{\underline{\chi}}^{(a)},\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь, $\underline{\underline{\sigma}}$ и $\underline{\underline{\mu}}$ -тензоры напряжений и моментных напряжений; $\underline{\underline{\gamma}}$ и $\underline{\underline{\chi}}$ -тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\underline{V}$ и $\underline{\omega}$ -векторы перемещения и поворота; $\lambda, \mu -$ постоянные Ламе, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon -$ упругие постоянные в рамках моментной теории упругости; ∇ - дифференциальный оператор Гамильтона; $\underline{\underline{E}}$ -единичный тензор; $\underline{\underline{\sigma}}_x$ - векторный инвариант тензора напряжений; $\underline{\underline{E}}\cdot\cdot\underline{\underline{\gamma}}$ и $\underline{\underline{E}}\cdot\cdot\underline{\underline{\chi}}$ -двойное скалярное произведение указанных тензоров; индексом $(s)-$ отмечены симметричные составляющие, а индексом (a) - антисимметричные составляющие соответствующих тензоров.

Приведённую в инвариантной форме полную систему уравнений моментной теории упругости в дальнейшем будем рассматривать в системе координат α_1, α_2, z, где α_1, α_2 представляют собой линии главных кривизн срединной поверхности оболочки $(z=0)$, а прямолинейная ось z направлена по нормали к этой поверхности. Коэффициенты Ламе такой триортогональной системы координат имеют вид [3]:

$$H_i = A_i\left(1+\frac{z}{R_i}\right) \quad (i=1,2), \quad H_3 = 1, \tag{1.4}$$

где A_i, R_i - коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

К системе уравнений (1.1)-(1.3) (в координатной системе α_1, α_2, z) необходимо присоединить граничные условия.

Будем считать, что на лицевых поверхностях оболочки $\left(z=\pm h\right)$, заданы соответствующие компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений:

$$\sigma_{3k}\big|_{z=\pm h} = p_k^{\pm}, \quad \mu_{3k}\big|_{z=\pm h} = m_k^{\pm} \quad (k=1,2,3), \tag{1.5}$$

а на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$, на Σ' -заданы соответствующие компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений, а на Σ'' – компоненты векторов перемещения и свободного поворота.

2.Основные гипотезы построения теории моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот». Уравнения, связывающие деформации и изгиб-кручения с перемещениями и независимыми поворотами. Уравнения равновесия, соотношения упругости и граничные условия.

Для построения моментной модели оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» примем следующие достаточно общие гипотезы.

1). Оболочку будем считать тонкой. Это означает, что $\dfrac{h}{R} \ll 1$, где R -наименьший радиус кривизны срединной поверхности, и порождает следующее приближенное равенство:

$$1+\frac{z}{R_i} \approx 1 \quad \left(i=1,2\right). \tag{2.1}$$

2). $\sigma_{33};\sigma_{3i};\mu_{33};\mu_{3i}$ – пренебрежимо малы относительно $\sigma_{11},\sigma_{22};\sigma_{i3};\mu_{11},\mu_{22};\mu_{i3}$, $\left(i=1,2\right)$ соответственно.

3). Будем считать, что компоненты векторов перемещения и поворота не зависят от координаты z:

$$V_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2),\ \ V_3 = w(\alpha_1,\alpha_2)\ (i=1,2);\ \ \ \omega_k = \Omega_k(\alpha_1,\alpha_2)\ \ (k=1,2,3). \quad (2.2)$$

Отметим, что принятые выше гипотезы базируются на результатах [9] асимптотического метода интегрирования граничной задачи (1.1)-(1.3), (1.5), в тонкой области оболочки.

На основе гипотез 1) – 3), из геометрических соотношений (1.2) (в системе координат α_1,α_2,z) для деформаций и изгибов-кручений получим

$$\begin{gathered}
\gamma_{ii}=\Gamma_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\ \ \gamma_{ij}=\Gamma_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\ \ \gamma_{i3}=\Gamma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\\
\gamma_{3i}=(-1)^i\cdot\Omega_j,\quad \gamma_{33}=0,\quad \chi_{ii}=k_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\\
\chi_{ij}=k_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\ \ \chi_{i3}=k_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\ \ \chi_{3i}=0,\ \ \chi_{33}=0\ \ (i\neq j=1,2),
\end{gathered} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{gathered}
\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{R_i}+(-1)^j\Omega_j,\\
\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i+(-1)^i\Omega_3,\quad k_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}\ \ ,\\
k_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\ \ k_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i\ \ (i\neq j=1,2).
\end{gathered} \quad (2.4)$$

Здесь (2.4) представляют собой геометрические соотношения модели моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот».

Если принять в основу физические соотношения трехмерной теории (1.3), гипотезы 1) – 3) и соотношения (2.3), получим выражения для напряжений и моментных напряжений для модели моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот».

Если ввести интегральные характеристики усилий и моментов для указанной модели

$$\begin{gathered}
T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}dz,\quad S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}dz,\quad L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dz,\\
N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dz,\ \ L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dz,\ \ L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}dz,\quad i\neq j=1,2,
\end{gathered} \quad (2.5)$$

где T_{ii} – нормальные усилия; S_{ij} – касательные усилия; N_{i3} – перерезывающие усилия; L_{ij} – изгибающие моменты; L_{ii} и L_{i3} – крутящие моменты, тогда из соответствующих уравнений трехмерной теории получим соотношения упругости и дифференциальные уравнения равновесия для прикладной модели моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот»:

Соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}), \quad S_{ij} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij} + (\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right], \; N_{i3} = 2G^* h\Gamma_{i3},$$

$$L_{ii} = 2h\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}[2(\beta+\gamma)k_{ii} + \beta k_{jj}], \tag{2.6}$$

$$L_{ij} = 2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{ij} + (\gamma-\varepsilon)k_{ji}\right], \; L_{i3} = 2Bhk_{i3} \quad (i \neq j = 1,2).$$

Уравнениям равновесия (движения)

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jT_{ii})}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iS_{ji})}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj} + \frac{N_{i3}}{R_i} = -(p_i^+ - p_i^-),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2} = \left(p_3^+ - p_3^-\right),$$

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jL_{ii})}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iL_{ji})}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}L_{ij} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}L_{jj} + \tag{2.7}$$

$$+\frac{L_{i3}}{R_i} + (-1)^j N_{j3} = (m_i^+ - m_i^-) + (-1)^j h(p_j^+ + p_j^-),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2} - (S_{12} - S_{21}) = (m_3^+ - m_3^-), \; \left(i \neq j = 1,2\right).$$

К определяющей системе (2.4), (2.6), (2.7) прикладной модели моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот», присоединим граничные условия:

На части границы (Γ') области срединной поверхности оболочки (S), где заданы усилия и моменты, граничные условия имеют вид (например, для края, совпадающего с координатной линией α_2):

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S_{12} = S_{12}^*, \quad N_{13} = N_{13}^*, \quad L_{11} = L_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^*, \quad L_{13} = L_{13}^*. \tag{2.8}$$

На части границы (Γ'') области срединной поверхности оболочки (S), где заданы перемещения и свободные повороты, граничные условия будут выражаться следующим образом:

$$u_1 = u_1^*, \;\; u_2 = u_2^*, \;\; w = w^*, \;\; \Omega_1 = \Omega_1^*, \;\; \Omega_2 = \Omega_2^*, \;\; \Omega_3 = \Omega_3^*. \tag{2.9}$$

Могут быть также и граничные условия смешанного вида.

Таким образом, уравнения (2.4), (2.6), (2.7) и граничные условия (2.8), (2.9), представляют собой прикладную модель моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс свободный поворот».

Отметим, что уравнения (2.6), (2.7), (2.4) теории моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс свободный поворот» представляют собой систему дифференциальных уравнений 12-го порядка, при этом, на каждом из торцов оболочки имеются по шесть граничных условий (2.8) или (2.9).

3. Определение перемещений и свободных поворотов оболочки по заданным компонентам тензоров деформаций и изгиба-кручения. Уравнения неразрывности срединной поверхности оболочки.

Связь между компонентами тензоров деформаций и изгиба-кручения, с одной стороны, и компонентами векторов перемещения и свободного поворота, с другой стороны, задается формулами (2.4). Рассматривая (2.4) как дифференциальные уравнения относительно перемещений (u_1, u_2, w) и свободных поворотов $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ при заданных компонентах тензоров деформаций и изгиба-кручения, следует констатировать, что при определении указанных выше шести величин имеем двенадцать дифференциальных уравнений.

Перейдем к определению перемещений и свободных поворотов срединной поверхности оболочки по заданным компонентам тензоров деформаций и изгиба-кручения.

Имея ввиду, что любой вектор $\vec{a}$ в каждой точке поверхности можно представить в виде

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \vec{a}_3\vec{e}_3, \tag{3.1}$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – тройка локального ортогонального базиса для этой поверхности, а a_1, a_2, a_3 – ортогональные проекции указанного вектора на направления соответствующих ортов.

Если задавать срединную поверхность оболочки одним векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.2}$$

и ввести обозначения

$$\vec{r}_{\alpha_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1}, \qquad \vec{r}_{\alpha_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2}, \tag{3.3}$$

то векторы $\vec{r}_{\alpha_1}, \vec{r}_{\alpha_2}$ будут совпадать по направлению с касательными к координатным линиям α_1, α_2 соответственно.

Для срединной поверхности оболочки, которая отнесена к линиям кривизны α_1, α_2, локальный базис в каждой ее точке будет определяться с помощью ортов

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{A_1}\vec{r}_{\alpha_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{A_2}\vec{r}_{\alpha_2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \tag{3.4}$$

которые по определению ортогональны. Здесь необходимо иметь ввиду, что A_1 и A_2 представляют собой длины векторов соответственно $\vec{r}_{\alpha_1}, \vec{r}_{\alpha_2}$.

Таким образом, векторы перемещения и свободного поворота точек срединной поверхности оболочки можем представить так

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + w\vec{e}_3, \tag{3.5}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_1\vec{e}_1 + \Omega_2\vec{e}_2 + \Omega_3\vec{e}_3. \tag{3.6}$$

Так как орты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – функции координат α_1, α_2, дифференцирование вектора, представленного в форме (3.5) или (3.6), связано с дифференцированием этих ортов. Первые их производные выражаются через символы Кристоффеля-Шварца и составляют известные в теории поверхностей деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена, которые для поверхности, отнесенной к линиям кривизны, выведены в работе [10]. Используя эти формулы для производных векторов (3.5), (3.6) по α_1, α_2, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_1} &= A_1\left[\Gamma_{11}\vec{e}_1 + \left(\Gamma_{12} + \Omega_3\right)\vec{e}_2 + \left(\Gamma_{13} - \Omega_2\right)\vec{e}_3\right], \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_2} &= A_2\left[\left(\Gamma_{21} - \Omega_3\right)\vec{e}_1 + \Gamma_{22}\vec{e}_2 + \left(\Gamma_{23} - \Omega_1\right)\vec{e}_3\right], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \alpha_1} = A_1\left(k_{11}\vec{e}_1 + k_{12}\vec{e}_2 + k_{13}\vec{e}_3\right), \qquad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \alpha_2} = A_2\left(k_{21}\vec{e}_1 + k_{22}\vec{e}_2 + k_{23}\vec{e}_3\right). \tag{3.8}$$

Как видим, векторы $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_1}, \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_2}$ и $\dfrac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \alpha_1}, \dfrac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \alpha_2}$ представлены через известные компоненты тензоров деформаций и изгиба-кручения срединной поверхности, тогда для определения $\vec{u}$ и $\vec{\Omega}$ в произвольной точке M срединной поверхности можем применить очевидные формулы:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_1}d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_2}d\alpha_2\right), \tag{3.9}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \int_{M_0}^{M} \left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right), \tag{3.10}$$

где M_0 – некоторая фиксированная точка на срединной поверхности, $\vec{u}_0$ и $\vec{\Omega}_0$ – значения векторов перемещения и поворота в этой точке, а интегралы взяты по кривой, принадлежащей срединной поверхности.

Отметим, что область срединной поверхности оболочки будем считать односвязной.

Теперь, исходя из формул (3.9), (3.10), найдем необходимые и достаточные условия неразрывности и гладкости деформированной срединной поверхности. Легко видеть, что если до деформации поверхность была сплошной и гладкой, то она останется такой же после деформации лишь тогда, когда перемещение $\vec{u}$ и поворот $\vec{\Omega}$ будут однозначными и непрерывными функциями точки. Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы деформированная срединная поверхность оставалась сплошной и гладкой, является независимость интегралов, входящих в (3.9), (3.10), от пути интегрирования.

Если $P(\alpha_1, \alpha_2)$ и $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ – однозначные и непрерывные в односвязной области функции и имеют непрерывные первые производные, то как известно, необходимым и достаточным условием независимости от пути интегрирования интегралов типа $\int_{M_0}^{M} P(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 + Q(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_2$ является выполнение равенства $\frac{\partial P}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1}$ во всей области изменения точки M. Применяя эту формулу к интегралам, входящим в (3.9), (3.10), получим следующие векторные равенства

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}, \tag{3.11}$$

которые обеспечивают сплошность и гладкость срединной поверхности оболочки после деформации.

Вычисляя указанные выше вторые производные и выполняя равенства (3.11), приходим к следующим шести уравнениям неразрывности деформации (сплошности и гладкости) срединной поверхности оболочки:

$$\frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_i \Gamma_{ii})}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial (A_j \Gamma_{ji})}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \Gamma_{ij} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Gamma_{ji} - \frac{\Gamma_{j3}}{R_i} + (-1)^j k_{i3} = 0,$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial (A_2 \Gamma_{23})}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial (A_1 \Gamma_{13})}{\partial \alpha_2} - \frac{\Gamma_{21}}{R_1} + \frac{\Gamma_{12}}{R_2} + k_{11} + k_{22} = 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_ik_{ii}\right)}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_jk_{ji}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}k_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}k_{jj}-\frac{k_{j3}}{R_i}=0,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2k_{23}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1k_{13}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{k_{21}}{R_1}+\frac{k_{12}}{R_2}=0,\qquad i\neq j=1,2.$$

Уравнения неразрывности (3.12) дадут нам возможность выявить впоследствии аналогию между статикой и геометрией моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот».

Отметим, что если в уравнениях (2.7), (2.6), (2.4) подставить $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}=0$, то придем к определяющим уравнениям моментной теории пластин с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот». В случае пластинки указанные уравнения разделяются на две группы: а) для плоского напряженного состояния пластики, б) для изгиба от срединной плоскости. Из (3.12) уравнения неразрывности срединной плоскости пластинки также выделяются.

При плоском напряженном состоянии пластинки (в декартовой прямоугольной системе координат) уравнения неразрывности деформаций будут:

$$\frac{\partial\Gamma_{21}}{\partial x_1}-\frac{\partial\Gamma_{11}}{\partial x_2}-k_{13}=0,$$

$$\frac{\partial\Gamma_{22}}{\partial x_1}-\frac{\partial\Gamma_{12}}{\partial x_2}-k_{23}=0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial k_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial k_{13}}{\partial x_2}=0.$$

Подставляя здесь $k_{13}=k_{23}=0$, придем к условию неразрывности деформации в случае классической теории плоского напряженного состояния пластинки (т.е. уравнению совместности Сен-Венана: $\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}$, $e_{xx}=\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $e_{yy}=\frac{\partial u_2}{\partial y}$, $e_{xy}=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}$).

При изгибе пластинки (в декартовой прямоугольной системе координат) уравнения неразрывности деформаций будут:

$$\frac{\partial\Gamma_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\Gamma_{13}}{\partial x_2}+k_{11}+k_{22}=0,$$

$$\frac{\partial k_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial k_{11}}{\partial x_2} = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial k_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial k_{12}}{\partial x_2} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во “Наука”. 1966. 708с.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon. 1986. 383 P.
3. Гольденвейзор А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ. 1953. 545 с.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Изд-во “Наукова думка”. 1973. 248с.
5. Саркисян С.О. Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов//Доклады НАН Армении. 2020. Т. 120. № 4.
6. Панин В.Е. Основы физической мезомеханики//Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. № 1. С. 5-22.
7. Sargsyan S.H. Discrete-continuous and continuous-moment models of graphene under in plane deformation//Phys. Mesomech. 2020. Vol. 23. N.4. P.309-315. –doi 10. 1134/S1029959920040049.
8. Саркисян С.О. Дискретная и континуальная модели деформаций графена по моментной теории//Труды XX Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”. Ростов-на- Дону 18-21 июня 2020. В двух томах. Том1. Изд-во Южнего федерального университетеа. 2020. С. 233-238.
9. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек//Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.
10. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1951. 344с.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович-член-корреспондент НАН РА, доктор физ-мат. наук, профессор. Ширакский государственный университет. (093) 15 16 98
E-mail: s_sargsyan@yahoo.com