

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАВНОМЕРНО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ
ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ
МЕЖФАЗНЫХ ТРЕЩИН**

Григорян А.А.

Ключевые слова: периодическая задача, смешанная задача, кусочно-однородная плоскость, внутренние трещины.

Grigoryan A.A.

**A mixed problem for a uniformly piece-homogeneous plane with a
periodic system of semi-infinite interface cracks**

Keywords: periodic problem, mixed boundary value problem, piecewise homogeneous plane, internal cracks.

In this paper, we construct a solution to the problem of a plane-deformed state of a piecewise-homogeneous plane of alternately connected two dissimilar strips, which along the lines of their junction contains two equally spaced semi-infinite cracks, on one side of which stresses are given, and the other sides are rigidly clamped. The governing system of equations of the periodic problem is derived in the form of a system of singular integral equations of the second kind for complex combinations of contact stresses and displacements in the junction zone of two strips, the solution of which, in the case when the characteristic equation of the system has two different roots, is constructed by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. As a special case, a system of governing equations for the problem of the plane-strained stress state of a two-component composite plane with two semi-infinite interfacial cracks with mixed conditions on the banks is obtained and its exact solution in quadratures is constructed. A numerical calculation has been performed.

Գրիգորյան Ա. Ա.

**Կիսասանվերջ ճաքերի պարբերական համակարգով, հավասարաչափ կտոր առ կտոր համասեռ
հարթության խառը խնդիր**

Հիմնաբաներ՝ պարբերական խնդիր, խառը խնդիր, կտոր առ կտոր համասեռ հարթություն, կիսասանվերջ ճաք

Աշխատանքում կարուցված է տարասեռ շերտերի հաջորդական միացումից ստացված հավասարաչափ կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդրի լուծումը, երբ այն տարասեռ շերտերի միացման գծերին պարունակում է համաչափ դասավորված երկու կիսասանվերջ ճաքերի պարբերական համակարգ, որոնց ափերից մեկին, որոնք պատկանում են շերտերից մեկին, տրված են լարումներ, իսկ երկրորդ նյութից պատրաստված շերտերին պատկանող ճաքերի ափերը կոշտ ամրակրցված են: Դուրս է բերվել խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգը միացման տեղամասում լարումների և տեղափոխությունների կոմպլեքս կոմբինացիաների նկատմամբ երկրորդ կարգի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով, որի լուծումը, երբ համակարգի բնութագրիչ հավասարումը ունի երկու տարբեր արմատներ, կառուցվել է քառակուսացման բանաձևերի թվային-վերլուծական մեթոդներով: Որպես մասնավոր դեպք ստացվել է երկկոմպոնենտ, երկու համաչափ դասավորված, ափերին խառը պայմաններով, կիսասանվերջ միջֆազային ճաքերով բաղադրյալ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգը և կառուցվել է նրա ճշգրիտ լուծումը: Կատարվել է թվային հաշվարկ:

В настоящей работе построено решение задачи о плоско-деформированном состоянии кусочно-однородной плоскости из поочередно соединенных двух разнородных полос, которая по линиям их стыка содержит одинаково расположенные две полубесконечные трещины, на одном берегу которых заданы напряжения, а вторые берега - жестко зашпелены. Выведена определяющая система уравнений периоди-

ческой задачи в виде системы сингулярных интегральных уравнений второго рода относительно комплексных комбинаций контактных напряжений и смещений в зоне стыка двух полос, решение которой, в случае, когда характеристическое уравнение системы имеет два различных корня, построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Как частный случай получена система определяющих уравнений задачи о плоско-деформированном напряженном состоянии двухкомпонентной составной плоскости с двумя полубесконечными межфазными трещинами со смешанными условиями на берегах и построено ее точное решение в квадратурах. Проведен численный расчет.

Введение

Одним из важных направлений развития механики разрушения и смешанных задач теории упругости является изучение напряженно-деформированного состояния однородных или составных массивных тел с трещинами, на берегах которых заданы условия смешанного типа. Первая работа в указанном направлении принадлежит Д.И.Шерману [1], где построено замкнутое решение задачи для однородной плоскости, содержащей несколько коллинеарных абсолютно жестких включений, одни из длинных сторон которых отошли от матрицы, создавая тем самым трещины. Решение этой же задачи построил Н.И.Мухелишвили методом теории потенциалов [2]. В дальнейшем аналогичные задачи для однородных массивных тел с трещинами, на берегах которых заданы условия смешанного типа были рассмотрены разными авторами. Отметим работы [3-6], где построены точные решения некоторых плоских и осесимметричных задач в указанном направлении.

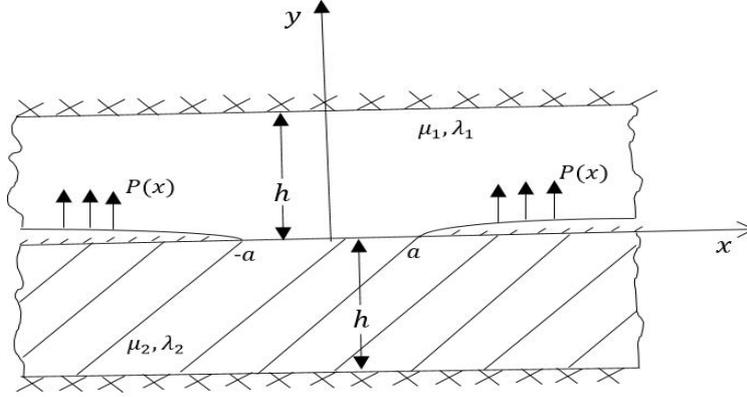
Первой аналогичной задачей для составного тела с межфазной трещиной, на берегах которой заданы условия смешанного типа, является работа Г.П.Черепанова [7], где решение задачи для составной плоскости с межфазной трещиной, на берегах которой заданы условия смешанного типа, сведено к задаче Римана, допускающей замкнутое решение. В дальнейшем, в работе [8], методом сингулярных интегральных уравнений, было построено замкнутое решение этой же задачи. Было показано также, что напряжения в концевых точках трещины, в основном, имеют показательную особенность с осцилляцией, однако при некоторых соотношениях упругих характеристик материалов, составляющих составную плоскость, помимо показательной особенности возникает также и логарифмическая особенность. Укажем также на монографию [9], где подытожены некоторые результаты в этом направлении.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние кусочно-однородной, равномерно слоистой плоскости, полученной поочерёдным соединением двух полос равной толщины $2h$ из различных материалов с коэффициентами Лямэ μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 соответственно, которая на линиях соединения полос $y = 2nh$ ($n \in Z$), по бесконечным отрезкам $L = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, содержит полубесконечные трещины, на берегах которых заданы условия смешанного типа. Будем полагать, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых распределённых нагрузок $p(x)$ с общей конечной результирующей P , действующих на берегах трещин, принадлежащих полосе с коэффициентами Лямэ μ_1, λ_1 . Берега трещин, принадлежащих второй полосе, при этом, жестко защемлены.

Требуется вывести определяющую систему уравнений поставленной задачи, построить ее решение и выявить закономерности изменения контактных напряжений, коэффициентов интенсивностей и раскрытия трещин в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик разнородных полос.

Очевидно, что поставленная задача в направлении оси Oy является периодической с периодом $2h$, при этом на линиях $y = (2n + 1)h$ ($n \in Z$) имеют место условия симметрии, вследствие чего напряженно-деформированное состояние в составных полосах, находящихся между линиями симметрии $y = (2k - 1)h$ и $y = (2k + 1)h$ будут одинаковыми. Это позволяет определить напряженно-деформированное состояние всей плоскости, изучив напряженно-деформированное состояние двухкомпонентной полосы, находящейся между линиями симметрии $y = \pm h$ (базовой ячейки периодической системы)(Фиг.1).



Фиг.1 Базовая ячейка

Для базовой ячейки поставленную задачу математически сформулируем в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} v_j(x, (-1)^{j+1} h) = 0 \\ \tau_{yz}^{(j)}(x, (-1)^{j+1} h) = 0 \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty; j = 1, 2) \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = -p(x); \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0; u_2(x, 0) = v_2(x, 0) = 0 & (|x| > a) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0); \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0); & (|x| < a) \\ v_1(x, 0) = v_2(x, 0); u_1(x, 0) = u_2(x, 0); & (|x| < a) \end{cases} \quad (1.1b)$$

Здесь $u_j(x, y)$ и $v_j(x, y)$ ($j=1, 2$) – соответственно горизонтальные и вертикальные составляющие смещений точек разнородных полос, удовлетворяющие, каждый в области своего определения, уравнениям Лямэ, а $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j=1, 2$) соответственно нормальные и касательные компоненты напряжений, действующих в этих полосах и связанных со смещениями известными соотношениями упругости.

Введём в рассмотрение неизвестные нормальные и касательные контактные напряжения $q(x)$ и $\tau(x)$, действующие в зонах контакта разнородных полос, а также нормальные и горизонтальные составляющие $v(x)$ и $u(x)$ смещения точек контактной зоны:

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{(j)}(x, 0) = \tau(x); \\ \sigma_y^{(j)}(x, 0) = q(x); \\ u_j(x, 0) = u(x); \\ v_j(x, 0) = v(x). \end{cases} \quad (|x| < a; \quad j=1, 2) \quad (1.2)$$

Далее, рассмотрим вспомогательные задачи для каждой из разнородных полос, считая при этом, что на линиях $y = h$ для первой и $y = -h$ для второй полосы заданы условия симметрии, а на линии $y = 0$ первой и второй полос заданы соответственно напряжения и смещения, т.е. следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, h) = v_1(x, h) = 0 \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = T(x) \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) = Q(x) \end{cases} \quad (|x| < \infty) \quad (1.3a)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(2)}(x, -h) = v_2(x, -h) = 0 \\ u_2(x, 0) = U(x) \\ v_2(x, 0) = V(x) \end{cases} \quad (|x| < \infty) \quad (1.3b)$$

где

$$T(x) = \begin{cases} \tau(x) & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}; \quad Q(x) = \begin{cases} q(x) & (|x| < a) \\ -p(x) & (|x| > a) \end{cases};$$

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}; \quad V(x) = \begin{cases} v(x) & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}.$$

Чтобы решить вспомогательные граничные задачи используем представления решений уравнений Лямэ в виде интегралов Фурье, приведенные в [9],

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_j + iyB_j^*) \operatorname{ch}(sy) + (B_j + iyA_j^*) \operatorname{sh}(sy) \right] e^{-isx} ds \\ v_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(C_j - yA_j^*) \operatorname{ch}(sy) + (D_j - yB_j^*) \operatorname{sh}(sy) \right] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

где A_j, B_j, C_j и D_j ($j=1,2$) – неизвестные постоянные, подлежащие определению, а коэффициенты A_j^* и B_j^* определяются по формулам:

$$\begin{aligned} A_j^* &= \frac{s}{\mathfrak{a}_j} (D_j - iA_j); \quad B_j^* = \frac{s}{\mathfrak{a}_j} (C_j - iB_j); \quad \mathfrak{a}_j = \frac{(\lambda_j + 3\mu_j)}{(\lambda_j + \mu_j)}. \\ \left(\mathfrak{g}_1^{(j)} &= \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \mathfrak{g}_2^{(j)} = \frac{(\lambda_j + 2\mu_j)\mu_j}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad j=1,2 \right). \end{aligned}$$

Для напряжений будем иметь представления:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(j)}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\mathfrak{g}_2^{(j)} s D_j + \mathfrak{g}_1^{(j)} i s A_j - \mu_j s y B_j^* \right] \operatorname{ch}(sy) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathfrak{g}_2^{(j)} s C_j + \mathfrak{g}_1^{(j)} i s B_j - \mu_j s y A_j^* \right] \operatorname{sh}(sy) \right\} e^{-isx} ds; \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\mathfrak{g}_2^{(j)} s B_j - \mathfrak{g}_1^{(j)} i s C_j + \mu_j i s A_j^* \right] \operatorname{ch}(sy) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathfrak{g}_2^{(j)} s A_j - \mathfrak{g}_1^{(j)} i s D_j + \mu_j i s y B_j^* \right] \operatorname{sh}(sy) \right\} e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя представления (1.4) и (1.5), удовлетворим условиям вспомогательных граничных задач (1.3a), (1.3b) и выразим неизвестные коэффициенты через трансформанты Фурье функций $Q(x)$ и $T(x)$ в первой задаче и через трансформанты Фурье функций $U(x)$ и $V(x)$ во второй. Получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)}}{2is\mu_1^2} \left[\frac{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta - \mu_1 \beta / \mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)}}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} \right] \bar{Q}(s) - \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)} \operatorname{ch}^2 \beta}{2s\mu_1^2 (\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta)} \bar{T}(s); \\ C_1 &= -\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)} \operatorname{sh}^2 \beta}{2s\mu_1^2 (\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta)} \bar{Q}(s) + \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)}}{2is\mu_1^2} \left[\frac{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta - \mu_1 \beta / \mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)}}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} \right] \bar{T}(s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{i\mathfrak{g}_1^{(1)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} C_1 + \frac{1}{2s\mathfrak{g}_2^{(1)}} \bar{T}(s); & D_1 &= -\frac{i\mathfrak{g}_1^{(1)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} A_1 + \frac{1}{2s\mathfrak{g}_2^{(1)}} \bar{Q}(s); \\
A_2 &= \bar{U}(s); & C_2 &= \bar{V}(s); \\
B_2 &= \frac{\mathfrak{x}_2 \operatorname{sh}^2 \beta \bar{U}(s) + i\beta \bar{V}(s)}{\mathfrak{x}_2 \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta}; & D_2 &= \frac{-i\beta \bar{U}(s) + \mathfrak{x}_2 \operatorname{ch}^2 \beta \bar{V}(s)}{\mathfrak{x}_2 \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{Q}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) e^{isx} dx; & \bar{T}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(x) e^{isx} dx; \\
\bar{U}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{isx} dx; & \bar{V}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) e^{isx} dx; & \beta &= sh.
\end{aligned}$$

При помощи полученных значений коэффициентов разложений определим производные от смещений точек зоны контакта первой полосы в первой вспомогательной задаче и компоненты нормальных и касательных контактных напряжений во второй вспомогательной задаче. Будем иметь:

$$\begin{aligned}
u_1'(x, 0) &= \frac{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)}}{2\mu_1^2} Q(x) - \frac{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{2\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s) ds}{s-x} - \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(s-x) Q(s) ds + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(s-x) T(s) ds; \\
v_1'(x, 0) &= -\frac{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)}}{2\mu_1^2} T(x) - \frac{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{2\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(s) ds}{s-x} - \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(s-x) Q(s) ds + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(s-x) T(s) ds \quad (-\infty < x < \infty);
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(2)}(x, 0) &= -2\mathfrak{g}_1^{(2)} U'(x) - \frac{2\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'(s) ds}{s-x} + \int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(s-x) U'(s) ds + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K_{32}(s-x) V'(s) ds; \\
\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) &= 2\mathfrak{g}_1^{(2)} V'(x) - \frac{2\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'(s) ds}{s-x} + \int_{-\infty}^{\infty} K_{41}(s-x) U'(s) ds + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K_{42}(s-x) V'(s) ds \quad (-\infty < x < \infty);
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
K_{11}(x) &= \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)} + \mu_1}{4\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta e^{isx} ds}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}; & K_{12}(x) &= \frac{i\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{4\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{ch} \beta - |\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds; \\
K_{21}(x) &= \frac{i\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{4\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{sh} |\beta| + |\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds; & K_{22}(x) &= K_{11}(x); \\
K_{31}(x) &= \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta e^{isx} ds}{\mathfrak{a}_2 \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta}; & K_{32}(x) &= \frac{i\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_2 e^{-|\beta|} \operatorname{ch} \beta + |\beta|}{\mathfrak{a}_2 \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta} e^{isx} ds; \\
K_{41}(x) &= -\frac{i\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_2 e^{-|\beta|} \operatorname{sh} |\beta| - |\beta|}{\mathfrak{a}_2 \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta} e^{isx} ds; & K_{42}(x) &= -K_{31}(x).
\end{aligned}$$

Теперь, используя соотношения (1.7) и (1.8), удовлетворим условиям полного контакта полос в зоне их стыка, которые при помощи известных комплексных комбинаций смещений $w(x) = u(x) + iv(x)$ и напряжений $\chi(x) = q(x) - i\tau(x)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} u_1'(x, 0) + iv_1'(x, 0) = w'(x) \\ \sigma_y^{(2)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \chi(x) \end{cases} \quad (|x| < a) \quad (1.9)$$

В результате, после некоторых несложных выкладок, для определения искомым функций $\chi(x)$ и $w'(x)$ получим систему определяющих сингулярных интегральных уравнений рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}
-\chi(x) - 2\mathfrak{g}_1^{(2)} w'(x) + \frac{2i\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a R_{11}(s-x) w'(s) ds + \\
+ \int_{-a}^a R_{12}(s-x) \bar{w}'(s) ds = 0. \quad (|x| < a) \\
\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)}}{2\mu_1^2} \chi(x) - w'(x) - \frac{i\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{2\pi\mu_1^2} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a R_{21}(s-x) \chi(s) ds + \\
+ \int_{-a}^a R_{22}(s-x) \bar{\chi}(s) ds = -(f_1(x) + if_2(x)); \quad (|x| < a)
\end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R_{11}(x) &= -\frac{\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_2 + 2\beta + 2|\beta|}{\mathfrak{a}_2 \operatorname{sh} 2\beta - 2\beta} e^{isx} ds; & R_{12}(x) &= -\frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mathfrak{a}_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|\beta|} e^{isx} ds}{\mathfrak{a}_2 \operatorname{sh} 2\beta - 2\beta}; \\
R_{21}(x) &= -\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_1^{(1)} + \mu_1}{2\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta e^{isx} ds}{\operatorname{sh} 2\beta + 2\beta} - \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{4\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{-2|\beta|} - 2|\beta|) e^{isx} ds}{\operatorname{sh} 2\beta + 2\beta};
\end{aligned}$$

$$R_{22}(x) = \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{4\pi\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx} ds}{\operatorname{sh} 2\beta + 2\beta}; \quad f_1(x) = \int_a^{\infty} [K_{11}(s-x) - K_{11}(s+x)] p(s) ds;$$

$$f_2(x) = \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}}{\pi\mu_1^2} \int_a^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x} \right] p(s) ds + \int_a^{\infty} [K_{21}(s-x) - K_{21}(s+x)] p(s) ds.$$

Приведем систему (1.10) к каноническому виду. Получим:

$$\begin{aligned} w'(x) - \frac{ia_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} + \frac{ia_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a R_{11}^*(s-x) w'(s) ds + \\ + \int_{-a}^a R_{12}^*(s-x) \bar{w}'(s) ds + \int_{-a}^a R_{13}^*(s-x) \chi(s) ds + \int_{-a}^a R_{14}^*(s-x) \bar{\chi}(s) ds = \\ = F_1(x) \quad (-a < x < a); \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \chi(x) - \frac{ib_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} - \frac{ib_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a R_{21}^*(s-x) w'(s) ds + \\ + \int_{-a}^a R_{22}^*(s-x) \bar{w}'(s) ds + \int_{-a}^a R_{23}^*(s-x) \chi(s) ds + \int_{-a}^a R_{24}^*(s-x) \bar{\chi}(s) ds = \\ = F_2(x) \quad (-a < x < a) \end{aligned}$$

где

$$R_{1j}^*(x) = -\frac{\mathfrak{g}_1^{(1)}}{2\mathfrak{g}} R_{1,j}(x) \quad (j=1,2), \quad R_{1,j}^*(x) = -\frac{\mu_1^2}{2\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}} R_{2,j-2}(x) \quad (j=3,4),$$

$$R_{2j}^*(x) = -\frac{\mu_1^2}{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}} R_{2,j}(x) \quad (j=1,2), \quad R_{2,j}^*(x) = \frac{\mu_1^2}{2\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}} R_{2,j-2}(x) \quad (j=3,4),$$

$$F_1(x) = -\frac{\mu_1^2}{2\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}} (f_1(x) + if_2(x)), \quad F_2(x) = -\frac{\mu_1^2 \mathfrak{g}_1^{(2)}}{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}} (f_1(x) + if_2(x)),$$

$$a_1 = \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}}, \quad a_2 = \frac{\mathfrak{g}_2^{(1)}}{2\mathfrak{g}}, \quad b_1 = \frac{2\mu_1^2 \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{g}}, \quad b_2 = \frac{\mathfrak{g}_1^{(2)} \mathfrak{g}_2^{(1)}}{\mathfrak{g}},$$

$$\mathfrak{g} = \left(\mathfrak{g}_2^{(1)} \right)^2 - \left(\mathfrak{g}_1^{(1)} \right)^2 + \mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_1^{(2)}.$$

Систему (1.11) нужно рассматривать при условиях равновесия верхней полуплоскости и непрерывности смещений в конечных точках зоны контакта:

$$\int_{-a}^a \chi(s) ds = P; \quad \int_{-a}^a w'(s) ds = 0. \quad (1.12)$$

2. Составная плоскость с двумя полубесконечными межфазными трещинами

Прежде чем перейти к решению определяющей системы (1.11) в общем случае, рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда ширина полос стремится к бесконечности, т.е. рассмотрим задачу о плоско-деформированном состоянии составной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей симметрично расположенные две межфазные полубесконечные трещины. При этом будем считать, что плоскость деформируется только под воздействием одинаковых распределённых нагрузок $p(x)$, действующих на незащемленных берегах трещин и имеющих конечную результирующую P . Заметим, что указанная задача рассматривается впервые и представляет самостоятельный интерес. В этом случае регулярные части в системе (1.11) исчезают и мы приходим к следующей системе определяющих уравнений:

$$\begin{cases} w'(x) - \frac{ia_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s)ds}{s-x} + \frac{ia_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s)ds}{s-x} = F_1(x); \\ \chi(x) - \frac{ib_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s)ds}{s-x} - \frac{ib_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s)ds}{s-x} = F_2(x). \end{cases} \quad (|x| < a) \quad (2.1)$$

Условия непрерывности смещений в концевых точках зоны контакта $\pm a$ и равновесия верхней полуплоскости (1.12) в рассматриваемом случае принимают вид:

$$\int_{-a}^a \chi(s)ds = P; \quad \int_{-a}^a w'(s)ds = 0. \quad (2.2)$$

Построим замкнутое решение системы (2.1) при условиях (2.2). С этой целью заметим, что она по структуре совпадает с системой определяющих уравнений, полученных в [8] для аналогичной задачи в случае конечной межфазной трещины со смешанными условиями на берегах. Характеристическое уравнение системы (2.1) будет следующим:

$$a_2\lambda^2 - (b_2 - a_1)\lambda + b_1 = 0 \quad (2.3)$$

Решение этого уравнения отличается от решений характеристического уравнения, полученного в [8], лишь на постоянный множитель $\mathfrak{G}_2^{(2)}$. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда (2.3) имеет два различных корня $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае, как и в [8], введем рассмотрение функции $\varphi_j(x) = \chi(x) + \lambda_j w'(x)$ ($j = 1, 2$) и систему (2.1) запишем в виде двух независимых друг от друга сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j(x) + \frac{iq_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = Q_j(x) \quad (-a < x < a; j=1,2). \quad (2.4)$$

Здесь

$$Q_j(x) = \lambda_j F_1(x) + F_2(x); \quad \lambda_j = \frac{b_2 - a_1 - (-1)^j \sqrt{(a_1 - b_2)^2 - 4a_2 b_1}}{2};$$

$$q_j = \frac{a_1 + b_2 + (-1)^j \sqrt{(a_1 - b_2)^2 - 4a_2 b_1}}{2}.$$

Условия (2.2), при этом, примут вид:

$$\int_{-a}^a \varphi_j(s) ds = P \quad (2.5)$$

Несложно проверить, что, как и следовало ожидать, коэффициенты q_j ($j=1,2$) те же самые, что и в [8]. Следовательно решения уравнений (2.4) при условиях (2.5) будут даваться формулами [8]:

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1-q_j^2} \left\{ Q_j(x) + \frac{q_j \omega_j(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{Q_j(s) ds}{\omega_j(s)(s-x)} \right\} + \frac{P \sin(\pi \gamma_j)}{\pi} \omega_j(x) \quad (2.6)$$

$$(-a < x < a; j=1,2)$$

$$\text{где } \omega_j(x) = (x+a)^{-\gamma_j} (a-x)^{\gamma_j-1}; \quad \gamma_j = \frac{\ln|g_j|}{2\pi i} + \frac{\theta_j}{2\pi};$$

$$0 < \theta_j = \arg(g_j) < 2\pi; \quad g_j = \frac{1+q_j}{1-q_j}; \quad (j=1,2)$$

При этом комплексная комбинация напряжений $\chi(x)$ и производная от смещений $w'(x)$ выражаются через функции $\varphi_j(x)$ ($j=1,2$) по формулам:

$$w'(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad \chi(x) = \frac{\lambda_2 \varphi_1(x) - \lambda_1 \varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.7)$$

Вычислим коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины $x = \pm a$. Из второй формулы (2.7) явствует, что выражение контактных напряжений содержит два слагаемых, которые в концевых точках трещины имеют разные степенные особенности. В случае, когда материалы полуплоскостей таковы, что $\text{Re} \gamma_1 > \text{Re} \gamma_2$, то в точке $x = -a$ главная (большая) особенность напряжений будет определяться слагаемым, содержащим функцию

$\varphi_1(x)$, в точке же $x = a$ доминирующим будет слагаемое, содержащее функцию $\varphi_2(x)$. Исходя из этого, будем иметь:

$$\begin{aligned}
K_I[(-a)^j] - iK_{II}[(-a)^j] &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow (-1)^j(a+0)} (a+x)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j} \chi(x) = \\
&= \frac{\left[(\lambda_1 + (-1)^j \lambda_1) + (\lambda_2 - (-1)^j \lambda_2) \right] \sqrt{2\pi}}{2(-1)^{j+1}(\lambda_2 - \lambda_1)} \left\{ \frac{q_j}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{Q_j(s) ds}{\omega_j(s)(s - (-1)^j a)} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin \pi \gamma_j}{\pi} P \right\} \quad (j = 1, 2)
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогичным образом можно определить коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и в случае $\text{Re} \gamma_1 < \text{Re} \gamma_2$.

3. Решение определяющей системы в общем случае

Теперь обратимся к решению определяющей системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) при условиях (1.12). Опять будем рассматривать случай, когда характеристическое уравнение (2.2) имеет два различных корня. Как и выше, введем функции $\varphi_j(x) = \chi(x) + \lambda_j w'(x)$ ($j = 1, 2$) и, используя формулы (2.7), систему (1.11) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi_j(x) + \frac{i q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds + \sum_{k=1}^2 \int_{-a}^a Q_{k,j}^{(1)}(s-x) \varphi_k(s) ds + \\
+ \sum_{k=1}^2 \int_{-a}^a Q_{k,j}^{(2)}(s-x) \bar{\varphi}_k(s) ds = Q_j(x) \quad (-a < x < a; j = 1, 2),
\end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{1,j}^{(1)}(x) &= \frac{\lambda_j [R_{1,1}^*(x) - \lambda_2 R_{1,3}^*(x)] + R_{2,1}^*(x) - \lambda_2 R_{2,3}^*(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\
Q_{2,j}^{(1)}(x) &= \frac{\lambda_j [\lambda_1 R_{1,3}^*(x) - R_{1,1}^*(x)] + \lambda_1 R_{2,3}^*(x) - R_{2,1}^*(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\
Q_{1,j}^{(2)}(x) &= \frac{\lambda_j [R_{1,2}^*(x) - \bar{\lambda}_2 R_{1,4}^*(x)] + R_{2,3}^*(x) - \bar{\lambda}_1 R_{2,4}^*(x)}{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2}; \\
Q_{2,j}^{(2)}(x) &= \frac{\lambda_j [\bar{\lambda}_1 R_{1,4}^*(x) - R_{1,2}^*(x)] + \bar{\lambda}_1 R_{2,4}^*(x) - R_{2,3}^*(x)}{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2};
\end{aligned}$$

а черточка над функциями и постоянными означает их комплексно-сопряженные величины.

Полученную систему нужно рассматривать при условиях (2.5). Решение системы (3.1) будем строить методом механических квадратур. Для этого при помощи замены переменных $s = a\xi$, $x = a\eta$ уравнение (3.1) сведем на интервал $(-1,1)$. Введя новые безразмерные искомые функции

$$\psi_j(\eta) = a\varphi_j(a\eta)/P \quad (j=1,2); \quad \psi_j(\eta) = a\bar{\varphi}_{j-2}(a\eta)/P \quad (j=3,4),$$

придем к системе

$$\psi_j(\eta) + \frac{iq_j}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 Q_{k,j}(\xi - \eta) \psi_k(\xi) d\xi = Q_j^*(\eta) \quad (3.2)$$

$$(-1 < x < 1; j=1,4)$$

при условиях

$$\int_{-1}^1 \psi_j(\xi) d\xi = 1 \quad (j=1-4) \quad (3.3)$$

Здесь введены обозначения:

$$Q_{k,j}(\eta) = \begin{cases} aQ_{k,j}^{(1)}(a\eta) & (k=1,2) \\ aQ_{k-2,j}^{(2)}(a\eta) & (k=3,4) \end{cases}; \quad Q_j^*(\eta) = aQ_j(a\eta)/P \quad (j=1,2)$$

$$Q_{k,j}(\eta) = \overline{Q_{k,j-2}(\eta)}; \quad Q_j^*(\eta) = \overline{Q_{j-2}^*(\eta)} \quad (j=3,4)$$

Таким образом решение задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (3.2) совместно с условиями (3.3). Очевидно, что искомые функции в конечных точках интервала интегрирования имеют те же особенности, что и выше, следовательно их можем представить в виде:

$$\psi_j(\eta) = \frac{\Psi_j^*(\eta)}{(\eta+1)^{\gamma_j} (1-\eta)^{1-\gamma_j}} \quad (j=1,2), \quad \psi_j(\eta) = \frac{\Psi_j^*(\eta)}{(\eta+1)^{\bar{\gamma}_{j-2}} (1-\eta)^{1-\bar{\gamma}_{j-2}}} \quad (j=3,4),$$

где функции $\Psi_j^*(\eta) (j=1,4)$ ограниченные непрерывные функции на интервале $[-1,1]$, а $\gamma_j (j=1,2)$ определены выше.

Далее, подставляя представления функций $\psi_j(\eta)$ ($j=1-4$) в (3.2) и (3.3) и используя соотношения, приведённые в [10], по стандартной процедуре, придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\psi_j^*(\xi_i^{(j)})$, где $\xi_i^{(j)}$ – корни многочлена Якоби с показателями, соответствующими весовым функциям в представлениях функций $\psi_j(\eta)$ ($j=1-4$).

После определения величин $\psi_j^*(\xi_i^{(j)})$ по интерполяционным формулам Лагранжа нетрудно восстановить функции $\psi_j(\eta)$ ($j=1-4$) ($-1 < \eta < 1$), а затем и напряженно-деформированное поле во всей базовой ячейке. В частности, приведенная комплексная комбинация контактных напряжений будет даваться формулой:

$$\chi_*(\eta) = \frac{a\chi(a\eta)}{P} = \frac{\lambda_2\psi_1(\eta) - \lambda_1\psi_2(\eta)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Отсюда, как и выше, в случае, когда $\text{Re}\gamma_1 < \text{Re}\gamma_2$, в точке $\eta = -1$ доминирующей, с точки зрения особенности, будет функция $\psi_2(\eta)$, а в точке $\eta = 1$ – функция $\psi_1(\eta)$. Следовательно, для комплексного коэффициента приведенных разрушающих напряжений будем иметь:

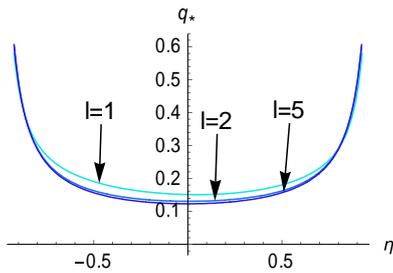
$$\begin{aligned} K_I[-a] - iK_{II}[-a] &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow -1+0} \omega_2^{-1}(\eta) \chi_*(\eta) = \frac{\lambda_1 \sqrt{2\pi} \psi_2^*(-1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}; \\ K_I[a] - iK_{II}[a] &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 1-0} \omega_1^{-1}(\eta) \chi_*(\eta) = -\frac{\lambda_2 \sqrt{2\pi} \psi_1^*(1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогичным образом можно определить коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и в случае $\text{Re}\gamma_1 > \text{Re}\gamma_2$.

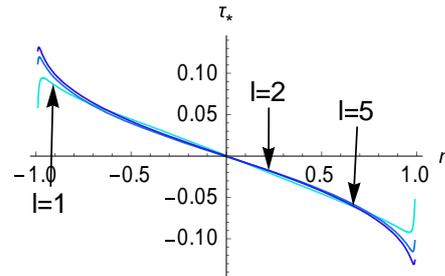
Численные расчеты

На основе проведённых численных расчётов изучены закономерности изменения контактных напряжений, действующих в зоне контакта разнородных полос, и безразмерных комплексных коэффициентов приведенных разрушающих напряжений в концевых точках трещин в зависимости от параметра $l = h/a$ и отношения упругих характеристик $\mu_1/\mu_2 = \mu$. При этом принято $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$ и считается, что плоскость деформируется под воздействием симметрично, относительно оси Oy , расположенных сосредоточенных сил $P/2$, приложенных к свободным берегам трещин в точках $\pm b$, т.е. принято $ap(a\eta)/P = [\delta(\eta - b^*) + \delta(\eta + b^*)]/2$.

Результаты численных расчётов приведены на фигурах 2 - 3. На фиг. 2а и 2б приведены соответственно графики безразмерных нормальных контактных напряжений $q_*(\eta) = \frac{aq(a\eta)}{P}$ и касательных контактных напряжений $\tau_*(\eta) = \frac{a\tau(a\eta)}{P}$ в зависимости от параметра l в случае, когда $\mu = 5, b = 2$.



Фиг.2а



Фиг.2б

Они показывают, что при возрастании параметра l , что можно трактовать как возрастание высоты полос при постоянной длине контактной зоны, как нормальные контактные напряжения, так и касательные контактные напряжения почти не изменяются.

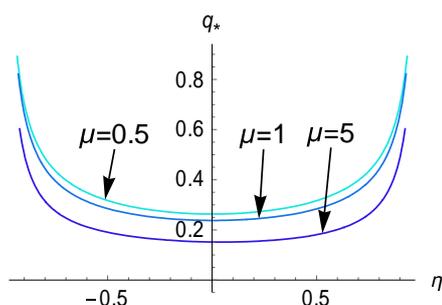
Таблица 1 $\mu_1 / \mu_2 = \mu = 5$

l	1	2	2.5	5	10	20
$K_I(\pm 1)$	0.1594	0.1653	0.1671	0.1679	0.1666	0.1657
$ K_{II}(\pm 1) $	0.0126	0.0153	0.0159	0.0166	0.0168	0.0168

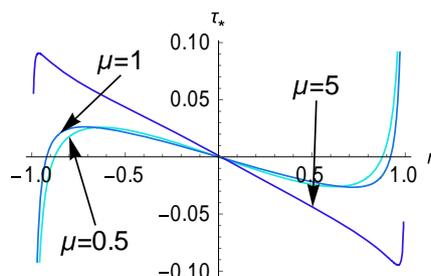
В таблице 1. приведены значения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих контактных напряжений в концевых точках трещин в зависимости от параметра l . Из них видно, что при увеличении l коэффициент интенсивности нормального отрыва, сначала возрастая до значения $l = 5$, а затем монотонно убывает, а абсолютная величина коэффициента интенсивности поперечного сдвига монотонно возрастая, стремятся к определенным пределам, соответствующим значениям указанных величин в случае двухкомпонентной плоскости с двумя полубесконечными межфазными трещинами.

На фиг. 3а и 3б приведены соответственно графики безразмерных нормальных и касательных контактных напряжений в зависимости от параметра μ в случае, когда $l = 1$ и $b = 2$. Они показывают, что при увеличении параметра μ , что можно

трактовать как увеличение μ_1 при постоянной μ_2 , нормальные контактные напряжения в средней части контактной зоны уменьшаются. Касательные же контактные напряжения, при этом, по абсолютной величине возрастают.



Фиг.3а



Фиг.3б

В таблице 2. приведены значения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих контактных напряжений в концевых точках трещин в зависимости от параметра μ в случае, когда $l = 2$.

Таблица 2

μ	0.5	0.7	1	2	5	10
$K_I (\pm 1)$	0.2387	0.2546	0.2731	0.3100	0.3516	0.3722
$ K_{II} (\pm 1) $	0.0242	0.0306	0.0370	0.0463	0.0502	0.0512

Из них видно, что при увеличении μ как коэффициент интенсивности нормального отрыва, так и абсолютная величина коэффициента интенсивности поперечного сдвига монотонно возрастают, стремясь к определенным пределам, соответствующим значениям указанных величин в случае, когда первая из полос жесткая.

Заключение

Таким образом, получена определяющая система сингулярных интегральных уравнений плоской задачи теории упругости для равномерно кусочно-однородного пространства с периодической системой двух полубесконечных параллельных, симметрично расположенных межфазных трещин при смешанных условиях на их берегах. В частном случае, когда ширина полос стремится к бесконечности, получена система определяющих уравнений задачи о плоско-деформированном состоянии двухкомпонентной составной плоскости с двумя симметрично расположенными полубесконечными межфазными трещинами со смешанными условиями на берегах и

построено ее точное решение в квадратурах. Проведен численный расчет и выявлены закономерности изменения контактных напряжений и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин в зависимости от упругих характеристик разнородных полос и геометрических параметров задачи.

Выражаю глубокую признательность к.ф.м.н. Арутюну Амирджаняну за оказанную помощь при проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов. ДАН СССР, 1940, т.27, № 4, с.330-334.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
3. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. - ПММ, 1962, т.26, вып. 5, с. 907-912.
4. Зверович Э.И. Смешанная задача теории упругости для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси // Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Тбилиси: Мецниереба, 1973. Т. 1. С. 103-114.
5. Мхитарян С.М. О напряжённо-деформационном состоянии упругой бесконечной пластины с трещиной, расширяющейся посредством вдавливания в неё гладкого тонкого включения.// Изв. НАН РА, Механика, 2019, т.72, № 4, с.37-64.
6. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения.// В сб.: "Современные проблемы механики и авиации", посвященном И.Ф. Абрамцову. 1980, с. 156-162
7. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинки с разрезами.// Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 131-137
8. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной.// Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, № 4, с.57-65.
9. В.Н. Акопян Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван -2014, 322с.
10. A.V. Sahakyan and H.A. Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi:10.1088/1742-6596/991/1/012070

Сведения об авторе

Григорян Арам Арутюнович – аспирант Института механики НАН РА,

тел.: (37410) 56-81-88