

**ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ  
СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ И  
ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ  
НАГРУЗОК**

**Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Амирджанян А.А.**

**Ключевые слова:** динамическая смешанная задача, трещина, включение, межфазные дефекты, стационарные колебания.

**Накобян В.Н., Даштоян Л.Л., Амирджанян А.А.**

**Plane stress state of an elastic compound plane with interfacial cracks and inclusions under the influence of dynamic loads**

**Keywords:** dynamic mixed boundary value problem, inclusion, crack, interphase defects, vibrations.

This paper considers the plane stress state of piecewise-homogeneous elastic planes from two heterogeneous half-planes with absolutely rigid thin inclusions and cracks located on the interface line. It is assumed that the plane is deformed under the action of a periodically changing concentrated loads acting on inclusions and static distributed loads applied to the crack faces and preventing their closure. In the beginning, discontinuous solutions of the equations of motion of the plane theory of elasticity for the composite plane are constructed to obtain the singular integral equations of governing system of the stated problem. The solution of the governing equations, in the case when a piecewise homogeneous plane contains only one inclusion and one crack, is constructed by the method of mechanical quadrature. The numerical calculation is carried out. Behaviors of amplitudes of stress jumps, intensity coefficients, crack openings and the angle of rotation of inclusions depending on the frequency of the forced vibrations are determined.

**Հակոբյան Վ.Ն., Դաշտոյան Լ.Լ., Ամիրջանյան Ա.Ա.**

**Միջֆազային ճաքեր և ներդրակներ պարունակող բաղադրյալ առաձգական հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը դինամիկ բեռների ազդեցության տակ**

**Հիմնաբառեր.** դինամիկ խառը եզրային խնդիր, ներդրակ, ճաքեր, միջֆազային դեֆեկտ. տատանումներ

Դիտարկված է երկու տարբեր կիսահարթություններից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն պարունակում է միջֆազային ճաքեր և բացարձակ կոշտ բարակ ներդրակներ: Ենթադրվում է, որ կտոր առ կտոր համասեռ հարթությունը դեֆորմացվում է ներդրակների վրա կիրառված ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող կենտրոնացած բեռների և ճաքերի ափերին կիրառված ու նրանց փակումը արգելափակող նորմալ բաշխված ստատիկ բեռների ազդեցության տակ: Սկզբում կառուցվել են առաձգականության տեսության հարթ խնդրի շարժման հավասարումների խզվող լուծումները, որոնց հիման վրա ստացվել է դիտարկվող խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը: Այն դեպքում, երբ կտոր առ կտոր հարթությունը պարունակում է մեկ ներդրակ և մեկ ճաք, որոշիչ հավասարումների լուծումը կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ: Կատարված է թվային հաշվարկ: Որոշված են լարումների թռիչքների մոդուլների, ինտենսիվության գործակիցների բացարձակ մեծությունների, ճաքի բացվածքի և ներդրակի պտտման անկյան փոփոխման օրինաչափությունները կախված ստիպողական տատանումների հաճախությունից:

Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащих межфазные трещины и абсолютно жёсткие тонкие включения. Считается, что кусочно-однородная плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющихся во времени сосредоточенных нагрузок, приложенных к включениям, и статических нормальных распределённых нагрузок, приложенных к берегам трещин и не допускающих их закрытие. Сначала построены разрывные решения уравнений движения плоской теории упругости для составной плоскости, на основе которых получены определяющие сингулярные интегральные уравнения поставленной задачи. Решение определяющих уравнений, в случае, когда кусочно-однородная плоскость содержит только одно включение и одну трещину, построено методом механических квадратур. Проведён численный расчёт. Определены закономерности изменения модулей амплитуд скачков напряжений, абсолютной величины коэффициентов интенсивности, раскрытия трещины и угла поворота включений в зависимости от частоты вынужденных колебаний.

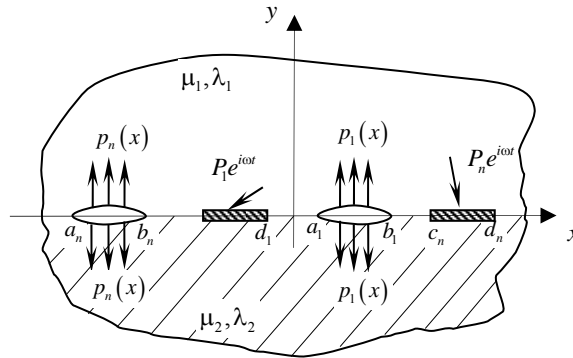
## Введение

Динамические смешанные и контактные задачи всегда были и остаются одним из развивающихся и актуальных с практической точки зрения направлений математической теории упругости. Изучению динамического напряжённо-деформированного состояния массивных однородных или составных деформируемых тел, содержащих концентраторы напряжений различного типа посвящено много работ. Многие основополагающие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1-3]. В развитие этого направления механики деформируемого твёрдого тела большой вклад внесла российская школа механиков. Академиком РАН В.А.Бабешко и его учениками был поставлен и решён ряд двумерных и трёхмерных задач в этом направлении. Ими разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами [4-7]. Укажем также на монографию [8], где приведены решения многих плоских и пространственных динамических контактных задач, представляющих практический интерес. Однако, мало работ, где изучено взаимовлияние концентраторов напряжений различного типа, одновременно находящихся в массивных однородных или составных телах, что является актуальной проблемой как с точки зрения сейсмологии, так и сейсмостойкого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии. Отметим работы [9-13], где построены решения некоторых антиплоских и плоских задач для составного полупространства и однородной плоскости, одновременно содержащих концентраторы напряжений различного типа и непосредственно связаны с настоящей работой.

## Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть составная упругая плоскость из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ  $\mu_1, \lambda_1$  и  $\mu_2, \lambda_2$  соответственно, отнесённая к декартовой системе  $Oxy$ , ось  $Ox$  которой направлена по линии стыка полуплоскостей, по линиям  $L_1 = \bigcup_{j=1}^N (a_j, b_j)$  и  $L_2 = \bigcup_{j=1}^M (c_j, d_j)$ , состоящих из конечного числа непересекающихся конечных интервалов, содержит системы межфазных трещин и абсолютно жёстких тонких включений соответственно. Будем считать, что составная плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющихся во

времени с частотой  $\omega$  сосредоточенных нагрузок  $P_j e^{i\omega t}$  ( $j = 1 \div M$ ), приложенных к включениям в точках  $x_0^{(j)}$  и составляющих угол  $\alpha_j$  с осью  $Oy$ , а также под воздействием статических нормальных распределенных нагрузок  $p_j(x)$  ( $j = 1 \div N$ ), приложенных к берегам трещин и не допускающих их закрытие



Фиг.1

В рамках линейной теории упругости поставленную задачу можно представить в виде суммы двух задач, в одной из которых составная плоскость деформируется только статическими нормальными распределёнными нагрузками, приложенными к берегам трещин, а во второй – только под воздействием динамических нагрузок, приложенных к включениям. Так как первая из этих задач решена [14], то мы рассмотрим только вторую задачу. Снабдив характерные величины для разнородных полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_y^{(2)}(x, 0, t) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0, t) \\ u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t) \\ v_1(x, 0, t) = v_2(x, 0, t) \end{cases} \quad (x \notin L_1 \cup L_2) \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(j)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(j)}(x, 0, t) = 0 & (x \in L_j; j = 1, 2) \\ u_j(x, 0, t) = u_m e^{i\omega t} & (c_m < x < d_m; j = 1, 2) \\ v_j(x, 0, t) = (v_m + \delta_m x) e^{i\omega t} & (c_m < x < d_m; j = 1, 2) \end{cases} \quad (1b)$$

где  $u_j(x, y, t)$  и  $v_j(x, y, t)$  ( $j = 1, 2$ ) – горизонтальные и вертикальные смещения верхней и нижней полуплоскостей соответственно, удовлетворяющие уравнениям

движения, а  $\sigma_y^{(j)}(x, y, t)$  и  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y, t)$  – компоненты напряжения в этих полуплоскостях, связанные со смещениями известными формулами,  $u_m$  и  $v_m$  ( $m=1-M$ ), соответственно, горизонтальные и вертикальные составляющие жёстких смещений включений, а  $\delta_m$  – углы поворота включений.

Чтобы построить решение граничной задачи (1) сначала по формулам  $f(x, y, t) = f(x, y)e^{i\omega t}$  перейдём к амплитудам искомым функций и введём в рассмотрение амплитуды неизвестных функций разности смещений точек берегов трещин  $u(x)$ ,  $v(x)$  и безразмерных скачков напряжений на длинных сторонах включений  $\sigma(x)$ ,  $\tau(x)$  :

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) - u_2(x, 0) &= u(x) & (x \in L_1) \\ v_1(x, 0) - v_2(x, 0) &= v(x) & (x \in L_1) \\ \left[ \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) \right] / \mu_1 &= \sigma(x) & (x \in L_2) \\ \left[ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \right] / \mu_1 &= \tau(x) & (x \in L_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, решим вспомогательную задачу, состоящую из условий (1а), (2) и определим амплитуды компонент напряжений и смещений на линии стыка полуплоскостей  $y=0$  через введённые функции. Для этого решения уравнений Лямэ для амплитуд смещений представим в виде следующих интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ k v_*^{(j)} A_j(k) e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} - (-1)^j \frac{\chi_2^{(j)}}{k} B_j(k) e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk; \\ v_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (-1)^{j+1} v_*^{(j)} \chi_1^{(j)} A_j(k) e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} + B_j(k) e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда компоненты амплитуд напряжений будут даваться формулами:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(j)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \lambda_j - 2\mu_j v_*^{(j)} \left( \chi_1^{(j)} \right)^2 \right] A_j e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^j 2\mu_j \chi_2^{(j)} B_j e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk; \\
\tau_{xy}^{(j)}(x, y) &= -\frac{i\mu_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2(-1)^{j+1} k v_*^{(j)} \chi_1^{(j)} A_j e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ k + \left( \chi_2^{(j)} \right)^2 / k \right] B_j e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\chi_i^{(j)} &= \sqrt{k^2 - \left( \omega / c_i^{(j)} \right)^2}; \quad v_*^{(j)} = \left( c_1^{(j)} / \omega \right)^2, \quad \eta_n = \left( \omega / k c_2^{(n)} \right)^2; \\
\chi_m^{(n)} &= |k| \alpha_{m,n}; \quad \alpha_{1,n} = \sqrt{1 - \theta_n \eta_n}; \quad \alpha_{2,n} = \sqrt{1 - \eta_n}; \quad (m, n = 1, 2).
\end{aligned}$$

а  $c_i^{(j)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – скорости распространения упругих волн в соответствующих полуплоскостях. При этом, выбраны те ветви функций  $\chi_i^{(j)}(k)$  ( $i, j = 1, 2$ ), которые на бесконечности ведут себя как  $|k|$ , чем и обеспечивается исчезновение напряжений на бесконечности и однозначность обратного преобразования Фурье [15]

Используя приведённые соотношения для амплитуд смещений и напряжений, удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и определим неизвестные коэффициенты  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 1, 2$ ) через трансформанты Фурье неизвестных амплитуд функций скачков напряжений и смещений. Затем, подставляя полученные значения коэффициентов  $A_j, B_j$  ( $j = 1, 2$ ) в формулы (3) и (4), напишем разрывные решения уравнений движения плоской теории упругости для составной плоскости, выразив напряжения и смещения при помощи неизвестных амплитуд функций скачков. Приведём выражения компонентов амплитуд напряжений и смещений на линии стыка разнородных полуплоскостей  $y = 0$ , которые нам пригодятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y^{(2)}(x,0)}{\mu_2} &= l_1 \sigma(x) - l_3 u'(x) + \int_{L_2} K_{11}(s-x) \sigma(s) ds + \\
&+ \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \int_{L_2} K_{12}(s-x) \tau(s) ds - \int_{L_1} K_{13}(s-x) u'(s) ds + \\
&+ \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} + \int_{L_1} K_{14}(s-x) v'(s) ds;
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{xy}^{(2)}(x,0)}{\mu_2} &= l_1 \tau(x) + l_3 v'(x) - \int_{L_2} K_{21}(s-x) \sigma(s) ds - \\
&- \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \int_{L_2} K_{22}(s-x) \tau(s) ds + \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} + \\
&+ \int_{L_1} K_{23}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{24}(s-x) v'(s) ds;
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
u'_2(x,0) &= -l_5 \sigma(x) + l_7 u'(x) - \int_{L_2} K_{31}(s-x) \sigma(s) ds - \\
&\frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} - \int_{L_1} K_{32}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{33}(s-x) u'(s) ds - \\
&- \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} - \int_{L_1} K_{34}(s-x) v'(s) ds;
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
v_2(x,0) &= l_5 \tau(x) + l_7 v'(x) - \frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} - \\
&- \int_{L_2} K_{41}(s-x) \sigma(s) ds + \int_{L_2} K_{42}(s-x) \tau(s) ds + \\
&+ \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} + \int_{L_1} K_{43}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{44}(s-x) v'(s) ds.
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0) + \mu_1 \sigma(x); \\
\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) + \mu_1 \tau(x); \\
u_1(x, 0) &= u_2(x, 0) + u(x); \\
v_1(x, 0) &= v_2(x, 0) + v(x).
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь введены обозначения :

$$\begin{aligned}
K_{ij}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{Q_{i,j}(k)}{\Delta(k)} e^{ikx} dk; \quad Q_{1,1}(k) = g_{1,1} - \Delta l_1; \quad \eta_m = (\omega / k c_2^{(m)})^2 \\
Q_{1,2}(k) &= -i(g_{2,2} - \Delta l_2 \operatorname{sgn}(k)); \quad Q_{1,3}(k) = g_3 - \Delta l_3; \\
Q_{1,4}(k) &= -i(g_{4,2} - \Delta l_4 \operatorname{sgn}(k)); \quad Q_{2,1}(k) = -i(g_{2,1} - \Delta l_2 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{2,2}(k) &= g_{1,2} - \Delta l_1; \quad Q_{2,3}(k) = -i(g_{4,1} - \Delta l_4 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{2,4}(k) &= g_3 - \Delta l_3; \quad Q_{4,4}(k) = g_{7,2} - \Delta l_7; \\
Q_{3,1}(k) &= Q_{4,2}(k) = g_5 - \Delta l_5; \quad Q_{3,2}(k) = -i(g_{6,2} - \Delta l_6 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{3,3}(k) &= g_{7,1} - \Delta l_7; \quad Q_{3,4}(k) = -i(g_{8,2} - \Delta l_8 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{4,1}(k) &= -i(g_{6,1} - \Delta l_6 \operatorname{sgn}(k)); \quad Q_{4,3}(k) = -i(g_{8,1} - \Delta l_8 \operatorname{sgn}(k)); \\
\Delta &= \left( \mu^2 R_{0,1} R_{2,2} + R_{0,2} R_{2,1} - \mu \left( 2R_{1,1} R_{1,2} + \frac{1}{4} \eta_1 \eta_2 (\alpha_{1,2} \alpha_{2,1} + \alpha_{1,1} \alpha_{2,2}) \right) \right); \\
d_i &= (-1)^i (1 + \mu) + \theta_i (1 - \mu); \quad l_1 = (1 + \theta_1 \theta_2 + (1 + \theta_1)(1 - \theta_2)\mu) / d_1 d_2; \\
l_2 &= (\theta_1 + \theta_2) / d_1 d_2; \quad l_3 = (\theta_2 (1 - \theta_1) - \mu \theta_1 (1 - \theta_2)) / d_1 d_2; \\
l_4 &= ((1 - \theta_1) + \mu(1 - \theta_2)) / d_1 d_2; \quad l_5 = (\theta_1 (1 + \theta_2) - \mu \theta_2 (1 + \theta_1)) / d_1 d_2; \\
l_6 &= ((1 + \theta_2) + \mu(1 + \theta_1)) / d_1 d_2; \quad l_7 = ((1 + \theta_1 \theta_2)\mu + (1 - \theta_1)(1 + \theta_2)) / d_1 d_2; \\
l_8 &= -\mu(\theta_1 + \theta_2) / d_1 d_2; \quad \mu = \mu_2 / \mu_1; \quad \theta_m = (c_2^{(m)} / c_1^{(m)})^2 \quad (m = 1, 2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{n,i} &= \beta_i^n - \alpha_{1,i} \alpha_{2,i}; \quad g_{1,i} = \frac{1}{4} (4R_{1,1}R_{1,2} + \eta_1 \eta_2 \alpha_{1,i} \alpha_{2,3-i} - 4\mu R_{2,2}R_{0,1}); \\
g_{2,i} &= \frac{1}{2} (\eta_1 R_{1,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 R_{1,1} \alpha_{i,2}); \quad g_3 = -(R_{1,2}R_{2,1} - \mu R_{1,1}R_{2,2}); \\
g_{4,i} &= -\frac{1}{2} (\eta_1 \mu R_{2,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 R_{2,1} \alpha_{i,2}); \quad g_5 = (R_{0,2}R_{1,1} - \mu R_{0,1}R_{1,2}); \\
g_{6,i} &= \frac{1}{2} (\eta_1 R_{0,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 \mu R_{0,1} \alpha_{i,2}); \quad g_{8,i} = -\frac{1}{2} \mu (\eta_1 R_{1,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 R_{1,1} \alpha_{i,2}); \\
g_{7,i} &= \frac{1}{4} (4\mu R_{1,1}R_{1,2} + \eta_1 \eta_2 \mu \alpha_{1,i} \alpha_{2,3-i} - 4R_{0,2}R_{2,1}); \quad (i = \overline{1,2}; \quad n = \overline{0,1,2})
\end{aligned}$$

Отметим, что, учитывая поведение подинтегральных функций на бесконечности, в полученных соотношениях выделены сингулярные части ядер. Заметим также, что, как и в работе [6], в случае, когда  $\Delta(k)$  не имеет действительных корней, ядра  $K_{m,n}(x)$  регулярные функции от  $x$ . В случае же, когда  $\Delta(k)$  имеет действительные корни, функции  $K_{m,n}(x)$  содержат несобственные интегралы Фурье, которые нужно понимать в обобщённом смысле и представить их в виде суммы обычных, хорошо сходящихся, интегралов и специальных функций  $Si(x)$ ,  $Ci(x)$  (интегральный синус и косинус).

Теперь, используя формулы (5)-(8), удовлетворим условиям (1b), первоначально перейдя в них к амплитудам и дифференцируя последние два из них по  $x$ . В итоге, учитывая, что на  $L_1$   $\sigma(x) = \tau(x) = 0$ , а на  $L_2$   $u(x) = v(x) = 0$ , для определения амплитуд скачков смещений и напряжений получим следующую систему определяющих сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned}
& -l_3 u'(x) + \int_{L_2} K_{11}(s-x) \sigma(s) ds + \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} + \\
& \int_{L_2} K_{12}(s-x) \tau(s) ds - \int_{L_4} K_{13}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_4} K_{14}(s-x) v'(s) ds = 0; \\
& l_3 v'(x) - \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} - \int_{L_2} K_{21}(s-x) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{L_2} K_{22}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_4} K_{23}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_4} K_{24}(s-x) v'(s) ds = 0;
\end{aligned} \tag{10}$$



$$\begin{aligned}
& -l_5 \sigma(x) - \frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} - \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} - \int_{L_2} K_{31}(s-x) \sigma(s) ds - \\
& \int_{L_1} K_{32}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{33}(s-x) u'(s) ds - \int_{L_1} K_{34}(s-x) v'(s) ds = 0; \\
& l_5 \tau(x) - \frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} - \int_{L_2} K_{41}(s-x) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{L_2} K_{42}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{43}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{44}(s-x) v'(s) ds = \delta_m.
\end{aligned}$$

Систему (10) нужно рассматривать при условиях непрерывности смещений в конечных точках трещин

$$\int_{a_k}^{b_k} u'(x) dx = 0; \quad \int_{a_k}^{b_k} v'(x) dx = 0 \quad (k = 1 - N) \quad (11)$$

и уравнений движения включений, которые, без учёта их масс, записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\int_{c_k}^{d_k} \sigma(x) dx &= \frac{P_k \cos \alpha_k}{\mu_1}; \quad \int_{c_k}^{d_k} \tau(x) dx = \frac{P_k \sin \alpha_k}{\mu_1}; \\
\int_{c_k}^{d_k} x \sigma(x) dx &= \frac{x_0^{(k)} P_k \cos \alpha_k}{\mu_1} \quad (k = 1 - M).
\end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы построить решение системы (10), приведём её к каноническому виду. С этой целью умножим второе и четвёртое уравнения (10) на  $\pm i$  и просуммируем соответственно с первым и третьим уравнениями. Тогда, введя обозначения

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + (-1)^j i \tau(x) \quad (j = 1, 2);$$

$$\varphi_j(x) = u'(x) - (-1)^j i v'(x) \quad (j = 3, 4);$$

$$\Lambda_{11}(x) = \frac{1}{2l_5} \left[ K_{31}(x) + K_{42}(x) + i(K_{41}(x) + K_{32}(x)) \right];$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{12}(x) &= -\frac{1}{2l_5} \left[ K_{42}(x) - K_{31}(x) + i(K_{32}(x) - K_{41}(x)) \right]; \\
\Lambda_{13}(x) &= -\frac{1}{2l_5} \left[ K_{33}(x) + K_{44}(x) + i(K_{43}(x) + K_{34}(x)) \right]; \\
\Lambda_{14}(x) &= -\frac{1}{2l_5} \left[ K_{33}(x) - K_{44}(x) + i(K_{43}(x) - K_{34}(x)) \right]; \\
\Lambda_{21}(x) &= -\frac{1}{2l_5} \left[ K_{42}(x) - K_{31}(x) - i(K_{32}(x) - K_{41}(x)) \right]; \\
\Lambda_{22}(x) &= \frac{1}{2l_5} \left[ K_{31}(x) + K_{42}(x) - i(K_{41}(x) + K_{32}(x)) \right]; \\
\Lambda_{23}(x) &= -\frac{1}{2l_5} \left[ K_{33}(x) - K_{44}(x) - i(K_{43}(x) - K_{34}(x)) \right]; \\
\Lambda_{24}(x) &= -\frac{1}{2l_5} \left[ K_{33}(x) + K_{44}(x) - i(K_{43}(x) + K_{34}(x)) \right]; \\
\Lambda_{31}(x) &= -\frac{1}{2l_3} \left[ K_{11}(x) + K_{22}(x) + i(K_{21}(x) + K_{12}(x)) \right]; \\
\Lambda_{32}(x) &= -\frac{1}{2l_3} \left[ K_{11}(x) - K_{22}(x) + i(K_{21}(x) - K_{12}(x)) \right]; \\
\Lambda_{33}(x) &= \frac{1}{2l_3} \left[ K_{13}(x) + K_{24}(x) + i(K_{14}(x) + K_{23}(x)) \right]; \\
\Lambda_{34}(x) &= -\frac{1}{2l_3} \left[ -K_{13}(x) + K_{24}(x) + i(K_{14}(x) - K_{23}(x)) \right]; \\
\Lambda_{41}(x) &= -\frac{1}{2l_3} \left[ K_{11}(x) - K_{22}(x) + i(K_{12}(x) - K_{21}(x)) \right]; \\
\Lambda_{42}(x) &= -\frac{1}{2l_3} \left[ K_{11}(x) + K_{22}(x) - i(K_{21}(x) + K_{12}(x)) \right]; \\
\Lambda_{43}(x) &= \frac{1}{2l_3} \left[ K_{13}(x) - K_{24}(x) + i(K_{14}(x) - K_{23}(x)) \right]; \\
\Lambda_{44}(x) &= \frac{1}{2l_3} \left[ K_{13}(x) + K_{24}(x) - i(K_{23}(x) + K_{14}(x)) \right];
\end{aligned}$$

$$q_1 = l_6 / l_5; \quad q_2 = l_8 / l_5; \quad q_3 = l_4 / l_3; \quad q_4 = l_2 / l_3; \quad \delta_m^* = \delta_m / l_6 ,$$

систему (10) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) - \frac{(-1)^j i q_1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\varphi_j(s) ds}{s-x} + \frac{(-1)^j i q_2}{\pi} \int_{L_1}^a \frac{\varphi_{j+2}(s) ds}{s-x} + \\ + \sum_{k=1}^2 \int_{L_2} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds + \sum_{k=3}^4 \int_{L_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds = i(-1)^j \delta_m^* \\ (c_m < x < d_m; \quad j = 1, 2) \\ \varphi_j(x) - \frac{(-1)^j i q_3}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_j(s) ds}{s-x} + \frac{(-1)^j i q_4}{\pi} \int_{L_2} \frac{\varphi_{j-2}(s) ds}{s-x} + \\ + \sum_{k=1}^2 \int_{L_2} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds + \sum_{k=3}^4 \int_{L_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds = 0 \\ (a_m < x < b_m; \quad j = 3, 4) \end{aligned} \quad (13)$$

Условия (11) и (12) при помощи функций  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1 - 4$ ) можно записать в виде:

$$\int_{c_k}^{d_k} \varphi_j(s) ds = \frac{P_k e^{(-1)^j i \alpha_k}}{\mu_1}; \quad \int_{c_k}^{d_k} s [\varphi_1(s) + \varphi_2(s)] ds = \frac{2x_0^{(k)} P_k \cos \alpha_k}{\mu_1}; \quad (14)$$

$$(j = 1, 2; \quad k = 1 - M)$$

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi_j(x) dx = 0; \quad (j = 3, 4; \quad k = 1 - N); \quad (15)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (13) при условиях (14) и (15).

### **Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с одной трещиной и одним межфазным включением под воздействием динамических нагрузок**

Не нарушая общности, с целью более глубокого изучения закономерностей взаимовлияния концентраторов напряжения различных типов, методом механических квадратур построим решение задачи в случае, когда составная

плоскость на интервале  $(a_1, b_1)$  линии стыка двух полуплоскостей содержит одну межфазную трещину, а на интервале  $(c_1, d_1)$  одно межфазное абсолютно жёсткое включение, т.е. когда  $L_1 = (a_1, b_1)$  и  $L_2 = (c_1, d_1)$ . Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки  $P_0 e^{i\omega t}$ , приложенной к включению в точке  $x_0$  под углом  $\alpha$  к оси  $Oy$ . В этом случае система (13) примет вид:

(16)

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) - \frac{(-1)^j i q_3}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi_j(s) ds}{s-x} + \frac{(-1)^j i q_4}{\pi} \int_{c_1}^{d_1} \frac{\varphi_{j-2}(s) ds}{s-x} + \\ + \sum_{k=1}^2 \int_{c_1}^{d_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds + \sum_{k=3}^4 \int_{a_1}^{b_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds = 0 \\ (a_1 < x < b_1; j = 3, 4) \end{aligned}$$

При этом условия (14) и (15) примут вид:

$$\begin{aligned} \int_{c_1}^{d_1} \varphi_j(s) ds = \frac{P_0 e^{(-1)^j i \alpha}}{\mu_1}; \int_{c_1}^{d_1} s [\varphi_1(s) + \varphi_2(s)] ds = \frac{2x_0 P_0 \cos \alpha}{\mu_1} \\ (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi_j(s) ds = 0 \quad (j = 3, 4) \quad (18)$$

Чтобы решить систему (16) методом механических квадратур при помощи замены переменных  $x = p_1 \eta + k_1$ ;  $s = p_1 \xi + k_1$  на интервале  $(c_1, d_1)$  и  $x = p_2 \eta + k_2$ ;  $s = p_2 \xi + k_2$  на интервале  $(a_1, b_1)$  сформулируем систему (16) на интервале  $(-1, 1)$ . Получим:

$$\begin{aligned} \psi_j(\eta) - \frac{(-1)^j m_j}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 \Lambda_{jk}^*(\xi - \eta) \psi_k(\xi) d\xi = \\ = F_j(\eta) \quad (-1 < \eta < 1; j = 1-4) \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь введены обозначения:

$$\psi_j(\eta) = \varphi_j(p_1\eta + k_1) \quad (j=1,2); \quad \psi_j(\eta) = \varphi_j(p_2\eta + k_2) \quad (j=3,4);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_1 \Lambda_{jk}(p_1(\xi - \eta)) \quad (j, k=1,2);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_2 \Lambda_{jk}(p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1) \quad (j=1,2; k \neq j+2);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_2 \Lambda_{jk}(p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1) + \frac{(-1)^j i p_2 q_2}{(p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1)} \\ (j=1,2; k=j+2)$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_2 \Lambda_{jk}(p_2(\xi - \eta)) \quad (j, k=3,4);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_1 \Lambda_{jk}(p_1\xi - p_2\eta + k_1 - k_2) \quad (j=3,4; k \neq j-2);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_1 \Lambda_{jk}(p_1\xi - p_2\eta + k_1 - k_2) + \frac{(-1)^j i p_1 q_4}{(p_1\xi - p_2\eta + k_1 - k_2)} \\ (j=3,4; k=j-2);$$

$$F_j(\eta) = \begin{cases} (-1)^j i \delta_* & (j=1,2) \\ 0 & (j=3,4) \end{cases}; \quad m_j = \begin{cases} q_1 & (j=1,2) \\ q_3 & (j=3,4) \end{cases};$$

$$p_1 = (d_1 - c_1) / 2; \quad k_1 = (d_1 + c_1) / 2; \quad p_2 = (b_1 - a_1) / 2; \quad k_2 = (b_1 + a_1) / 2.$$

Условия (17) и (18) при помощи новых искомым функций примут следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \psi_j(\xi) d\xi = P_0^* e^{(-1)^j i \alpha}; \tag{20}$$

$$\int_{-1}^1 \xi [\psi_1(\xi) + \psi_2(\xi)] d\xi = 2x_0^* P_0^* \cos \alpha \quad (j=1,2);$$

$$\int_{-1}^1 \psi_j(\xi) d\xi = 0 \quad (j=3,4), \tag{21}$$

где

$$P_0^* = \frac{P_0}{p_1 \mu_1}; \quad x_0^* = x_0 / p_1.$$

При помощи результатов А.И.Мусхелишвили о поведении интегралов типа Коши в конечных точках интервала интегрирования нетрудно установить, что искомые функции в конечных точках интервала интегрирования, как и в случае статической задачи, имеют корневую особенность с осцилляцией и их можно представить в виде :

$$\psi_j(\eta) = \frac{\psi_j^*(\eta)}{(1+\eta)^{\alpha_j} (1-\eta)^{\beta_j}}; \quad \alpha_j = \frac{1}{2} + i(-1)^j \gamma_j; \quad \beta_j = \frac{1}{2} - i(-1)^j \gamma_j;$$

$$\left( \gamma_j = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\alpha_2(\mu_1 + \alpha_1\mu_2)}{\alpha_1(\mu_2 + \alpha_2\mu_1)} \right) \quad (j=1,2); \quad \left( \gamma_j = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \alpha_1\mu_2}{\mu_2 + \alpha_2\mu_1} \right) \quad (j=3,4),$$

где  $\alpha_j = 3 - 4\nu_j$  ( $j=1,2$ ) – постоянная Мусхелишвили, а  $\psi_j^*(\eta)$  ( $j=1-4$ ) – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала  $[-1,1]$ .

Подставляя значения функций  $\psi_j(\eta)$  ( $j=1-4$ ) в (19), (20) и (21), и используя соотношения, приведённые в [16], по стандартной процедуре, придём к системе из  $4n$  алгебраических уравнений относительно значений  $\psi_j^*(\xi_i)$  ( $j=1-4$ ), ( $i=\overline{1,n}$ ), где  $\xi_i$  – корни многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha_j, \beta_j)}(\xi_i) = 0$ .

После определения величин  $\psi_j^*(\xi_i)$  ( $j=1-4$ ) нетрудно при помощи интерполяционных многочленов Лагранжа восстановить функции  $\psi_j^*(\eta)$ , а тем самым, и  $\psi_j(\eta)$  ( $j=1-4$ ), и определить напряжённо-деформированное состояние в составной полуплоскости. В частности, безразмерное раскрытие трещины определится по формуле :

$$V_*(\eta) = V(p_2\eta + k_2) / p_2 = \frac{1}{2i} \int_{-1}^{\eta} [\psi_3(\xi) - \psi_4(\xi)] d\xi.$$

Для определения напряжений, действующих на длинных сторонах включений, будем использовать комплексную комбинацию формул (5) и (6), которую при помощи функции  $\phi_j(\eta)$  ( $j=1-4$ ) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Omega_j(x) &= \frac{\sigma_y^{(j)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(j)}(x, 0)}{\mu_2} = \omega_j \varphi_1(x) - l_3 \varphi_3(x) + \\
&+ \frac{il_2}{\pi} \int_{c_1}^{d_1} \frac{\varphi_1(s) ds}{s-x} - \frac{il_4}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi_3(s) ds}{s-x} - l_3 \sum_{k=1}^2 \int_{c_1}^{d_1} \Lambda_{3k}(s-x) \varphi_k(s) ds + \\
&+ l_3 \sum_{k=3}^4 \int_{a_1}^{b_1} \Lambda_{3k}(s-x) \varphi_k(s) ds \quad (-\infty < x < \infty; j=1, 2); \\
& \quad (\omega_1 = \mu + l_1; \omega_2 = l_1; \mu = \mu_2 / \mu_1).
\end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая, что на включении  $\varphi_3(x) = 0$ , и переходя на интервал  $[-1, 1]$ , найдём:

$$\begin{aligned}
\Omega_j^*(\eta) &= \Omega_j(p_1\eta + k_1) = \omega_j \psi_1(\xi) + \frac{il_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(\xi) d\xi}{\xi - \eta} - \\
&- \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 l_3 p_1 \Lambda_{3k}(p_1(\xi - \eta)) \psi_k(\xi) d\xi - \frac{il_4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_2 \psi_3(\xi) d\xi}{p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1} - \\
&- \sum_{k=3}^4 \int_{-1}^1 l_3 p_2 \Lambda_{jk}(p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1) \psi_k(\xi) d\xi \quad (j=1, 2)
\end{aligned}$$

Для определения же безразмерного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений опять будем использовать формулу (22), рассматривая её вне интервалов  $(a_1, b_1)$  и  $(c_1, d_1)$ . Учитывая, что вне этих интервалов функция скачка напряжений равна нулю, в безразмерных величинах её можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Omega_j(p_2\eta + k_2) &= \frac{\sigma_y^{(j)}(p_2\eta + k_2, 0) - \tau_{xy}^{(j)}(p_2\eta + k_2, 0)}{\mu_2} = \\
&= -\frac{il_4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3(\xi) d\xi}{\xi - \eta} - \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 l_3 \Lambda_{3k}^*(\xi - \eta) \psi_k(\xi) d\xi \quad (|\eta| > 1).
\end{aligned} \tag{23}$$

Очевидно, что функции, находящиеся под знаком суммы, ограничены в конечных точках интервала  $[-1, 1]$ . Поэтому, подставляя значение функции  $\psi_3(\xi)$  в (2.8) и используя значение интеграла [17]:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{(s-a)^{\gamma-1} (b-s)^{-\gamma} ds}{s-x} = \frac{1}{\sin \pi\gamma (b-x)} \left| \frac{a-x}{b-x} \right|^{\gamma-1} \quad (x < a, x > b)$$

(2.8) представим в виде:

$$\Omega_j(p_2\eta + k_2) = -\frac{il_4\psi_3^*(\pm 1)}{\text{ch}(\pi\gamma_3)|1+\eta|^{1/2-i\gamma_3}|1-\eta|^{1/2+i\gamma_3}} + \Phi(\eta) \quad (|\eta| > 1),$$

где

$$\Phi(\eta) = -\frac{il_4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[\psi_3^*(\xi) - \psi_3^*(\pm 1)]d\xi}{(\xi - \eta)(1 + \eta)^{\alpha_3}(1 - \eta)^{\beta_3}} - \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 l_3 \Lambda_{3k}^*(\xi - \eta) \psi_k(\xi) d\eta,$$

верхний знак соответствуют лучу  $\eta > 1$ , а нижний – лучу  $\eta < -1$ .

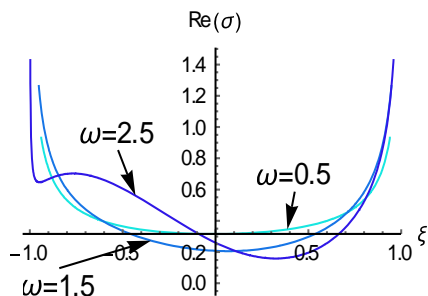
Тогда, комплексный коэффициент интенсивности разрушающих напряжений будет даваться формулой:

$$\begin{aligned} K_I(\pm 1) - iK_{II}(\pm 1) &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} |1 + \eta|^{1/2-i\gamma_3} |1 - \eta|^{1/2+i\gamma_3} \chi_j^*(\eta) = \\ &= -\frac{\sqrt{2\pi} il_4 \psi_3^*(\pm 1)}{\text{ch}(\pi\gamma_3)}. \end{aligned}$$

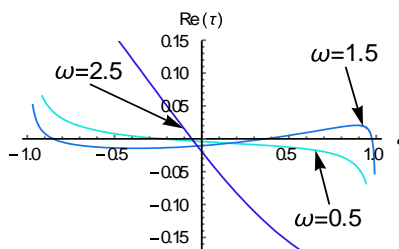
### Численные расчёты

Проведён численный расчёт и определены закономерности изменения действительных частей амплитуд скачков нормальных и касательных контактных напряжений, действующих на длинных сторонах включений, раскрытия трещины, абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений  $K_*(\pm 1) = \sqrt{K_I^2(\pm 1) + K_{II}^2(\pm 1)}$  и приведённого угла поворота включений  $\delta_* = \delta / l_6$  в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний  $\omega_* = \omega / ac_2^{(1)}$  в двух случаях, когда сосредоточенная нагрузка приложена к центру включения и направлена вдоль включения ( $\alpha = \pi / 2$ ) или перпендикулярно к нему ( $\alpha = 0$ ). При этом полагается, что включение находится на интервале  $(-a, a)$ , трещина на интервале  $(3a, 5a)$ , а упругие постоянные разнородных полуплоскостей имеют следующие значения  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $\mu = \mu_2 / \mu_1 = 2$ ,  $P_0^* = 1$ . На фиг.2а-2б приведены графики действительных частей амплитуд скачков соответственно нормальных и касательных контактных напряжений в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний  $\omega_*$ , когда нагрузка перпендикулярна включению ( $\alpha = 0$ ).





Фиг.2а. скачок нормальных напряжений  $\alpha = 0, \mu = 2$



Фиг.2б. скачок касательных напряжений  $\alpha = 0, \mu = 2$

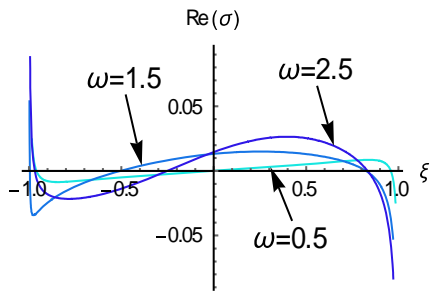
Из них видно, что при увеличении частоты вынужденных колебаний амплитуда скачка нормальных контактных напряжений по абсолютной величине в некоторой части контактной зоны возрастает, а на остальной части убывает и становятся осциллирующими. Амплитуда касательных контактных напряжений при этом по абсолютной величине возрастает и меняет знак на обратный.

В табл. 1. приведены значения приведённого угла поворота включения и абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в указанном случае. Из них видно, что как действительная часть угла поворота включения, так и абсолютная величина комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений при увеличении частоты вынужденных колебаний сначала по абсолютной величине возрастают, а затем убывают.

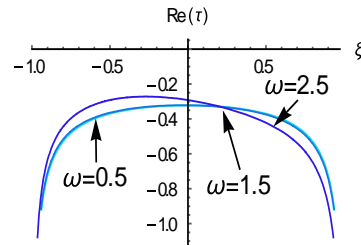
Таблица 1.  $\alpha = 0, \mu = 2$

$\omega_*$	0.2	0.5	1	1.5	2.5
$\text{Re} \delta_*$	-0.00055	-0.0038	-0.0039	-0.0334	-0.0214
$ K^*(-1) $	0.0622	0.3180	0.4893	0.5939	0.2857
$ K^*(1) $	0.0739	0.3466	0.8637	0.9143	0.2736

На фиг.3а-3б приведены графики действительных частей амплитуд скачков соответственно нормальных и касательных контактных напряжений в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний  $\omega_*$ , когда нагрузка направлена вдоль включения ( $\alpha = \pi/2$ ).



Фиг.3а. скачок нормальных напряжений  $\alpha = \pi / 2, \mu = 2$



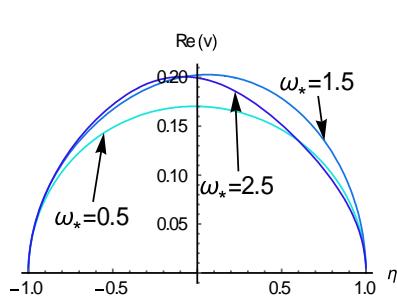
Фиг.3б. скачок касательных напряжений  $\alpha = \pi / 2, \mu = 2$

Из них явствует, что увеличение частоты вынужденных колебаний мало влияет на распределение действительной части амплитуд скачков касательных контактных напряжений. Действительная часть же амплитуд скачков нормальных контактных напряжений, при этом, на порядок малы. Однако, их изменение приводит к изменению знака действительной части амплитуды угла поворота включения, что подтверждается результатами расчётов, приведённых в табл.2. В этой таблице приведены также значения абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений. Они, как и в первом случае, при увеличении частоты вынужденных колебаний сначала возрастают, а затем убывают.

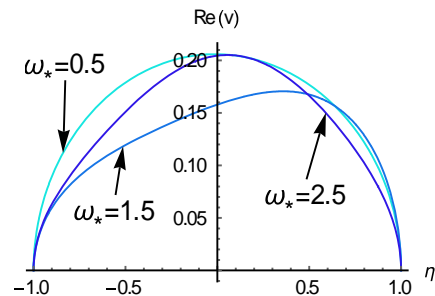
Таблица 2.  $\alpha = \pi / 2, \mu = 2$

$\omega_*$	0.2	0.5	1	1.5	2.5
$\text{Re} \delta_*$	-0.00396	-0.0039	-0.0038	-0.0008	0.00009
$ K^*(-1) $	0.0404	0.1220	0.2234	0.0673	0.0143
$ K^*(1) $	0.0351	0.1319	0.3029	0.2773	0.3190

На фиг.4а-4б приведены графики действительных частей амплитуд скачков нормальной составляющей смещения берегов трещины в моменты времени  $t_k = 2\pi k / \omega$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), соответственно в случаях  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi / 2$ , когда вместе с динамической сосредоточенной нагрузкой  $P_0^* = 1$ , действующей на включение, на берега трещины действует статическая распределённая нагрузка интенсивности  $q_0$ , препятствующая закрытию трещины. При этом, принято  $q_0^* = q_0 / \mu_2 l_3 = -0.1$ .



Фиг.4а. скачок нормальных смещений  $\alpha = 0$ ,  $\mu = 2$



Фиг.4б. скачок нормальных смещений  $\alpha = \pi / 2$ ,  $\mu = 2$

Они показывают, что при выбранных значениях параметров увеличение частоты вынужденных колебаний приводит к потере симметричности формы раскрытия трещины.

### Заключение

Таким образом, в работе методом обобщённого преобразования Фурье построены разрывные решения уравнений движения плоской теории упругости для составной плоскости из двух разнородных полуплоскостей с системами непересекающихся, межфазных трещин и абсолютно жёстких включений конечных длин. На основе этих решений получена определяющая система поставленной задачи в виде системы сингулярных интегральных уравнений второго рода, решение которой, в случае одной трещины и одного включения, построено методом механических квадратур. Проведён численный анализ и изучены закономерности изменения действительных частей амплитуд скачков контактных напряжений на длинных сторонах включений, нормальных составляющих смещения точек берегов трещин, амплитуд приведённого угла поворота включений и абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в зависимости от величины частоты вынужденных колебаний при определённых значениях упругих и геометрических характеристик задачи. Показано, что при выбранных физико-механических и геометрических параметрах, в случае, когда сосредоточенная нагрузка направлена вдоль включения увеличение частоты вынужденных колебаний, приводит к перераспределению амплитуд скачков нормальных контактных напряжений в зоне контакта, вследствие чего изменяется действительная часть амплитуды угла поворота включения. На этой основе можно утверждать, что при помощи выбора частоты вынужденных колебаний можно управлять действительной частью угла поворота включения, в частности достичь исключения его поворота.

**Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 18Т-2С290.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович Н.Н., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
4. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т.307. №2. С.324–327. Babeshko V.A. On a problem of dynamic destruction of layered bodies with cracks // Proc. Of Academy of Sciences. USSR. 1989. Vol. 207, №2, pp.324–327. (in Russian)
5. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С.5–9. Babeshko V.A. Mediums with heterogeneities (combination of inclusions with heterogeneities) // Proc. RAS. Mechanics of Solids. 2000. №3. Pp.5-9. (in Russian)
6. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. №5. С.625–628. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T. On a solution of problem on vibration of elastic body, containing the system of inner cavities// Proc. Proc. of Academy of Sciences. 2002. Vol.382. №5. Pp. 625-628. (in Russian)
7. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3. С.500–507. Pnyakhina O.D., Smirnova A.V. The effective method for solution of dynamic problems for layered mediums with discontinuous boundary conditions. // journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2004.Vol.68. Iss.3, pp.500-507. (in Russian)
8. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости // НАН РА Ереван, 1998, 274с.
9. Акопян В.Н., Амирджанян А.А.,Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
10. Nakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. // Proceedings of the Twelfth 23 International Conference on Composites or Nano Engineering, ICCE-12 August 1-6, 2005, Spain.
11. Nakobyan V. N., Amirjanyan H. A. and Dashtoyan L. L. Forced shift vibrations of stamp on the border of composite half-space with interfacial partially detached thin inclusions from the matrix //Journal of Physics: Conference Series, 2020, volume 1474 <https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1474/1>
12. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными включениями под воздействием динамических нагрузок. Труды XX -ой межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 24-28.
13. Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Саакян А.В. Влияние колеблющегося на границе упругой полуплоскости жесткого штампа на напряженное состояние внутреннего жесткого тонкого включения. Труды XX-ой межд. конф.

- «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 29-33.
14. Sahakyan A.V., Dashtoyan L.L. On one problem for compound plane with crack and inclusion with the existence of temperature field // Proceedings of the 5th international congress on thermal stresses and related topics, TS 2003, 8 June 2003, Blacksburg, VA, pp. 411-414
  15. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279ст. Noble B. Wiener-Hopff method// Mir, 1962, 279p. (in Russian)
  16. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
  17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series.// Moscow. Nauka. 1981. 738p. (in Russian)

**Сведения об авторах:**

**Акопян Ваграм Наслетникович** – доктор физ.-мат. наук., проф., директор Института механики НАН РА, тел.: (37491) 350222, e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

**Даштоян Л.Л.** – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА, (37410) 52-48-90, e-mail: [Lilit\\_Dashtoyan@mechins.sci.am](mailto:Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am)

**Амирджанян Арутюн Арменович** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

Поступила в редакцию 07.08.2020