

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ С ШАРНИРНО - ЗАКРЕПЛЕННЫМ
ТОРЦОМ**

Գուլգազարյան Գ.Ր.

Ключевые слова: краевые колебания, собственные частоты, цилиндрическая панель.

Ghulghazaryan G.R.

Free vibrations of thin elastic orthotropic cylindrical panel with hinge-mounted end

Keywords: boundary vibrations, eigen frequencies, cylindrical panel.

On the paper, using the system of equations corresponding to the classical theory of orthotropic cylindrical shells, the free vibrations of thin elastic orthotropic circular cylindrical panel with hinge-mounted end is investigated. To calculate the eigen frequencies and to identify the respective natural modes it is employ the generalized Kantorovich-Vlasov method of reduction to ordinary differential equations. The dispersion equations for finding the eigen frequencies of possible types of vibrations are derived. An asymptotic link between the dispersion equations of problem in hand and analogous problem for the rectangular plate is shown. Also, a link between the dispersion equations of the problem in hand and the boundary-value problem for the semi - infinite orthotropic circular cylindrical panel with free edges is shown.

Գ.Ր. Դուլգազարյան

**Ծայրում հողակապորեն ամրակցված բարակ առաձգական օրթոտրոպ
գլանաձև վահանակի ազատ տատանումները:**

Հիմնարարներ եզրային տատանումներ, սեփական հաճախություններ, գլանաձև վահանակ:

Աշխատանքում, օգտվելով օրթոտրոպ գլանային թաղանթների դասական տեսությանը համապատասխան հավասարումների համակարգից, հետազոտվում է ծայրում հողակապորեն ամրակցված բարակ առաձգական օրթոտրոպ գլանաձև վահանակի ազատ սեփական տատանումները: Սեփական հաճախությունների արժեքները և նրանց համապատասխան սեփական ֆունկցիաները գտնելու համար կիրառվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների բերման Կանտորովիչ-Վլասովի մեթոդը: Հնարավոր տիպերի սեփական տատանումների հաճախությունները գտնելու համար արտաձված են դիսպերսիոն հավասարումներ: Ասիմպտոտիկ կապ է հաստատված դիտարկվող խնդրի և ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալի համար նման խնդրի դիսպերսիոն հավասարումների միջև: Ասիմպտոտիկ կապ է հաստատված նաև, դիտարկվող խնդրի և երեք եզրերով ազատ կիսասանվերջ օրթոտրոպ գլանային թաղանթի սեփական արժեքների որոնման խնդրի դիսպերսիոն հավասարումների միջև:

В статье с использованием системы уравнений, соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, исследованы свободные колебания тонкой упругой ортотропной круговой цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом. Для расчета собственных частот и идентификации соответствующих собственных мод используется обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова. Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Показана асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для прямоугольной пластины. Также показана связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и краевой задачи для полубесконечной ортотропной круговой цилиндрической панели со свободными краями.

Введение. Известно, что у свободного края ортотропной пластинки, независимо друг от друга, существуют планарные и изгибные колебания [1]-[3]. При искривлении пластинки два указанных типа колебания оказываются связанными, давая начало двум новым типам локализованных у свободного края (преимущественно планарных и преимущественно изгибных типов) колебаний. У свободного края упругой цилиндрической панели происходит трансформация одного типа колебания в другой. При этой трансформации колебаний, с учетом геометрических и механических параметров панели, возникает сложная картина распределения частот собственных колебаний конечных и бесконечных цилиндрических панелей со свободным краем [4]-[13]. Заметим, еще, что для тонких цилиндрических оболочек со свободным краем первые частоты распределены очень густо. Поэтому численный расчет не всегда эффективен. С увеличением числа свободных краев цилиндрических панелей картина распределения частот собственных колебаний становится более сложной [10]-[13]. Поэтому, исследования краевого резонанса пластин и цилиндрических панелей с шарнирно закрепленным краем являются наиболее трудными задачами в теории колебаний пластин и оболочек [7-9]. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий, а также численными методами. В настоящей работе исследуются свободные колебания тонкой упругой цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным краем. Задача не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор, соответствующий задаче, самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому, для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм можно применять обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [14]-[18]. В качестве базисных функций используются собственные функции задачи

$$w^{VIII} = \theta^8 w, \quad w|_{\beta=0,s} = w'|_{\beta=0,s} = w''|_{\beta=0,s} = w'''|_{\beta=0,s} = 0, \quad 0 \leq \beta \leq s. \quad (1)$$

Задача (1) самосопряженная и положительно определенная. Собственным значениям $\theta_m^8, m = \overline{1, \infty}$ задачи (1) соответствуют собственные функции

$$w_m(\theta_m \beta) = \frac{\Delta_1}{\Delta} x_1(\theta_m \beta) + \frac{\Delta_2}{\Delta} x_2(\theta_m \beta) + \frac{\Delta_3}{\Delta} x_3(\theta_m \beta) + x_4(\theta_m \beta), \quad 0 \leq \beta \leq s, m = \overline{1, \infty} \quad (2)$$

$$x_1(\theta_m \beta) = ch\theta_m \beta - ch \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} - sh \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}},$$

$$x_2(\theta_m \beta) = sh\theta_m \beta - \sqrt{2} ch \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}}, \quad x_3(\theta_m \beta) = sh\theta_m \beta - \sqrt{2} sh \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}},$$

$$x_4(\theta_m \beta) = \cos\theta_m \beta - ch \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} + sh \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_m \beta}{\sqrt{2}},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1(\theta_m s) & x_2(\theta_m s) & x_3(\theta_m s) \\ x_1'(\theta_m s) & x_2'(\theta_m s) & x_3'(\theta_m s) \\ x_1''(\theta_m s) & x_2''(\theta_m s) & x_3''(\theta_m s) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = - \begin{vmatrix} x_4(\theta_m s) & x_2(\theta_m s) & x_3(\theta_m s) \\ x_4'(\theta_m s) & x_2'(\theta_m s) & x_3'(\theta_m s) \\ x_4''(\theta_m s) & x_2''(\theta_m s) & x_3''(\theta_m s) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$\Delta_2 = - \begin{vmatrix} x_1(\theta_m s) & x_4(\theta_m s) & x_3(\theta_m s) \\ x_1'(\theta_m s) & x_4'(\theta_m s) & x_3'(\theta_m s) \\ x_1''(\theta_m s) & x_4''(\theta_m s) & x_3''(\theta_m s) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = - \begin{vmatrix} x_1(\theta_m s) & x_2(\theta_m s) & x_4(\theta_m s) \\ x_1'(\theta_m s) & x_2'(\theta_m s) & x_4'(\theta_m s) \\ x_1''(\theta_m s) & x_2''(\theta_m s) & x_4''(\theta_m s) \end{vmatrix},$$

которые, вместе с их производными до второго порядка, образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0, s]$ [8],[9]. Заметим, что $\theta_m, m = \overline{1, \infty}$ положительные нули определителя Вронского функции (3) в точке $\beta = s$. Введем обозначения

$$\beta'_m = \frac{\int_0^s (w'_m(\theta_m \beta))^2 d\beta}{\int_0^s (w_m(\theta_m \beta))^2 d\beta}, \quad \beta''_m = \frac{\int_0^s (w''_m(\theta_m \beta))^2 d\beta}{\int_0^s (w'_m(\theta_m \beta))^2 d\beta} \quad (4)$$

Заметим, что в формулах (3) (4) производные взяты по $\theta_m \beta$ и $\beta'_m \rightarrow 1, \beta''_m \rightarrow 1$, при $m \rightarrow +\infty$.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Предполагается, что образующие цилиндрической панели ортогональны торцам панели. На срединной поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α, β) , где $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$ и $\beta (0 \leq \beta \leq s)$ изменяются соответственно по образующей и направляющей окружности. Здесь l – длина цилиндрической панели, а s – длина направляющей окружности срединной поверхности.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочек, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанных в выбранных криволинейных координатах α, β [19]

$$\begin{aligned} & -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1, \\ & -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \frac{\mu^4}{R^2} \left(4B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2, \quad (1.1) \\ & \mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta^3} + \right. \\ & \left. (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3. \end{aligned}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора перемещений соответственно в направлениях α, β и нормали к срединной поверхности панели; R – радиус направляющей окружности срединной поверхности; $\mu^4 = h^2/12$ (h – толщина оболочки); $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний; ρ – плотность материала; B_{ij} – коэффициенты упругости цилиндрической панели.

Граничные условия, при $\alpha = 0, l$ и $\beta = 0, s$ имеют вид [19].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{4\mu^4}{R} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.2) \\ & u_2 \Big|_{\alpha=l} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \Big|_{\alpha=l} = 0, \end{aligned}$$

$$u_3|_{\alpha=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=l} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} = 0. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.2) и (1.4) выражают условия свободного края при $\alpha = 0$ и $\beta = 0, s$ соответственно. Соотношения (1.3) являются условиями шарнирного закрепления при $\alpha = l$, (Рис.1).

2. Вывод и анализ характеристических уравнений.

В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1), спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Решение системы (1.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m(\theta_m \beta), v_m w'_m(\theta_m \beta), w_m(\theta_m \beta)\} \exp(\theta_m \kappa \alpha), \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (2.1)$$

Здесь $w_m(\theta_m \beta), m = \overline{1, \infty}$ - определяются по формуле (2), u_m, v_m, κ - неопределенные постоянные.

При этом условия (1.4) выполняются автоматически. Подставим (2.1) в (1.1). Полученные уравнения скалярным образом умножаем на вектор функции $(w_m(\theta_m \beta), w'_m(\theta_m \beta), w_m(\theta_m \beta))$ и интегрируем в пределах от 0 до s . Из первых двух полученных уравнений имеем

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) u_m = \varepsilon_m \kappa \left\{ a_m - a^2 \frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}} \beta'_m l_m + \varepsilon_m^2 a^2 \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11}B_{66}} d_m \right\}, \quad (2.2)$$

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) v_m = \varepsilon_m \{ a^2 g_m l_m - b_m \beta_m \}, \quad (2.3)$$

а из третьего уравнения, учитывая соотношения (2.2) и (2.3), получим характеристические уравнения

$$R_{mm} c_m + \varepsilon_m^2 \left\{ c_m + b_m \beta'_m - \frac{B_{12}}{B_{11}} \kappa^2 a_m + a^2 [R_{mm} g_m d_m - 2l_m b_m \beta'_m] + \varepsilon_m^2 a^2 d_m \left(b_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \kappa^2 \right) + a^4 g_m l_m^2 \beta'_m \right\} = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (2.4)$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \kappa^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta'_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + (\beta'_m - \beta''_m) \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}}, \quad b_m = B_1 \kappa^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_{1m}^2);$$

$$c_m = \kappa^4 - B_2 \kappa^2 + \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 \right) \kappa^2 + (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta''_m - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right); \quad (2.5)$$

$$B_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}}, \quad B_2 = \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m - 2B_{12} B_{66} \beta'_m}{B_{11} B_{66}}, \quad d_m = \frac{4B_{66}}{B_{11}} \kappa^2 - \beta''_m,$$

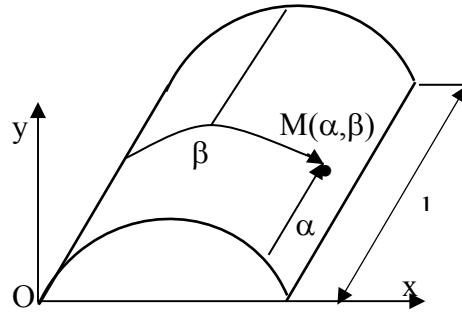


Рис. 1.

$$g_m = \frac{B_{22}}{B_{66}} \kappa^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta'_m + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2, \quad l_m = \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \kappa^2 - \beta''_m, \quad \eta_{im}^2 = \frac{B_{22} \lambda_i}{B_{66} \theta_m^2}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$R_{mm} = \alpha^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \kappa^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta'_m \kappa^2 + \beta'_m \beta''_m \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_{3m}^2, \quad \alpha^2 = \frac{h^2}{12} \theta_m^2, \quad \epsilon_m = \frac{1}{R \theta_m}.$$

Пусть $\kappa_j, j = \overline{1,4}$ - попарно различные нули уравнения (2.4) с неположительными действительными частями и $\kappa_{j+4} = -\kappa_j, j = \overline{1,4}$. Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j = \overline{1,8}$ нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) при $\kappa = \kappa_j, j = \overline{1,8}$ соответственно. Решение задачи (1.1)-(1.4) ищем в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^8 u_i^{(j)} w_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

Подставим (2.6) в граничные условия (1.2) и (1.3). Скалярным образом, каждое полученное уравнение, кроме второго, умножаем на $w_m(\theta_m \beta)$, а второе на $w'_m(\theta_m \beta)$ и интегрируем в пределах от 0 до S . В итоге получим совокупность систем уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \epsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}}, \quad i = \overline{1,4} \\ \sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} \exp(\theta_m \kappa_j \alpha) w_j}{c_m^{(j)} + \epsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}}, \quad \overline{5,8} \end{cases} \quad m = \overline{1, \infty} \quad (2.7)$$

$$M_{1j}^{(m)} = \kappa_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} b_m^{(j)} \beta'_m - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)} + \epsilon_m^2 a^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11}^2} d_m^{(j)} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) - a^2 \frac{B_{12}}{B_{11}} l_m^{(j)} \beta'_m \left(\kappa_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta'_m - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right),$$

$$M_{2j}^{(m)} = \beta'_m \kappa_j \left\{ a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2 \left[4c_m^{(j)} - l_m^{(j)} \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} \kappa_j^2 + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \beta'_m + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) \right] + \epsilon_m^2 a^2 \left(4b_m^{(j)} + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_m^{(j)} - 4a^2 g_m^{(j)} \frac{B_{12}}{B_{22}} \kappa_j^2 \right) \right\}, \quad (2.8)$$

$$M_{3j}^{(m)} = \left(\kappa_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta'_m \right) c_m^{(j)} + \epsilon_m^2 \left[a^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \kappa_j^4 - \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m}{B_{11} B_{22}} \kappa_j^2 \right) - \frac{B_{12}}{B_{11}} b_m^{(j)} \beta'_m \right],$$

$$M_{4j}^{(m)} = \kappa_j \left\{ \left(\kappa_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m \right) c_m^{(j)} + \epsilon_m^2 \left[a^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \kappa_j^4 - \frac{B_{11} B_{22} \beta''_m - B_{12}^2 \beta'_m - 4B_{12} B_{66} \beta'_m}{B_{11} B_{22}} \kappa_j^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} b_m^{(j)} \beta'_m \right] \right\},$$

$$M_{5j}^{(m)} = \left(b_m^{(j)} + \epsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} l_m^{(j)} \right) \beta'_m, \quad M_{6j}^{(m)} = M_{1j}^{(m)}, \quad M_{7j}^{(m)} = c_m^{(j)} + \epsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}, \quad M_{8j}^{(m)} = M_{3j}^{(m)}.$$

Верхний индекс (j) означает, что соответствующая функция взята при $\kappa = \kappa_j$. Чтобы система (2.7) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = \exp\left(-\sum_{j=1}^4 z_j\right) \text{Det} \|T_{ij}^{(m)}\|_{i,j=1}^2 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
T_{11}^{(m)} &= \|M_{ij}^{(m)}\|_{i,j=1}^4, \quad T_{12}^{(m)} = \|(-1)^{i-1} M_{ij}^{(m)} \exp(z_j)\|_{i,j=1}^4, \\
T_{21}^{(m)} &= \|M_{ij}^{(m)} \exp(z_j)\|_{i=5,j=1}^{8,4}, \quad T_{22}^{(m)} = \|M_{ij}^{(m)}\|_{i=5,j=1}^{8,4}, \quad z_j = \theta_m \kappa_j l.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Численный анализ показывает, что левая часть этого равенства становится малой, когда два корня уравнения (2.4) близки друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель в левой части равенства (2.9), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого введем обозначения:

$$\begin{aligned}
[z_i z_j] &= \frac{\theta_m l (\exp(z_i) - \exp(z_j))}{(z_i - z_j)}, \quad [z_i z_j z_k] = \frac{\theta_m l ([z_i z_j] - [z_i z_k])}{(z_i - z_k)}, \\
[z_1 z_2 z_3 z_4] &= \frac{\theta_m l ([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4])}{(z_3 - z_4)}, \\
\sigma_1 &= \sigma_1(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4, \\
\sigma_2 &= \sigma_2(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_2 \kappa_4 + \kappa_3 \kappa_4, \\
\sigma_3 &= \sigma_3(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4, \\
\sigma_4 &= \sigma_4(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4, \\
\bar{\sigma}_k &= \sigma_k(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, 0), \quad \bar{\bar{\sigma}}_k = \sigma_k(\kappa_1, \kappa_2, 0, 0), \quad k = \overline{1,4}.
\end{aligned} \quad (2.11)$$

При этом $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$. Пусть $f_n, n = \overline{1,6}$ симметрический многочлен n -й степени от переменных $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$. Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$\begin{aligned}
f_n &= f_n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4); \quad \bar{f}_n = \bar{f}_n(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0); \quad \bar{\bar{f}}_n = \bar{\bar{f}}_n(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0); \quad n = \overline{1,6}; \quad (2.12) \\
f_1 &= \sigma_1; \quad f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2; \quad f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3; \quad f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4; \\
\bar{f}_5 &= \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3; \quad \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_3^3; \quad (2.13)
\end{aligned}$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.9), получим

$$\text{Det} \|T_{ij}^{(m)}\|_{i,j=1}^2 = K^2 \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (2.14)$$

$$K = (\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_3)(\kappa_1 - \kappa_4)(\kappa_2 - \kappa_3)(\kappa_2 - \kappa_4)(\kappa_3 - \kappa_4). \quad (2.15)$$

Выражения для m_{ij} приведены в приложении 1. Уравнение (2.9) эквивалентно уравнениям

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (2.16)$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3 , заключаем, что уравнение (2.16) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (2.4) - характеристическое уравнение системы (1.1), а уравнение (2.16) - дисперсионное уравнение задачи (1.1)-(1.4).

В пункте 5 исследованы асимптотики дисперсионных уравнений (2.16) при $\varepsilon_m = 1/(\theta_m R) \rightarrow 0$ (предельный переход к пластинке с шарнирно- закрепленным торцом или к локализации колебаний у свободных краев цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом) и при $\theta_m l \rightarrow \infty$ (предельный переход к полубесконечной цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом или к локализации колебаний у свободных краев цилиндрической панели с шарнирно закрепленным торцом). Для проверки достоверности полученных в пункте 5 асимптотических связей, в следующих двух параграфах исследуются планарные и изгибные собственные колебания ортотропной прямоугольной пластины с шарнирно-закрепленным торцом.

3. Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластины с шарнирно-закрепленным торцом. Пусть ортотропная прямоугольная пластина отнесена к триортогональной системе прямолинейных координат (α, β, γ) с началом в свободной торцевой плоскости так, что координатная плоскость $\alpha\beta$ совпадает со срединной плоскостью пластины, а главные направления упругости материала пластинки совпадают с координатными линиями (Рис.2).

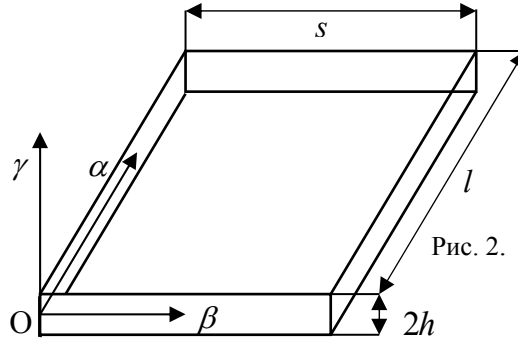


Рис. 2.

Пусть s, l являются шириной и длиной пластины соответственно. При условиях свободного колебания рассматривается вопрос существования планарных колебаний прямоугольной пластины с шарнирно-закрепленным торцом. В качестве исходных уравнений, примем уравнения малых планарных колебаний, которые соответствуют классической теории ортотропных пластин [19]

$$\begin{aligned} -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} &= \lambda u_1; \\ -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} &= \lambda u_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь u_1, u_2 - проекции вектора перемещений соответственно в направлениях α, β ; B_{ij} - коэффициенты упругости: $\lambda = \rho \omega^2$, ω - угловая частота собственных колебаний; ρ - плотность материала. Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (3.2)$$

$$u_2 \Big|_{\alpha=l} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=l} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} = 0. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.2) и (3.4) выражают условия свободного края при $\alpha = 0$ и $\beta = 0, s$ соответственно. Соотношения (3.3) являются условиями шарнирного-закрепления при $\alpha = l$, (Рис.2).

Задача (3.1)-(3.4) не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор, соответствующий задаче, самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому, для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм можно применять обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [14]- [18]. Решение системы (3.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2) = \{u_m w_m(\theta_m \beta), v_m w'_m(\theta_m \beta)\} \exp(\theta_m y \alpha), \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (3.5)$$

Здесь $w_m(\theta_m \beta), m = \overline{1, \infty}$ -определяются по формуле (2), u_m, v_m, y - неопределенные постоянные. При этом условия (3.4) выполняются автоматически. Подставим (3.5) в (3.1). Полученные уравнения скалярным образом умножаем на вектор функции $(w_m(\theta_m \beta), w'_m(\theta_m \beta))$ и интегрируем в пределах от 0 до s . В итоге получим систему уравнений

$$\left(y^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_m^2) \right) u_m - \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} y \beta'_m v_m = 0, \\ \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{66}} y u_m + \left(y^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} \beta''_m + \eta_m^2 \right) v_m = 0, \quad (3.6)$$

где $\eta_m^2 = \lambda / (\theta_m^2 B_{66})$, а θ_m и β'_m, β''_m определены в (2) и (4) соответственно. Приравняв определитель системы (3.6) к нулю, получим характеристические уравнения системы уравнений (3.1)

$$c_m = y^4 - B_2 y^2 + \left(\frac{B_{66} + B_{11}}{B_{11}} \right) \eta_m^2 y^2 + (\beta'_m - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta''_m - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, \infty} : \quad (3.7)$$

Пусть y_1 и y_2 различные корни уравнения (3.7) с неположительными действительными частями и $y_{2+j} = -y_j, j = 1, 2$. В качестве решения системы (3.6) при $y = y_j, j = \overline{1, 4}$ возьмем

$$u_m^{(j)} = \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} y_j \beta'_m, \quad v_m^{(j)} = y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_m^2), \quad j = \overline{1, 4}.$$

Представим решение задачи (3.1)-(3.4) в виде

$$u_1 = \sum_{j=1}^4 u_m^{(j)} w_m(\theta_m \beta) \exp(\theta_m y_j \alpha) w_j, \quad u_2 = \sum_{j=1}^4 v_m^{(j)} w'_m(\theta_m \beta) \exp(\theta_m y_j \alpha) w_j \quad (3.8)$$

Подставим (3.8) в граничные условия (3.2) и (3.3). Каждое полученное уравнение, кроме второго, умножаем на $w_m(\theta_m \beta)$, а второе на $w'_m(\theta_m \beta)$ и интегрируем в пределах от 0 до s . В итоге получим совокупность систем уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 R_{1j}^{(m)} w_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 R_{5j}^{(m)} \exp(z_j) w_j = 0, \\ \sum_{j=1}^4 R_{2j}^{(m)} w_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 R_{6j}^{(m)} \exp(z_j) w_j = 0. \end{aligned} \right. \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (3.9)$$

$$R_{1j}^{(m)} = y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_m^2), \quad R_{2j}^{(m)} = y_j \left(y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta'_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad (3.10)$$

$$R_{5j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}(\beta'_m - \eta_m^2), R_{6j}^{(m)} = y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}(\beta'_m - \eta_m^2), j = \overline{1,4}.$$

Приравнивая определитель Δ_e системы (3.9) к нулю, получим дисперсионные уравнения

$$\Delta_e = \exp(-z_1 - z_2)(y_1 - y_2)^2 \left(\frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \right)^2 (y_1 + y_2)(\beta'_m - \eta_m^2)L_m(\eta_m) = 0, \\ m = \overline{1, \infty}, \quad (3.11)$$

$$L_m(\eta_m) = K_2(\eta_m)(1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + \\ (y_1 + y_2)K_4(\eta_m)(\exp(z_1) + \exp(z_2))[z_1 z_2], \quad (3.12)$$

$$K_{4,2}(\eta_m) = (\beta'_m - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22}\beta'_m - B_{12}^2\beta'_m}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) \pm \eta_m^2 y_1 y_2,$$

$$[z_1 z_2] = \theta_m l (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1). z_j = \theta_m y_j l, j = 1, 2.$$

Совокупность уравнений (3.11) эквивалентна совокупности уравнений,

$$L_m(\eta_m) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (3.13)$$

$\eta = 1$ принадлежит предельному спектру оператора соответствующего задаче (3.1)-(3.4). Этим фактом обосновывается существование множителя $(\beta'_m - \eta_m^2)$ в формулах (3.11) (см. [12]).

Заметим, что если y_1 и y_2 корни уравнения (3.7) с отрицательными действительными частями, то при $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни уравнения (3.13) аппроксимируются корнями уравнения

$$K_2(\eta_m) = (\beta'_m - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22}\beta'_m - B_{12}^2\beta'_m}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0, m = \overline{1, \infty} \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) являются аналогом уравнения Рэлея для достаточно длинной ортотропной прямоугольной пластины с тремя свободными сторонами (ср. [10-13]).

Для нахождения соответствующих собственных форм необходимо определить коэффициенты $w_j, j = \overline{1,4}$ из системы уравнений (3.9) при данной безразмерной характеристике собственного значения η_m . Можно взять

$$w_1 = \frac{R_1^{(m)} \exp(z_1 + 2z_2) + R_{52}^{(m)} R_2^{(m)} \exp(z_1) - 2R_{12}^{(m)} R_{22}^{(m)} R_{51}^{(m)} \exp(z_2)}{R_{51}^{(m)} R_1^{(m)} - R_{51}^{(m)} R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{11}^{(m)} R_{21}^{(m)} R_{52}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)}, \\ w_2 = \frac{R_{51}^{(m)} R_2^{(m)} - R_{51}^{(m)} R_1^{(m)} \exp(2z_1 + z_2) - 2R_{11}^{(m)} R_{21}^{(m)} R_{52}^{(m)} \exp(z_1)}{R_{51}^{(m)} R_1^{(m)} - R_{51}^{(m)} R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{11}^{(m)} R_{21}^{(m)} R_{52}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)}, \\ w_3 = \frac{R_{52}^{(m)} R_1^{(m)} \exp(z_1) + R_{52}^{(m)} R_2^{(m)} \exp(z_1 + 2z_2) - 2R_{12}^{(m)} R_{22}^{(m)} R_{51}^{(m)} \exp(2z_1 + z_2)}{R_{51}^{(m)} R_1^{(m)} - R_{51}^{(m)} R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{11}^{(m)} R_{21}^{(m)} R_{52}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)}, \\ w_4 = \exp(z_2), R_1^{(m)} = R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} - R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)}, R_2^{(m)} = R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} + R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)}.$$

3. Изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластины с шарнирно-закрепленным торцом. Пусть имеется ортотропная прямоугольная пластинка и

h, s, l являются соответственно толщиной, шириной и длиной пластинки (Рис.2). В условиях свободного колебания рассматривается вопрос существования изгибных колебаний прямоугольной пластины с шарнирно - закрепленным торцом. В качестве исходного уравнения, примем уравнение малых изгибных колебаний, которое соответствует классической теории ортотропных пластин [19]

$$\mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) = \lambda u_3 \quad (4.1)$$

где $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$ и $\beta (0 \leq \beta \leq s)$ являются ортогональными прямолинейными координатами точки срединной плоскости пластины: l – длина, а s – ширина пластины; u_3 – нормальная компонента вектора перемещения точки срединной плоскости; $\mu^4 = h^2/12$ (h – толщина пластины); $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний; ρ – плотность материала; B_{ij} – коэффициенты упругости материала. Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \Big|_{\alpha=0} = 0; \quad (4.2)$$

$$u_3 \Big|_{\alpha=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \Big|_{\alpha=l} = 0; \quad (4.3)$$

$$\frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad (4.4)$$

где соотношения (4.2) и (4.4) выражают условия свободного края при $\alpha = 0$ и $\beta = 0, s$ соответственно, а условия (4.3) являются условиями шарнирного закрепления при $\alpha = l$. Задача (4.1)-(4.4) не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор, соответствующий задаче (4.1)-(4.4), – самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому, для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм можно применять метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [14-18]. Решения уравнения (4.1) ищем в виде

$$u_3 = w_m(\theta_m \beta) \exp(\theta_m y \alpha), \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (4.5)$$

где $w_m(\theta_m \beta)$ определены в (2), а y – неизвестная константа. При этом условия (4.4) выполняются автоматически. Подставим (4.5) в (4.1). Полученное уравнение умножая на $w_m(\theta_m \beta)$ и интегрируя в пределах от 0 до s , получим характеристические уравнения

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \kappa^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta'_m \kappa^2 + \beta'_m \beta''_m \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}; \quad (4.6)$$

$$\eta_m^2 = \frac{\lambda}{\theta_m^2 B_{66}}, \quad a^2 = \theta_m^2 \frac{h^2}{12}, \quad (4.7)$$

где θ_m и β'_m, β''_m определены в (2) и (4) соответственно. Пусть y_3 и y_4 различные корни уравнения (4.6) с неположительными действительными частями и $y_{2+j} = -y_j, j = 3, 4$. Решение задачи (4.1)-(4.4) ищем в виде

$$u_3 = \sum_{j=3}^6 w_m(\theta_m \beta) \exp(\theta_m y_j \alpha) w_j. \quad (4.8)$$

Подставим (4.8) в граничные условия (4.2) и (4.3). Умножая полученные уравнения на $w_m(\theta_m \beta)$ и интегрируя в пределах от 0 до s , получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=3}^6 R_{3j}^{(m)} w_j = 0, & \sum_{j=3}^6 R_{7j}^{(m)} \exp(z_j) w_j = 0, \\ \sum_{j=3}^6 R_{4j}^{(m)} w_j = 0, & \sum_{j=3}^6 R_{8j}^{(m)} \exp(z_j) w_j = 0. \end{cases} \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (4.9)$$

$$R_{3j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta'_m, \quad R_{4j}^{(m)} = y_j \left(y_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m \right), \quad (4.10)$$

$$R_{7j}^{(m)} = 1, \quad R_{8j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta'_m, \quad j = \overline{3, 6}.$$

Приравнявая определитель Δ_p системы (4.9) к нулю, получим дисперсионные уравнения

$$\Delta_p = \exp(-z_3 - z_4) (y_3 - y_4)^2 (y_3 + y_4) G_m(\eta_m) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (4.11)$$

$$G_m(\eta_m) = K_1(\eta_m)(1 - \exp(2z_3 + 2z_4)) + (y_3 + y_4) K_5(\eta_m)(\exp(z_3) + \exp(z_4)) [z_3 z_4],$$

$$K_{1,5}(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 \pm \frac{4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 (\beta'_m)^2, \quad (4.12)$$

$$[z_3 z_4] = \theta_m l (\exp(z_4) - \exp(z_3)) / (z_4 - z_3), \quad z_j = \theta_m y_j l, \quad j = 3, 4.$$

Совокупность уравнений (4.11) эквивалентна совокупности уравнений

$$G_m(\eta_m) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (4.13)$$

Заметим, что если y_3 и y_4 корни уравнения (4.6) с отрицательными действительными частями, то при $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни уравнения (4.13) аппроксимируются корнями уравнения

$$K_1(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + \frac{4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 (\beta'_m)^2 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (4.14)$$

Уравнения (4.14) являются аналогом уравнения Коненкова для достаточно длинной ортотропной прямоугольной пластины с тремя свободными сторонами (ср. [10]-[13]).

Для нахождения собственных форм, при данной безразмерной характеристике собственного значения η_m , необходимо определить коэффициенты $w_j, j = \overline{3, 6}$ из системы уравнений (4.9) и подставить в (4.8). Можно взять

$$w_3 = \frac{R_3^{(m)} \exp(z_3 + z_4) - R_4^{(m)} \exp(z_3) + 2R_{34}^{(m)} R_{44}^{(m)} \exp(z_4)}{R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{33}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)},$$

$$w_4 = \frac{R_3^{(m)} \exp(2z_3 + z_4) - R_4^{(m)} \exp(z_4) + 2R_{33}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3)}{R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{33}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)}, \quad (4.15)$$

$$w_5 = \frac{\exp(z_3) [R_3^{(m)} + R_4^{(m)} \exp(z_4) - 2R_{34}^{(m)} R_{44}^{(m)} \exp(z_3)]}{R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{33}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)},$$

$$w_6 = -\exp(z_4), \quad R_3^{(m)} = R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} - R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)}, \quad R_4^{(m)} = R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} + R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)}.$$

5. Асимптотики дисперсионного уравнения (2.16)

5.1. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.16) при $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$. Используя предыдущие формулы предположим, что $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$. Тогда при $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$ уравнение (2.4) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m = \kappa^4 - B_2 y^2 + \left(\frac{B_{66} + B_{11}}{B_{11}} \right) \eta_m^2 y^2 + (\beta'_m - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta''_m - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad (5.1)$$

$$R_{mm} = \alpha^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \kappa^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta'_m \kappa^2 + \beta'_m \beta''_m \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_{3m}^2 = 0. \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1), (5.2) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний ортотропных пластин соответственно, когда противоположные стороны свободны. Корни уравнений (5.1) и (5.2) с неположительными действительными частями, как в пунктах 3 и 4, обозначаются через y_1, y_2 и y_3, y_4 соответственно. Аналогичным образом, как в [20], доказывается, что при

$$\mathcal{E}_m \ll 1; \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j; \quad (5.3)$$

Корни κ^2 уравнения (2.4) можно представить в виде

$$\kappa_j^2 = y_j^2 + \alpha_j^{(m)} \varepsilon_m^2 + \beta_j^{(m)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (5.4)$$

При условии (5.3), учитывая соотношения (2.8), (2.14), (5.4) и тот факт, что

$$M_{3j}^{(m)} = M_{4j}^{(m)} = M_{7j}^{(m)} = M_{8j}^{(m)} = O(\varepsilon_m^2), \quad j=1,2,$$

уравнения (2.16) приводятся к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \right)^2 N(\eta_m) N_0(\eta_m) (\beta'_m - \eta_m^2) X \quad (5.5)$$

$$K_{3m}^2(\eta_m) L_m(\eta_m) G_m(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2), \quad m = \overline{1, \infty}.$$

$$N(\eta_m) = (y_1 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)(y_2 + y_4), \quad N_0(\eta_m) = N(\eta_m)(y_1 + y_2)(y_3 + y_4),$$

$$\begin{aligned} K_{3m}(\eta_m) = & (\beta'_m - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta''_m - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) \left(\frac{B_{12}}{B_{12} + B_{66}} - \alpha^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{66}} \beta'_m \right)^2 + \\ & + \left(B_2 - \left(\frac{B_{66} + B_{11}}{B_{11}} \right) \eta_m^2 \right) \left[\frac{B_{12}}{B_{12} + B_{66}} - \alpha^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{66}} \beta'_m \right] \left[\frac{B_{22} \beta'_m + B_{12} \eta_m^2}{B_{12} + B_{66}} + (\beta'_m - \beta''_m) \frac{B_{22} B_{12}}{B_{66} (B_{12} + B_{66})} + \right. \\ & \left. + \alpha^2 \frac{B_{22}}{B_{66}} \beta'_m \beta''_m \right] + \left[\frac{B_{22} \beta'_m + B_{12} \eta_m^2}{B_{12} + B_{66}} + (\beta'_m - \beta''_m) \frac{B_{22} B_{12}}{B_{66} (B_{12} + B_{66})} + \alpha^2 \frac{B_{22}}{B_{66}} \beta'_m \beta''_m \right]^2, \quad (5.6) \end{aligned}$$

а $L_m(\eta_m)$ и $G_m(\eta_m)$ определены в (3.12) и (4.12), соответственно.

Из (5.5) следует, что при $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$ уравнения (2.16) распадаются на уравнения

$$G_m(\eta_m)=0, m = \overline{1, \infty}; \quad L_m(\eta_m)=0, m = \overline{1, \infty}; \quad K_{3m}(\eta_m)=0, m = \overline{1, \infty}. \quad (5.7)$$

Первая и вторая совокупности уравнений являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных собственных колебаний аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластины соответственно. Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания цилиндрической панели. Третье уравнение появляется в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Заметим, что $\eta = 1$ принадлежит предельному спектру безмоментного оператора соответствующего задаче (1.1)-(1.4). Этим фактом обосновывается существование множителя $(\beta'_m - \eta_m^2)$ в формулах (3.11) и (5.5) (ср. [12]).

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 - корни уравнения (5.1) и (5.2) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $\theta_m l \rightarrow 0$ уравнения (2.16) преобразуются в уравнения

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\frac{B_{12}+B_{66}}{B_{11}} \right)^2 N(\eta_m) N_0(\eta_m) (\beta'_m - \eta_m^2) X \quad (5.8)$$

$$K_{3m}^2(\eta_m) K_2(\eta_m) K_1(\eta_m) + O(\mathcal{E}_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)), \quad m = \overline{1, \infty}.$$

Из (5.5) следует, что при $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$ и $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни дисперсионного уравнения (2.16) аппроксимируются корнями уравнения

$$K_1(\eta_m)=0, m = \overline{1, \infty}; \quad K_2(\eta_m)=0, m = \overline{1, \infty}; \quad K_{3m}(\eta_m)=0, m = \overline{1, \infty}; \quad (5.9)$$

Первые две совокупности уравнений из (5.9) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний ортотропной полубесконечной пластины - полосы со свободными краями. Следовательно, при малых \mathcal{E}_m и больших $\theta_m l$ приближенные значения корней уравнения (2.16) являются корнями уравнения (5.9).

5.2. *Асимптотика дисперсионного уравнения (2.16) при $\theta_m l \rightarrow \infty$.* При использовании предыдущих формул будем полагать, что $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ и κ_4 (корни уравнения (2.4)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (2.16) можно привести к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \cdot \text{Det} \|m_{ij}\|_{i=5,j=1}^{8,4} + \sum_{j=1}^4 O(\exp(\theta_m \kappa_j l)), \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (5.10)$$

Откуда следует, что при $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни уравнения (2.16) аппроксимируются корнями уравнения

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0, m = \overline{1, \infty}; \quad \text{Det} \|m_{ij}\|_{i=5,j=1}^{8,4} = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (5.11)$$

Первая совокупность уравнений из (5.11), определяет всевозможные локализованные собственные колебания ортотропной полубесконечной круговой цилиндрической панели со свободными краями. Если $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$, имеем

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = \frac{B_{12}+B_{66}}{B_{11}} N(\eta_m) K_{3m}(\eta_m) K_1(\eta_m) K_2(\eta_m) + O(\mathcal{E}_m^2), \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (5.12)$$

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i=5,j=1}^{8,4} = \frac{B_{12}+B_{66}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_m^2) N_0(\eta_m) K_{3m}(\eta_m) + O(\mathcal{E}_m^2), \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (5.13)$$

Следовательно, учитывая формулы (5.12) и (5.13), еще раз убеждаемся, что дисперсионное уравнение (2.16) при $\theta_m l \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_m \rightarrow 0$ принимает вид (5.8).

6. Численные исследования. В табл. 1 приведены значения некоторых η_m -корней первых двух уравнений из (5.7) для прямоугольной пластины из боропластика с механическими параметрами: $\rho = 2 \times 10^2 \text{ кг/м}^3$; $E_1 = 2.646 \times 10^{11} \text{ Н/м}$; $E_2 = 1.323 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\gamma_1 = 0.2$; $\gamma_2 = 0.01$; $G = 9.604 \times 10^9 \text{ Н/м}^2$ и геометрическими параметрами: $s = 4, l = 5, l = 15$ [21].

Таблица 1. Характеристики собственных частот прямоугольной пластинки с шарнирно-закрепленным торцом при $s = 4, l = 5/l = 15$.

m	θ_m	$G_m(\eta_m) = 0$	$L_m(\eta_m) = 0$	m	θ_m	$G_m(\eta_m) = 0$	$L_m(\eta_m) = 0$
1	1.95473	0.01147		9	9.43718	0.06412	0.96343
		0.01096				0.06402	0.96419
2	2.74891	0.01955	0.94041	10	10.5474	0.07164	0.96377
		0.01922	0.96409			0.07155	0.96419
3	3.52957	0.02473	0.96159	11	11.6577	0.07916	0.96396
		0.02445	0.97699			0.07908	0.96419
4	4.27693	0.02884	0.94649	12	12.7680	0.08668	0.96406
		0.02862	0.95731			0.08661	0.96419
5	5.04581	0.03454	0.95762	13	13.8782	0.09421	0.96412
		0.03435	0.96493			0.09414	0.96419
6	6.09849	0.04151	0.95982	14	14.9887	0.10174	0.96415
		0.04136	0.96408			0.10167	0.96419
7	7.21629	0.04910	0.96180	15	16.0962	0.10924	0.96417
		0.04897	0.96422			0.10919	0.96419
8	8.32693	0.05661	0.96283	16	17.1935	0.11668	0.96418
		0.05649	0.96419			0.11663	0.96419

Таблица 2. Характеристики собственных частот преимущественно изгибной и преимущественно планарной колебаний цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом при $s = 4.00167, l = 5/l = 15$.

m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = 0, \eta_{3m} = \eta_m$	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_m, \eta_{3m} = 0$	m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = 0, \eta_{3m} = \eta_m$	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_m, \eta_{3m} = 0$
1	1.95391	0.01150 b		9	9.43718	0.06412 b	0.96331 e
		0.01004 b				0.06413 b	0.96407 e
2	2.74776	0.01937 b	0.90397 e	10	10.5474	0.07164 b	0.96369 e
		0.01945 b	0.92260 e			0.07155 b	0.96411 e
3	3.52810	0.02468 b	0.96093 e	11	11.6577	0.07916 b	0.96390 e
		0.02440 b	0.97472 e			0.07908 b	0.96411 e
4	4.27542	0.02883 b	0.94370 e	12	12.7679	0.08668 b	0.96403 e

		0.02861 b	0.95474 e			0.08661 b	0.96414 e
5	5.04492	0.03453 b 0.03434 b	0.95524 e 0.96212 e	13	13.8785	0.09421 b 0.09422 b	0.96409 e 0.96417 e
6	6.09841	0.04151 b 0.04136 b	0.95950 e 0.96373 e	14	14.9864	0.10172 b 0.10173 b	0.96413 e 0.96417 e
7	7.21629	0.04910 b 0.04896 b	0.96143 e 0.96382 e	15	16.1102	0.10934 b 0.10928 b	0.96416 e 0.96418 e
8	8.32693	0.05661 b 0.05649 b	0.96263 e 0.91398 e	16	17.2065	0.11677 b 0.11672 b	0.96418 e 0.96418 e

В табл. 2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η_m для преимущественно изгибных и преимущественно планарных колебаний ортотропной цилиндрической панели из боропластика с теми же механическими параметрами и геометрическими параметрами: $R=40$, $s=4.00167$, $l=5$, $l=15$. Результаты, представленные в табл. 3, соответствуют той же цилиндрической панели, что в табл. 2. В табл. 2 и 3 после характеристик собственных частот указан тип колебаний: *b* - преимущественно изгибный, *e* - преимущественно планарный. Заметим, что третье уравнение (5.7) при $1 \leq m \leq 16$ корней не имеет. Модули упругости E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей соответственно. В табл. 2 и 3 случай $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$ соответствует задаче (1.1)-(1.4). Случай $\eta_{1m} = \eta_{2m} = 0, \eta_{3m} = \eta_m$ соответствует задаче (1.1)-(1.4), в которой отсутствуют тангенциальные компоненты силы инерции, т.е. имеем преимущественно изгибный тип колебаний. Аналогично, случай $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_m, \eta_{3m} = 0$ соответствует преимущественно планарному типу колебаний.

Вычисления показывают, что первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободных краев цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа. Наряду с первыми частотами колебаний квазипоперечного типа существуют частоты колебаний квазитангенциального типа. С увеличением m все эти колебания становятся колебаниями "рэлеевского" типа. При $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$ собственные колебания для задачи (1.1)-(1.4) расчлняются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания и частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для прямоугольной пластины.

Таблица 3. Характеристики собственных частот колебаний цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом при $s=4.00167, l=5/l=15$.

m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$	m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$
1	1.95391	0.01067 b 0.01059 b	9	9.43718	0.06412 b 0.96343 e 0.06413 b 0.96419 e
2	2.74776	0.01937 b 0.90415 e 0.01944 b 0.91302 e	10	10.5474	0.07164 b 0.96377 e 0.07155 b 0.96419 e
3	3.52810	0.02468 b 0.96736 e 0.02441 b 0.96188 e	11	11.6577	0.07916 b 0.96396 e 0.07908 b 0.96419 e

4	4.27542	0.02883 b 0.94433 e 0.02861 b 0.95184 e	12	12.7679	0.08668 b 0.96406 e 0.08661 b 0.96419 e
5	5.04492	0.03453 b 0.95658 e 0.03434 b 0.96384 e	13	13.8785	0.09421 b 0.96412 e 0.09422 b 0.96419 e
6	6.09841	0.04151 b 0.96015 e 0.04136 b 0.96461 e	14	14.9864	0.10172 b 0.96415 e 0.10173 b 0.96419 e
7	7.21629	0.04909 b 0.96177 e 0.04896 b 0.96419 e	15	16.1102	0.10934 b 0.96417 e 0.10928 b 0.96419 e
8	8.32693	0.05661 b 0.96283 e 0.05649 b 0.96419 e	16	17.2065	0.11677 b 0.96418 e 0.11672 b 0.96419 e

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (5.5) и (5.8) дисперсионных уравнений (2.16) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (1.1)-(1.4). Первые частоты собственных колебаний зависят от выбранных базисных функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, а также, при $\theta_m l \rightarrow \infty$ частоты колебаний у свободного торца становятся независимыми от базисных функций и от граничных условий на образующих [10],[13].

7. Заключение. Используя систему уравнений динамического равновесия ортотропных цилиндрических оболочек, соответствующую классической теории, впервые получены дисперсионные уравнения (2.16) для определения собственных частот возможных краевых колебаний для цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом. Установлена асимптотическая связь между дисперсионным уравнением рассматриваемой задачи (2.16) и дисперсионными уравнениями аналогичных задач для прямоугольной пластины (5.5).

Установлена также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями (2.16) и дисперсионными уравнениями задачи на собственные значения полубесконечной цилиндрической панели со свободными краями (5.10). Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы колебаний.

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (5.5) и (5.8) дисперсионного уравнения (2.16) и приведенный механизм, являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (1.1) – (1.4).

Асимптотическая формула (5.8) и численные результаты показывают, что частоты собственных колебаний у свободного торца конечной цилиндрической панели с шарнирно-закрепленным торцом (при больших значениях θ_m) практически не зависят от базисных функций и граничных условиях на образующих.

8. Приложение.

Здесь приведены аналитические выражения для элементов m_{ij} .

$$m_{11} = H\kappa_1^4 + d_1\kappa_1^2 + d_2, \quad m_{12} = H\bar{f}_3 + d_1\bar{f}_1, \quad m_{13} = H\bar{f}_2 + d_1, \quad m_{14} = Hf;$$

$$m_{21} = T\kappa_1^5 + d_3\kappa_1^3 + d_4\kappa_1, \quad m_{22} = T\bar{f}_4 + d_3\bar{f}_2 + d_4, \quad m_{23} = T\bar{f}_3 + d_3\bar{f}_1, \quad m_{24} = Tf_2 + d_3;$$

$$m_{31} = \delta_m \kappa_1^6 + d_5\kappa_1^4 + d_6\kappa_1^2 + d_7, \quad m_{32} = \delta_m \bar{f}_5 + d_5\bar{f}_3 + d_6\bar{f}_1,$$

$$m_{33} = \delta_m \bar{f}_4 + d_5\bar{f}_2 + d_6, \quad m_{34} = \delta_m f_3 + d_5 f_1;$$

$$\begin{aligned}
m_{41} &= \delta_m \kappa_1^7 + d_8 \kappa_{1+}^5 d_9 \kappa_1^3 + d_{10} \kappa_1, \quad m_{42} = \delta_m \bar{f}_6 + d_8 \bar{f}_4 + d_9 \bar{f}_2 + d_{10}, \\
m_{43} &= \delta_m \bar{f}_5 + d_8 \bar{f}_3 + d_9 \bar{f}_1, \quad m_{44} = \delta_m f_4 + d_8 f_2 + d_9, \quad \delta_m = 1 + 4a^2 \varepsilon_m^2; \\
m_{i5} &= (-1)^{i+1} m_{i1} \exp(z_1), \quad m_{i6} = (-1)^{i+1} (m_{i2} \exp(z_2) + m_{i1} [z_1 z_2]), \\
m_{i7} &= (-1)^{i+1} (m_{i3} \exp(z_3) + m_{i2} [z_2 z_3] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3]), \\
m_{i8} &= (-1)^{i+1} (m_{i4} \exp(z_4) + m_{i3} [z_3 z_4] + m_{i2} [z_2 z_3 z_4] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3 z_4]); \quad i=1,2,3,4; \\
m_{55} &= F \kappa_1^4 + g_1 \kappa_1^2 + g_2, \quad m_{56} = F \bar{f}_3 + g_1 \bar{f}_1, \quad m_{57} = F \bar{f}_2 + g_1, \quad m_{58} = F f_1; \\
m_{65} &= H \kappa_1^4 + d_1 \kappa_{1+}^2 d_2, \quad m_{66} = H \bar{f}_3 + d_1 \bar{f}_1, \quad m_{67} = H \bar{f}_2 + d_1, \quad m_{68} = H f_1; \\
m_{75} &= \delta_m \kappa_1^4 + g_3 \kappa_{1+}^2 g_4, \quad m_{76} = \delta_m \bar{f}_3 + g_3 \bar{f}_1, \quad m_{77} = \delta_m \bar{f}_2 + g_3, \quad m_{78} = \delta_m f_1; \\
m_{85} &= \delta_m \kappa_1^6 + d_5 \kappa_{1+}^4 d_6 \kappa_1^2 + d_7, \quad m_{86} = \delta_m \bar{f}_5 + d_5 \bar{f}_3 + d_6 \bar{f}_1, \\
m_{87} &= \delta_m \bar{f}_4 + d_5 \bar{f}_2 + d_6, \quad m_{88} = \delta_m f_3 + d_5 f_1; \\
m_{i1} &= m_{i5} \exp(z_1), \quad m_{i2} = m_{i6} \exp(z_2) + m_{i5} [z_1 z_2], \\
m_{i3} &= m_{i7} \exp(z_3) + m_{i6} [z_2 z_3] + m_{i5} [z_1 z_2 z_3], \\
m_{i4} &= m_{i8} \exp(z_4) + m_{i7} [z_3 z_4] + m_{i6} [z_2 z_3 z_4] + m_{i5} [z_1 z_2 z_3 z_4]; \quad i=5,6,7,8. \\
H &= -a^2 \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m; \quad T = -a^2 \frac{B_{12}}{B_{66}} \delta_m \beta'_m; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 \varepsilon_m^2; \\
d_1 &= \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}^2} \beta'_m - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 + 4a^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) + \\
& a^2 \beta'_m \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta''_m - \frac{B_{12}(B_{12}+4B_{66})}{B_{11}^2} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \right); \tag{8.1} \\
d_2 &= -\frac{B_{12}}{B_{11}^2} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) (B_{66} \eta_{2m}^2 + B_{22} (\beta'_m - \beta''_m) + a^2 \beta'_m B_{22} (\beta'_m - \varepsilon_m^2)); \\
d_3 &= \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \delta_m \beta'_m + a^2 \beta'_m \left(4\eta_{2m}^2 - 3B_2 - 2\frac{B_{12}}{B_{11}} \beta'_m - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) + 4a^4 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_{1m}^2); \\
d_4 &= \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) \beta'_m + a^2 \beta'_m \left(\frac{B_{22}(B_{12}+4B_{66})}{B_{11}B_{66}} \beta'_m \beta''_m - 3\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta'_m - 4\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \right) \\
& - a^2 \varepsilon_m^2 \beta'_m \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{B_{12}\beta''_m+4B_{66}\beta'_m}{B_{66}} - 4\eta_{1m}^2 \right) + \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} \beta'_m (\beta'_m - \beta''_m); \\
d_5 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m - 2B_{12}B_{66}\beta'_m}{B_{11}B_{66}} - a^2 \varepsilon_m^2 \left(\frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m}{B_{11}B_{66}} + 4\frac{B_{66}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \right); \\
d_6 &= \frac{B_{12}}{B_{11}} B_2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta'_m \beta''_m - \left(\frac{B_{11}B_{22}\beta''_m + 2B_{12}B_{66}\beta'_m}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12}+B_{66}}{B_{11}} \beta'_m \eta_{2m}^2 \right) + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 \\
& + \varepsilon_m^2 \left(a^2 \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m}{B_{11}^2} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) - \frac{B_{12}}{B_{11}} B_1 \beta'_m \right); \\
d_7 &= \frac{B_{12}}{B_{11}^2} \beta'_m (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta''_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right); \\
d_8 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m - B_{12}B_{66}\beta'_m + 4B_{66}^2\beta'_m}{B_{11}B_{66}} - a^2 \varepsilon_m^2 \left(B_2 + \frac{4B_{66}-2B_{12}}{B_{11}} \beta'_m - 4\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right); \\
d_9 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 - \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m + B_{12}B_{66}\beta'_m + 4B_{66}^2\beta'_m}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12}+5B_{66}}{B_{11}} \beta'_m \eta_{2m}^2 + \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} B_2 \beta'_m \\
& + \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta'_m \beta''_m + \varepsilon_m^2 \left(a^2 \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m - 4B_{12}B_{66}\beta'_m}{B_{11}^2} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} B_1 \beta'_m \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{10} &= \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} \beta'_m (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta''_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right); \\
g_1 &= B_1 + -a^2 \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m + B_{12}B_{66}\beta'_m + 4B_{66}^2 \beta'_m}{B_{11}B_{66}} - a^2 \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2; \\
g_2 &= -\frac{B_{22}}{B_{11}} (1 + a^2 \beta''_m) (\beta'_m - \eta_{1m}^2); \\
g_3 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - B_2 - a^2 \varepsilon_m^2 \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} \beta''_m + \frac{4B_{66}}{B_{11}} (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \right); \\
g_4 &= (\beta'_m - \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta'_m - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + a^2 \varepsilon_m^2 \beta''_m \frac{B_{22}}{B_{11}} \right);
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Norris, A.N. Flexural edge waves// J. of Sound and Vibration.-1994.- 171, № 4. P. 571-573.
2. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластинки с кубической симметрией // Изв. РАН. МТТ. – 1996, № 6. - С. 139-143.// V.M. Belubekyan and I.A. Yengibaryan, Waves localized along a free edge of a plane with cubic symmetry (in Russian). Izv.Ross. Akad. Nauk MTT 6,139-143 (1996).
3. Thompson I. and Abrahams I.D. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. Amer. -2002.-112, № 5.- P. 1756-1765.
4. Kaplunov, J. D., Kossovich, L. Y., & Wilde, M. V. (2000). Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell// *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(3), 1383-1393.
5. Lawrie, J. B., & Kaplunov, J. (2012). Edge waves and resonance on elastic structures: an overview. // *Mathematics and Mechanics of Solids*, 17(1), 4-16.
6. Grinchenko, V.T. Wave motion localization effects in elastic waveguides // *Int.Appl. Mech.*-2005.- 41, №9.- P. 988-994.
7. Вильде М.В., Каплунов. Ю.Д., Кассович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах - М.: физматлит-2010.-279с.// M.V. Vilde, Yu. D. Kaplunov, and L. Yu. Kassovich, Boundary and Interfase Resonant Phenomena in Elastic Bodies (in Russian), М., Fizmatlit (2010) .
8. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках, асимптотические методы-М.: физматлит-2009.-292с.// G.I. Mikhasev and P.E. Tovstik, Localized Vibrations and Waves in Thin shells, Asymptotic Methods (in Russian), М.,Fizmatlit (2009).
9. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек -М.: Наука,-1979.-383с.// A.L. Gol'denveizer, V.B. Lidskii, and P.E. Tovstik, Free Vibrations of thin Elastic Shells (in Russian), М., Nauka, (1979).
10. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G. and Khachanyan A.A. Vibrations of an orthotropic cylindrical panel with various boundary conditions // *Int. Appl. Mech.* 49, No 5, 2013. P. 534-554.
11. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G. and Srapionyan J.L. Localized vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators// *ZAMM.Z.Math. Mech.* 93. No4-2013.-P.269-283.
12. Gulgazaryan, G.R., Gulgazaryan L.G. and Saakyan R.D. The vibrations of a thin

- elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges // J. of Appl. Math. and Mech. - 2008. - 72, № 3. – P. 453 - 465.
13. Ghulghazaryan G. R., Ghulghazaryan L.G. and Kudish I.I. Free Vibrations of a Thin Elastic Orthotropic Cylindrical Panel with Free Edges. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 55, №5, 2019, P. 557-574.
 14. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // *Строительная промышленность*. - 1932.- № 11. - С. 33 - 38; № 12. - С. 21 - 26.// V.Z. Vlasov, A new practical method for calculating folded coverings and shells, *Stroit. Prom.*, № 11, 33-38 and № 12, 21-26 (1932).
 15. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // *Изв. АН СССР. Отд. мат. и ест. н.* 1933.- № 5. – С. 647 - 653.// L.V. Kantorovich, A direct method for approximate solution of a problem on the minimum of a double integral, *Izv.AN SSSR, Otd. Mat. Estestv. Nauk.* № 5 647-653 (1933).
 16. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса// *Инж.–физ. журн.*-1982.-42, № 6.–С.1007 – 1013.// G. Prokopov, E.I. Bepalov, and Yu. V. Sherenkovskii, L.V. Kontorovich method of reduction to ordinary differential equations and a general method for solving multidimensional problems of heat transfer, *Inzh. Fiz Zhurn.*, 42(6), 1007-1013 (1982).
 17. Беспалова, Е.И. К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича–Власова // *Прикл. Механика*. – 2008. - 44, №11. – С. 99 - 111.// E.I. Bepalov, To the solution of stationary problems of the theory of gently sloped shells by the generalized Kontorovich-Vlasov method, *Prikl. Mekh.* 44(11),99-111 (2008).
 18. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике -М.: Наука. 1970.510с.// S.G. Mikhlin, *Variational methods in Mathematical Physics (in Russian)*, М., Nauka, (1970).
 19. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек -М.: Наука, 1974. - 446с.// S.A. Ambartsumyan, *General theory of Anisotropic Shells (in Russian)*, М., Nauka, (1974).
 20. Gulgazaryan, G.R. Vibrations of semi-infinite, orthotropic cylindrical shells of open profile // *Intern. Appl. Mech.*-2004. V. 40. № 2.- P.199-212.
 21. Гулгазарян, Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // *Изв. АН СССР МТТ*. 1982, №3. С. 171-174// G.R. Ghulghazaryan and V.B. Lidskii, Density of free vibrations frequencies of a thin anisotropic shell with anisotropic layers, *Izv. AN.SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, № 3, 171-174 (1982).

Сведения об авторе:

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, д.ф.м.н., АГПУ им. Х. Абовяна, проф. кафедры математики и методики ее преподавания.
 АГПУ им. Х. Абовяна, пр. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения.
 Тел.(+37491) 706700. E-mail: ghulgr@yahoo.com