

**МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ
ДИФРАКЦИИ НА УЗКОМ ПРЕПЯТСТВИИ С ОСТРОЙ ЗАДНЕЙ
КРОМКОЙ**

Сумбатян М.А., Мусатова Н.К.

Ключевые слова: аэроакустика, летательный аппарат, метод граничных интегральных уравнений, метод Симпсона, акустическое давление, бесселевы функции, функция Грина, условие Мейкснера, полное поле, отражённое поле.

Sumbatyan M.A., Musatova N.K.

Boundary elements method in the problem of diffraction at a narrow obstacle with a sharp back edge

Keywords: aeroacoustics, aircraft, boundary element method, Simpson's method, acoustic pressure, Bessel functions, Green function, Meixner condition, total field, reflected field.

The problem of sound radiation by point source located in the tail of an aircraft is studied. The diffraction of sound on the sharp edge of two-dimensional model of the region is investigated. The diffraction problem for an acoustically solid obstacle is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind. The method of boundary integral equations is applied, due to which the equation over the entire area is reduced to an equation along the boundary curve. The behavior in the vicinity of the corner is determined by the Meixner condition. For the numerical solution of the basic integral equation, discretization is applied to the nodes of the grid selected on the boundary curve. Numerical integration is performed using the Simpson method. A system of linear algebraic equations is formed, from which the total acoustic pressure is found. The influence of the location of the source point and the value of the contour angle on the total acoustic pressure is considered. The reflected field is built at the far receiving point.

Մումբատյան Մ.Ա., Մուսատովա Ն.Կ.

**Եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդը սուր հետին
եզրով նեղ արգելքի վրա դիֆրակցիայի խնդրում**

Հիմնաբառեր՝ աերոակուստիկա, թռչող սարք, եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդ, Միմփսոնի մեթոդ, Բեսելի ֆունկցիա, Գրինի ֆունկցիա, Մեյքսների պայման, լրիվ դաշտ, անդրադարձված դաշտ

Դիտարկված է թռչող սարքի պոչի վրա տեղադրված կետային աղբյուրից ձայնի տարածման խնդիրը: Ուսումնասիրվում է ձայնի դիֆրակցիան սուր անկյունում պարզ երկչափ մոդելում: Կիրառվել է եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդը: Թվային ինտեգրումը կատարվել է Միմփսոնի մեթոդի օգնությամբ: Դիտարկվել է կետային աղբյուրի տեղակայման և կոնտուրի բացվածքի անկյան մեծության ազդեցությունը լրիվ ակուստիկ ճնշման վրա: Կառուցվել է անդրադարձված դաշտը ընդունման հեռու կետում:

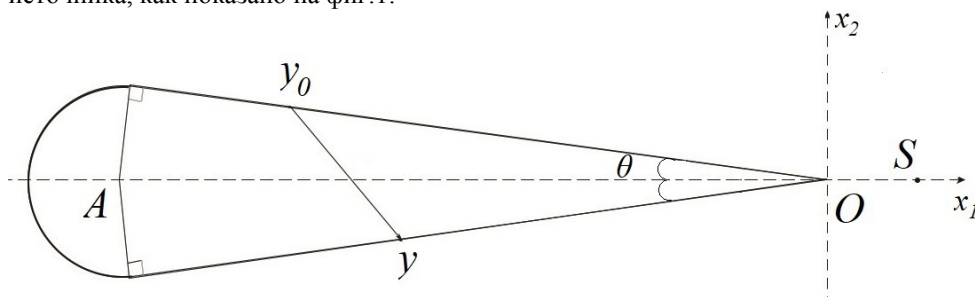
Изучается задача излучения звука точечным источником, расположенным в хвосте летательного аппарата. Исследуется дифракция звука на остром угле простейшей двумерной модели области. Задача дифракции для акустически твёрдого препятствия сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Применяется метод граничных интегральных уравнений, благодаря которому уравнение по всей области сводится к уравнению по граничной кривой. Поведение в окрестности угла определяется условием Мейкснера. Для численного решения основного интегрального уравнения применяется дискретизация по узлам сетки, выбранной на граничной кривой. Численное интегрирование производится с помощью метода Симпсона. Образуется система линейных алгебраических уравнений, из которой находится полное акустическое давление. Рассматривается влияние расположения точки источника и величины угла раствора контура на полное акустическое давление. Строится отражённое поле в дальней точке приёма.

Введение

Задача излучения звука точечным источником, расположенным в хвосте летательного аппарата, является одной из актуальных проблем аэроакустики. На практике данная задача играет важную роль, например, в распространении шума от двигателя летательного аппарата или подводной лодки после взаимодействия с его острой поверхностью. Для изучения этого явления необходимо исследовать дифракцию [1,2] от точечного источника звука на остром угле хвоста летательного или подводного аппарата. Цель данной работы – применение метода граничных интегральных уравнений [3,4] к задаче дифракции на остром угле, изучение влияния острого угла летательного аппарата на величину акустического давления в полном поле, а также поведение давления в рассеянном поле в случае дальней точки приёма.

Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу дифракции гармонической звуковой волны, излучаемой точечным источником S , расположенным вблизи острого угла некоторого тела (фиг.1). Для оценки влияния острой кромки на дифракцию падающей волны рассматривается двумерная модель летательного аппарата в виде сегмента круга радиуса r , сопряжённого с парой боковых прямолинейных отрезков. Полный угол раствора равен 2θ . Граничный контур – гладкий, кроме острой кромки. Геометрические размеры для рассмотренных численных примеров подробно описаны в разделе «Результаты». Ограничимся рассмотрением акустически жёсткой границы (однородное граничное условие Неймана) и симметричным расположением источника, как показано на фиг.1.



Фиг. 1. Схема летательного аппарата

На фиг. 1 точка S обозначает точечный источник звука; оси x_1 и x_2 соответствуют декартовой системе координат; O – начало координат; A – центр окружности, образующей криволинейную часть контура.

Метод решения

В рамках метода граничных интегральных уравнений (далее ГИУ) задача дифракции для акустически твёрдого препятствия сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$p(y_0) - 2 \int_l p(y) \frac{\partial \Phi(|y - y_0|)}{\partial n_y} dl_y = 2p^{inc}(y_0) \quad (1)$$

Здесь l – граничный контур области; $p(y)$ – акустическое давление на контуре l ; внутренняя точка y и внешняя точка y_0 – двумерные точки на границе; Φ – функция

Грина; n_y – нормаль к контуру в точке y ; dl_y – элементарная длина дуги в точке y ; $p^{inc}(y_0)$ – акустическое давление падающей волны.

При этом поведение в окрестности угла определяется условием Мейкснера [5]:

$$p(y) = D + O(r^\delta), \quad \delta = \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \quad (2)$$

Здесь r – расстояние между текущей точкой и точкой в угле, D – некоторая константа. Решение вблизи угла не является сингулярным, поскольку параметр δ всегда положителен. Благодаря этому свойству, вклад малой окрестности угла в интеграл (1) является малым. Следовательно, нет необходимости помещать узел сетки непосредственно в угол при дискретизации, чтобы получить более точное решение.

Функция Грина для двумерной задачи представляет собой функцию Ханкеля первого рода

$$\Phi(|y - y_0|) = \Phi(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr). \quad (3)$$

Её производная по нормали вычисляется в явном виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n_y} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_y)}{r}. \quad (4)$$

Падающая волна от точечного источника звука имеет вид

$$p^{inc}(y_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_m^s), \quad (5)$$

где r_m^s – расстояние от источника звука до точки y .

После подстановки производной функции Грина и давления в падающем поле уравнение (1) принимает вид

$$p(y_0) + \frac{ik}{2} \int_l \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_y)}{r} H_1^{(1)}(kr) p(y) dl_y = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr_m^s) \quad (6)$$

Перепишем уравнение (6) в виде

$$p(y_0) + \int_l K(y, y_0) p(y) dl_y = 2p^{inc}(y_0), \quad K(y, y_0) = \frac{ik}{2} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_y)}{r} H_1^{(1)}[kr(y, y_0)] \quad (7)$$

Обозначим точку наблюдения y_0 как η , а точку интегрирования как ξ . С учётом этого перепишем основное ГИУ:

$$p(\eta) + \int_l K(\xi, \eta) p(\xi) dl_\xi = 2p^{inc}(\eta) \quad (8)$$

Для численного решения интегрального уравнения применяется дискретизация по узлам сетки граничной кривой. На прямолинейной части верхней границы выберем следующее разбиение:

$$\begin{aligned}\eta_j^{(1)} &= -(j-1/2)h \cdot \cos \theta, \quad j=1, \dots, N \\ \eta_j^{(2)} &= (j-1/2)h \cdot \sin \theta, \quad j=1, \dots, N\end{aligned}\tag{9}$$

с шагом $h = L/N$, где N – количество узлов, расположенных на прямолинейной части контура. При этом, первый узел находится на расстоянии полушага от угла. Здесь и далее верхний индекс (1) соответствует горизонтальной координате, а (2) – вертикальной.

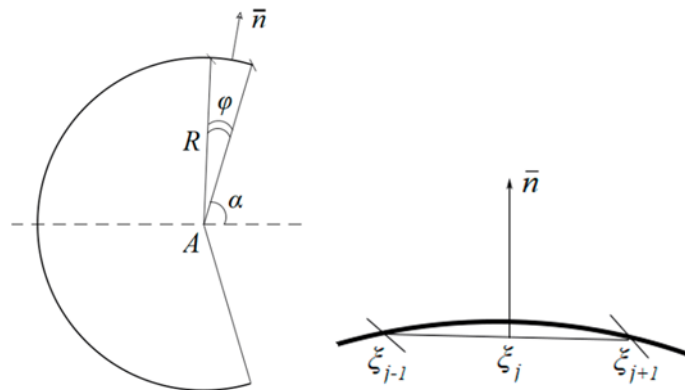
Формула для прямолинейной части нижней границы отличается только знаком вертикальной координаты:

$$\begin{aligned}\eta_j^{(1)} &= -(j-1/2)h \cdot \cos \theta, \quad j=1, \dots, N \\ \eta_j^{(2)} &= -(j-1/2)h \cdot \sin \theta, \quad j=1, \dots, N\end{aligned}\tag{10}$$

Для описания криволинейной части границы введём локальную полярную систему координат с центром в точке A (см. фиг.2). В этой системе координаты точек η_j будут равны

$$\eta_j = (R, \varphi_j), \quad j=1, \dots, M, \quad \text{где } \varphi_j = \alpha + \varphi \cdot \left(j - \frac{1}{2}\right),\tag{11}$$

$\varphi = \frac{\pi + 2\theta}{2M}$ – элементарный угол, образующийся при разбиении дуги, M – количество узлов, расположенных на полудуге.



Фиг. 2. Схема дискретизации контура криволинейной части границы / элемент дискретизации на криволинейной части

Вернёмся к декартовой системе. В силу того, что полярная система координат «отодвинута» от фактического начала координат на величину AO (см. фиг.1), прибавим эту величину к первой координате:

$$\begin{aligned}\eta_j^{(1)} &= -(AO - R \cos \varphi_j), \quad j = 1, \dots, M \\ \eta_j^{(2)} &= R \sin \varphi_j, \quad j = 1, \dots, M\end{aligned}\tag{12}$$

Координаты нормалей для всего контура определяются формулами

$$n_j^{(1)} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{h_j}, \quad n_j^{(2)} = -\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{h_j}, \quad j = 1, \dots, N\tag{13}$$

Численное интегрирование производится при помощи метода Симпсона [6,7]. Для

этого на интервале $\xi \in \left(\eta_j - \frac{h}{2}; \eta_j + \frac{h}{2} \right)$ введём точки двух концов $\xi_1^j = \eta_j - \frac{h}{2}$ и

$\xi_2^j = \eta_j + \frac{h}{2}$, и одну срединную точку $\xi_0^j = \eta_j$:

$$b_{mj} = \int_{\eta_j - h/2}^{\eta_j + h/2} K(\xi, \eta_m) d\xi \approx \frac{h}{6} \left[K(\xi_1^j, \eta_m) + 4K(\xi_0^j, \eta_m) + K(\xi_2^j, \eta_m) \right].\tag{14}$$

Дискретизация приводит основное ГИУ к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными коэффициентами относительно вектора \mathbf{p} с матрицей размером $K \times K$

$$Ap = f,\tag{15}$$

где компоненты СЛАУ определяются как

$$A = (a_{mj}), \quad a_{mj} = \delta_{mj} + b_{mj}, \quad \delta_{mj} - \text{символ Кронекера}$$

$$f = (f_m), \quad f_m = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr_m^s),\tag{16}$$

$$p = (p_j) = p(\eta_j) = p(\xi_j).$$

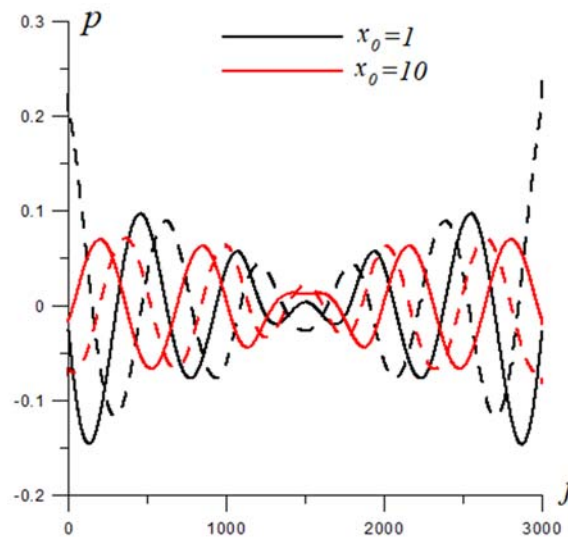
Стоит отметить, что задание такой сетки разбиения граничной кривой позволяет избежать попадания узла в угол клина, что теоретически могло бы быть единственной сингулярной комбинацией, дающей неинтегрируемое поведение функции.

Результаты

Для проведения численных расчётов была разработана программа на языке C++. Рассматриваемая задача дифракции на остром угле аппарата решена методом граничных интегральных уравнений. Для численного интегрирования применялась квадратурная формула Симпсона, которая свела ГИУ к СЛАУ. При дискретизации количество узлов на прямолинейной части контура взято равным $N = 1000$, а на криволинейной части – $M = 500$. Таким образом, мы имеем матрицу комплексных коэффициентов размером 3000×3000 , или вещественных коэффициентов размером 6000×6000 . Для решения СЛАУ использовался алгоритм LSQR [8], который показал хорошую точность и хорошее время работы для указанной размерности.

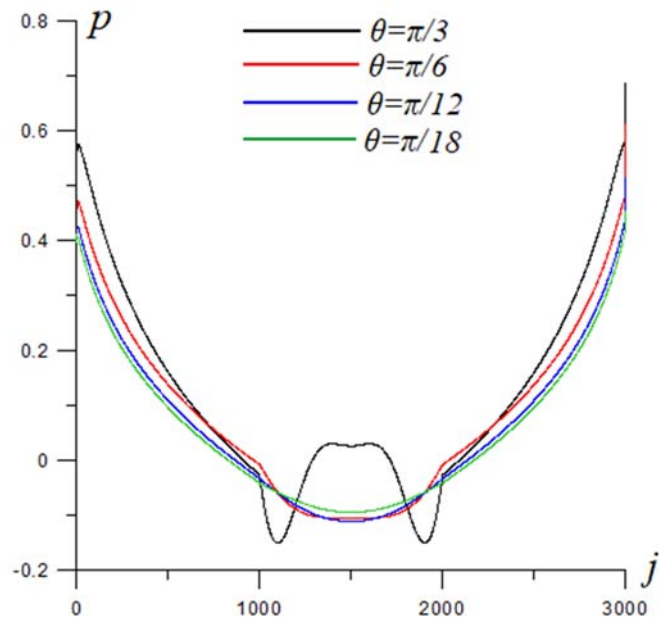
Для начала рассмотрим влияние расположения точечного источника звука $S(x_0, 0)$ на полное акустическое давление (фиг.3). Зададим следующие параметры: $L = 10$,

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \quad k = 1.$$

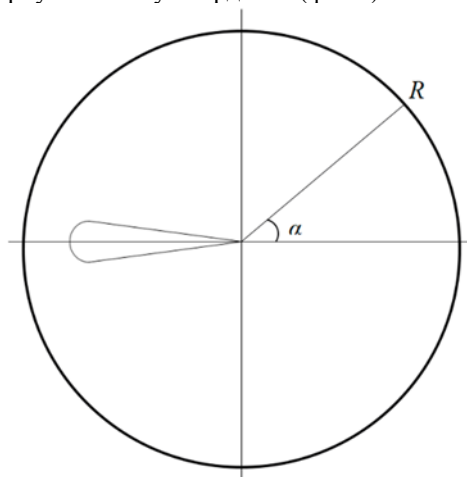


Фиг. 3. Вещественная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части акустического давления p при двух значениях x_0 . По горизонтали отложен j – номер узла. Случай $x_0 = 1$ представляет для нас больший интерес, поэтому далее будем рассматривать только его.

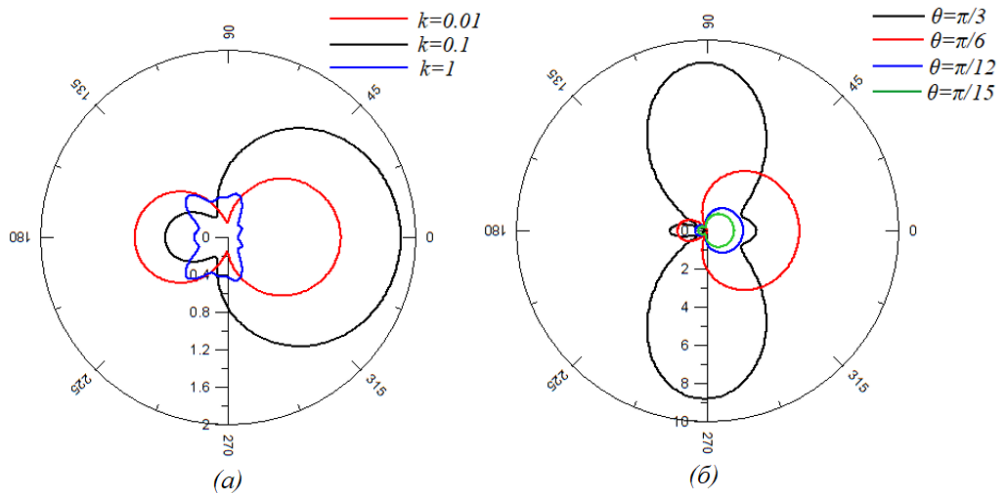
Рассмотрим влияние величины угла раствора контура на акустическое давление при фиксированных параметрах $L = 10$, $k = 0.1$, $x_0 = 1$ (фиг.4).



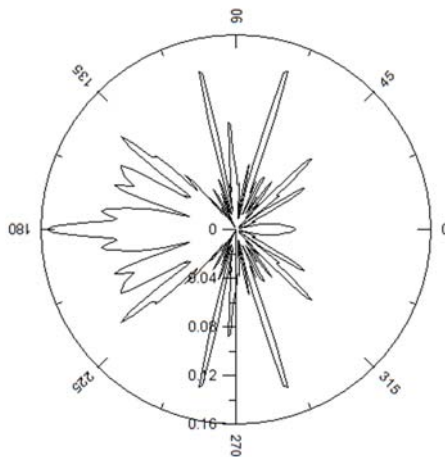
Фиг. 4. Вещественная часть акустического давления p при различных значениях угла θ
 Рассмотрим акустическое давление в отражённом поле в дальней точке приёма. Для этого перейдём в полярную систему координат (фиг.5).



Фиг. 5. Область и точка приёма в дальней зоне в полярной системе координат
 Для каждого угла α от 0 до 360 градусов вычисляем рассеянное акустическое давление (фиг.6). Расстояние от начала координат до точки приёма берём равным $R = 10000$.



Фиг.6. Давление в отражённом дальнем поле как функция полярного угла наблюдения при (а) фиксированных $L = 10$, $x_0 = 1$, $\theta = \frac{\pi}{12}$ и переменной k ; (б) фиксированных $L = 10$, $x_0 = 1$, $k = 0.1$ и переменной θ



Фиг.7. Давление в отражённом дальнем поле как функция полярного угла наблюдения при $L = 10$, $x_0 = 1$, $\theta = \frac{\pi}{12}$, $k = 10$

Заключение

По результатам проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

1. Благодаря условию Мейкснера вклад малой окрестности угла в интегральное уравнение является малым. Следовательно, необходимость помещать узел сетки непосредственно в угол при дискретизации, чтобы получить более точное решение, отсутствует.

2. Рассмотренные результаты для рассеянного поля в дальней зоне показали, что чем меньше угол раствора области, тем меньше она акустически «видна» в дальней точке приёма.

3. На большой частоте диаграмма рассеяния показала некоторые явно выраженные максимумы (фиг.7). На соответствующих углах система аппарат - источник звука акустически «видна» в дальнем поле. По остальным направлениям она практически «не видна». Этот факт даёт теоретическую базу для конструирования систем типа самолет-невидимка или подводная лодка - невидимка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 19-29-06013\19.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, *Mathematical Theory of Diffraction*, Boston: Birkhauser, 2003. 157 p.
2. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 328 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: пер с англ. М.: Мир, 1984. 494 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 525 с.
5. M.A. Nethercote, R.C. Assier, I.D. Abrahams, *Analytical methods for perfect wedge diffraction: A review*, *Wave Motion*, 2020, v. 93. 102479.
6. D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, New York: John Wiley, 1983.
7. K.E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*. 2nd ed. New York: John Wiley, 1989. 712 p.
8. C.C.Paige, M.A. Saunders, *LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares*, *ACM Trans. Math. Software*, 1982. V. 8(1), p. 43-71.

Сведения об авторах:

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: masumbatyan@sfedu.ru, тел.: +7(928)139-70-67

Мусатова Наталия Кристиановна – магистр, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: musatova.nataliasfedu.ru@gmail.com, тел.: +7(999)698-66-97

Поступила в редакцию