

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Хачатрян А.М., Петросян Г.А.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропная двухслойная цилиндрическая оболочка, смешанные условия, внутренняя задача.

Khachatryan A.M., Petrosyan G.A.
**Asymptotic solution of one mixed boundary value problem
two-layer anisotropic cylindrical shell**

Key words: asymptotic method, two-layer anisotropic cylindrical shell, mixed conditions, interior problem.
The question of determining the stress-strain state in a three-dimensional problem for an anisotropic two-layer cylindrical shell, on the outer surface of which the values of normal stress and tangential displacements are specified, and on the inner surface – values of normal displacement and tangential stresses is discussed. Using the asymptotic method, the solution of the internal problem is constructed.

Խաչատրյան Ա.Մ., Պետրոսյան Գ.Ա.
**Երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի մի խառը եզրային
խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը**

Հիմնաբառեր. ասիմպտոտիկ մեթոդ, երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթ, խառը եզրային պայմաններ, ներքին խնդիր:

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի հաշվարկման համար, շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում: Գլանիա րտաքին մակերևույթի վրա տրված են նորմալ լարման և տանգենցիալ տեղափոխությունների, իսկ ներքին մակերևույթի վրա՝ նորմալ տեղափոխության և տանգենցիալ լարմումների արժեքները:

Обсуждается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки, изготовленной из материалов, обладающих свойством общей анизотропии. Предполагается, что на внешней поверхности оболочки заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, на внутренней поверхности – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений, на поверхности контакта – условия полного контакта. Асимптотическим методом построен итерационный процесс, позволяющий определить внутреннее напряжённо-деформированное состояние двухслойной анизотропной цилиндрической оболочки с заранее заданной асимптотической точностью. Рассмотрены конкретные примеры.

Введение. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе гипотезы Кирхгоффа-Лява для пакета в целом, а также уточнённые теории анизотропных слоистых пластин и оболочек построены и развиты в известных монографиях С.А. Амбарцумяна [1,2]. Асимптотический метод определения напряжённо-деформированного состояния произвольной изотропной оболочки разработан А.Л. Гольденвейзером [3,4]. Л.А. Агаловян распространил асимптотический метод на анизотропные пластинки и оболочки, выявив характерные особенности, связанные с

анизотропией. На основе уравнений теории упругости, асимптотическим методом, классические и некоторые классы неклассических краевых задач для тонких тел рассмотрены в монографиях [5,6]. Вопрос определения напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки с общей анизотропией рассмотрен в работе [7]. На основе асимптотического метода построены итерационные процессы, описывающие возможные напряжённые состояния в первой краевой задаче для цилиндрической оболочки. Вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, обсуждён в работе [8]. Та же задача для анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, обсуждена в работе [9]. В этих работах с применением асимптотического метода построены решения внутренней задачи.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассматривается трёхмерная задача теории упругости для анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки длиной L , толщиной $2h$ и радиусом соприкосновения слоёв R . Воспользуемся цилиндрической системой координат r, θ, x , при этом, $x \in [0; L]$, $r \in [R - h_2; R + h_1]$, $\theta \in [0; \Theta]$. Материалы оболочки обладают цилиндрической анизотропией общего вида, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра. Величины, относящиеся к верхнему слою, отметим индексом (1), а к нижнему слою – индексом (2). Предполагается, что толщины и коэффициенты упругости слоёв разные и равны, соответственно, h_k и $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя. Здесь и в последующем, $k = 1, 2$. На внешней и внутренней поверхностях оболочки заданы следующие условия теории упругости:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} = u_x^+, u_\theta^{(1)} = u_\theta^+, \sigma_r^{(1)} = \varepsilon^{-1} \sigma_r^+ \quad \text{при } r = R + h_1, \\ \sigma_{rx}^{(2)} = \varepsilon^{-1} \sigma_{rx}^-, \sigma_{r\theta}^{(2)} = \varepsilon^{-1} \sigma_{r\theta}^-, u_r^{(2)} = u_r^- \quad \text{при } r = R - h_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

а на торцах $x = 0, L$ и краях $\theta = 0, \Theta$ ($0 < \Theta \leq 2\pi$) могут быть заданы произвольные краевые условия. При $\Theta = 2\pi$ имеем замкнутую цилиндрическую оболочку и вместо краевых условий при $\theta = 0, \Theta$ необходимо задать условие периодичности напряжений и перемещений, то есть $Q^{(k)}(r, \theta + 2\pi) = Q^{(k)}(r, \theta)$, где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений и перемещений.

Между слоями при $r = R$ выполняется условие полного контакта:

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}, \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \sigma_{rx}^{(1)} = \sigma_{rx}^{(2)}, \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \quad (1.2)$$

Для определения напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости в цилиндрических координатах, в которые вводятся безразмерные координаты по формулам [2,5]

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{Rh}}, \quad \zeta = \frac{r - R}{h}, \quad \varphi = \theta \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (1.3)$$

и безразмерные перемещения $U_r^{(k)} = u_r^{(k)}/R, U_\theta^{(k)} = u_\theta^{(k)}/R, U_x^{(k)} = u_x^{(k)}/R$, в результате чего уравнения теории упругости будут содержать малый геометрический параметр $\varepsilon = \sqrt{h/R}$, где $2h = h_1 + h_2$.

Решение данной задачи складывается из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы по степеням малого параметра [3-8]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)} \quad (1.4)$$

Целые числа q_k подбираются так, чтобы после подстановки (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости получить рекуррентную систему относительно искомым величин. В рассматриваемой задаче эта цель достигается при [5,6]

$$q_k = 1 \text{ для } \sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, \sigma_x^{(k)}, \sigma_{\theta x}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)}, \sigma_{r\theta}^{(k)}, \quad q_k = 0 \text{ для } U_r^{(k)}, U_\theta^{(k)}, U_x^{(k)}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости, с учётом (1.5), получим следующую систему (здесь и в последующем, для удобства записи, запятыми выделены частные производные):

$$\begin{aligned} & \sigma_{r,\zeta}^{(k,s)} + \zeta \sigma_{r,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{r\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta \sigma_{rx,\xi}^{(k,s-3)} + \sigma_{rx,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_r^{(k,s-2)} - \sigma_\theta^{(k,s-2)} = 0, \\ & \sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s)} + \zeta \sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta \sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-3)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-1)} + 2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} = 0, \\ & \sigma_{rx,\zeta}^{(k,s)} + \zeta \sigma_{rx,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{x\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta \sigma_{x,\xi}^{(k,s-3)} + \sigma_{x,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_{rx}^{(k,s-2)} = 0, \quad (1.6) \\ & U_{x,\xi}^{(k,s)} = a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s)} + a_{13}^{(k)} \sigma_r^{(k,s)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s)}, \\ & U_{\theta,\varphi}^{(k,s)} + U_r^{(k,s-1)} = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{22}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_r^{(k,s)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s)} + \\ & \quad + a_{26}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s)} + \zeta \left(a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-2)} + a_{22}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-2)} + a_{23}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-2)} \right. \\ & \quad \left. + a_{24}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-2)} \right), \\ & U_{r,\zeta}^{(k,s)} = a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s-1)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-1)} \\ & U_{\theta,\zeta}^{(k,s)} + U_{r,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta U_{\theta,\zeta}^{(k,s-2)} - U_\theta^{(k,s-2)} = \\ & \quad = a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{24}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s)} + a_{34}^{(k)} \sigma_r^{(k,s)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s)} + \\ & \quad + \zeta \left(a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-3)} + a_{24}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-3)} + a_{34}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-3)} + \right. \\ & \quad \left. + a_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-3)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s-3)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-3)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{x,\zeta}^{(k,s)} + U_{r,\xi}^{(k,s-1)} &= a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-1)} + \\
&\quad + a_{45}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s-1)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-1)}, \\
U_{\theta,\xi}^{(k,s)} + U_{x,\varphi}^{(k,s)} + \zeta U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)} &= a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{26}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s)} + a_{36}^{(k)} \sigma_r^{(k,s)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s)} + \\
&\quad + a_{56}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s)} + \zeta \left(a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-2)} + \right. \\
&\quad \left. + a_{36}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-2)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{rx}^{(k,s-2)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-2)} \right)
\end{aligned}$$

Интегрируя систему (1.6) по ζ , получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rx}^{(k,s)} &= \sigma_{rx0}^{(k,s)} + \sigma_{rx}^{*(k,s)}, \quad (x, \theta), \quad \sigma_r^{(k,s)} = \sigma_{r0}^{(k,s)} + \sigma_r^{*(k,s)}, \\
U_x^{(k,s)} &= U_{x0}^{(k,s)} + U_x^{*(k,s)}, \quad (x, \theta, r), \\
\sigma_{x\theta}^{(k,s)} &= c_3^{(k)} \sigma_{r0}^{(k,s)} + c_4^{(k)} \sigma_{r\theta0}^{(k,s)} + c_5^{(k)} \sigma_{rx0}^{(k,s)} + \tau_{x\theta0}^{(k,s)} + \sigma_{x\theta1}^{*(k,s)}, \\
\sigma_x^{(k,s)} &= a_3^{(k)} \sigma_{r0}^{(k,s)} + a_4^{(k)} \sigma_{r\theta0}^{(k,s)} + a_5^{(k)} \sigma_{rx0}^{(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + \sigma_{x1}^{*(k,s)}, \quad (x, \theta; a, b; 4, 5),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned}
\tau_{x0}^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{(k,s)} \quad (x, \theta; 1, 2) \\
\tau_{\theta x0}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{(k,s)} \\
\varepsilon_1^{(k,s)} &= U_{x0,\xi}^{(k,s)}, \quad \varepsilon_2^{(k,s)} = U_{\theta0,\varphi}^{(k,s)}, \quad \omega^{(k,s)} = U_{\theta0,\xi}^{(k,s)} + U_{x0,\varphi}^{(k,s)},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$, $c_i^{(k)}$ определяются по известным формулам [1,2,7], а величины со звездочками, входящие в формулы (1.7), как обычно, известны для каждого приближения s и определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{*(k,s)} &= - \int_0^\zeta \left[\sigma_{r\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \sigma_{rx,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_r^{(k,s-2)} - \sigma_\theta^{(k,s-2)} + \zeta \left(\sigma_{r,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{xr,\xi}^{(k,s-3)} \right) \right] d\zeta, \\
\sigma_{r\theta}^{*(k,s)} &= - \int_0^\zeta \left[\sigma_{\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-1)} + 2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + \zeta \left(\sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-3)} \right) \right] d\zeta, \\
\sigma_{rx}^{*(k,s)} &= - \int_0^\zeta \left[\sigma_{x\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \sigma_{x,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_{xr}^{(k,s-2)} + \zeta \left(\sigma_{rx,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{x,\xi}^{(k,s-3)} \right) \right] d\zeta, \\
U_\theta^{*(k,s)} &= \int_0^\zeta \left[a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-1)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k,s-1)} + \right. \\
&\quad \left. + a_{46}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-1)} + U_\theta^{(k,s-2)} + \zeta \left(a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-3)} + a_{24}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-3)} + a_{34}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-3)} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-3)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k,s-3)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-3)} + U_{\theta,\zeta}^{(k,s-2)} - U_{r,\varphi}^{(k,s-1)} \Big] d\zeta, \\
U_r^{*(k,s)} &= \int_0^\zeta \left[a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-1)} + \right. \\
& \quad \left. + a_{43}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k,s-1)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-1)} \right] d\zeta, \\
U_x^{*(k,s)} &= \int_0^\zeta \left[a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_r^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + \right. \\
& \quad \left. + a_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k,s-1)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-1)} - U_{r,\xi}^{(k,s-1)} \right] d\zeta, \\
\sigma_{x1}^{*(k,s)} &= a_3^{(k)} \sigma_r^{*(k,s)} + a_4^{(k)} \sigma_{r\theta}^{*(k,s)} + a_5^{(k)} \sigma_{rx}^{*(k,s)} + \tau_x^{*(k,s)} + B_{12} U_r^{(k,s-1)} + \\
& + \zeta B_{16} U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)} + \zeta \left(a_1'^{(k)} \sigma_x^{(k,s-2)} + a_2'^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-2)} + a_3'^{(k)} \sigma_r^{(k,s-2)} \right. \\
& \quad \left. + a_4'^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + a_5'^{(k)} \sigma_{xr}^{(k,s-2)} + a_6'^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-2)} \right), \\
\sigma_{\theta 1}^{*(k,s)} &= b_3^{(k)} \sigma_r^{*(k,s)} + b_4^{(k)} \sigma_{r\theta}^{*(k,s)} + b_5^{(k)} \sigma_{rx}^{*(k,s)} + \tau_\theta^{*(k,s)} + B_{22} U_r^{(k,s-1)} + \\
& + \zeta B_{26} U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)} + \zeta \left(b_1'^{(k)} \sigma_x^{(k,s-2)} + b_2'^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-2)} + b_3'^{(k)} \sigma_r^{(k,s-2)} + \right. \\
& \quad \left. + b_4'^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + b_5'^{(k)} \sigma_{xr}^{(k,s-2)} + b_6'^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-2)} \right), \\
\sigma_{x\theta 1}^{*(k,s)} &= c_3^{(k)} \sigma_r^{*(k,s)} + c_4^{(k)} \sigma_{r\theta}^{*(k,s)} + c_5^{(k)} \sigma_{rx}^{*(k,s)} + \tau_{x\theta}^{*(k,s)} + B_{26} U_r^{(k,s-1)} + \\
& + \zeta B_{66} U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)} + \zeta \left(c_1'^{(k)} \sigma_x^{(k,s-2)} + c_2'^{(k)} \sigma_\theta^{(k,s-2)} + c_3'^{(k)} \sigma_r^{(k,s-2)} + \right. \\
& \quad \left. + c_4'^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + c_5'^{(k)} \sigma_{xr}^{(k,s-2)} + c_6'^{(k)} \sigma_{x\theta}^{(k,s-2)} \right), \\
\tau_x^{*(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{*(k,s)}, (x, \theta; 1, 2), \\
\tau_{x\theta}^{*(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)}, \\
\varepsilon_1^{*(k,s)} &= U_{x,\xi}^{*(k,s)}, \varepsilon_2^{*(k,s)} = U_{\theta,\varphi}^{*(k,s)}, \omega^{*(k,s)} = U_{\theta,\xi}^{*(k,s)} + U_{x,\varphi}^{*(k,s)}, \varepsilon_0^{(k,s)} = U_{\theta,\xi}^{(k,s)} \\
a_i'^{(k)} &= - \left(a_{2i}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{4i}^{(k)} B_{16}^{(k)} \right), b_i'^{(k)} = - \left(a_{2i}^{(k)} B_{22}^{(k)} + a_{4i}^{(k)} B_{26}^{(k)} \right), \\
c_i'^{(k)} &= - \left(a_{2i}^{(k)} B_{26}^{(k)} + a_{4i}^{(k)} B_{66}^{(k)} \right), (i = 1, 2, \dots, 6).
\end{aligned}$$

Предполагается, что $Q^{(s-i)} \equiv 0$, если $s < i$.

Неизвестные функции интегрирования $\tau_{rx0}^{(k,s)}$, $\tau_{r\theta 0}^{(k,s)}$, $\tau_{r0}^{(k,s)}$, $U_{x0}^{(k,s)}$, $U_{\theta 0}^{(k,s)}$, $U_{r0}^{(k,s)}$ определяются из условий (1.1) и (1.2).

Удовлетворив условиям полного контакта слоёв (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \tau_{rx0}^{(1,s)} &= \tau_{rx0}^{(2,s)}, \tau_{r\theta0}^{(1,s)} = \tau_{r\theta0}^{(2,s)}, \tau_{r0}^{(1,s)} = \tau_{r0}^{(2,s)}, \\ U_{x0}^{(1,s)} &= U_{x0}^{(2,s)}, U_{\theta0}^{(1,s)} = U_{\theta0}^{(2,s)}, U_{r0}^{(1,s)} = U_{r0}^{(2,s)}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx0}^{(2,s)} &= \sigma_{rx}^{-(s)} - \sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2), (x, \theta), \quad \sigma_{r0}^{(1,s)} = \sigma_r^{+(s)} - \sigma_r^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1), \\ U_{x0}^{(1,s)} &= u_x^{+(s)} - U_x^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1), (x, \theta), \quad U_{r0}^{(2,s)} = U_r^{-(s)} - U_r^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.7), с учетом (1.11), получим окончательное решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k,s)} &= \sigma_r^{+(s)} + \sigma_r^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) - \sigma_r^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1), \\ \sigma_{rx}^{(k,s)} &= \sigma_{rx}^{-(s)} + \sigma_{rx}^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) - \sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2), (x, \theta), \\ U_r^{(k,s)} &= u_r^{-(s)} + U_r^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) - U_r^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2), \\ U_x^{(k,s)} &= u_x^{+(s)} + U_x^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) - U_x^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1), (x, \theta), \\ \sigma_x^{(k,s)} &= a_3^{(k)} \sigma_r^{+(s)} + a_4^{(k)} \sigma_{r\theta}^{-(s)} + a_5^{(k)} \sigma_{rx}^{-(s)} + \\ &+ B_{11}^{(k)} u_{x,\xi}^{+(s)} + B_{12}^{(k)} u_{\theta,\varphi}^{+(s)} + B_{16}^{(k)} (u_{\theta,\xi}^{+(s)} + u_{x,\varphi}^{+(s)}) + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) \\ &\quad (x, \theta; a, b; a', b'; 1, 2), \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x\theta}^{(k,s)} &= c_3^{(k)} \sigma_r^{+(s)} + c_4^{(k)} \sigma_{r\theta}^{-(s)} + c_5^{(k)} \sigma_{rx}^{-(s)} + \\ &+ B_{16}^{(k)} u_{x,\xi}^{+(s)} + B_{26}^{(k)} u_{\theta,\varphi}^{+(s)} + B_{66}^{(k)} (u_{\theta,\xi}^{+(s)} + u_{x,\varphi}^{+(s)}) + \sigma_{x\theta}^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) &= \sigma_{x1}^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) - a_3^{(k)} \sigma_r^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) - a_4^{(k)} \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2) \\ &- a_5^{(k)} \sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2) - B_{11}^{(k)} U_{x,\xi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) - B_{12}^{(k)} U_{\theta,\varphi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) - \\ &- B_{16}^{(k)} (U_{\theta,\xi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) + U_{x,\varphi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1)), (x, \theta; a, b; a', b'; 1, 2), \\ \sigma_{x\theta}^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) &= \sigma_{x\theta1}^{*(k,s)}(\xi, \varphi, \zeta) - c_3^{(k)} \sigma_r^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) - \\ &- c_4^{(k)} \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2) - c_5^{(k)} \sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi, \varphi, \zeta_2) - B_{16}^{(k)} U_{x,\xi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) - \\ &- B_{26}^{(k)} U_{\theta,\varphi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) - B_{66}^{(k)} (U_{\theta,\xi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1) + U_{x,\varphi}^{*(1,s)}(\xi, \varphi, \zeta_1)) \end{aligned}$$

В формулах (1.11), (1.12) необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned} \sigma_r^{+(0)} &= \sigma_r^+, \sigma_{rx}^{-(0)} = \sigma_{rx}^-, \sigma_{r\theta}^{-(0)} = \sigma_{r\theta}^-, u_x^{+(0)} = u_x^+, u_{\theta}^{+(0)} = u_{\theta}^+, u_r^{-(0)} = u_r^-, \\ \sigma_r^{+(s)} &= \sigma_{rx}^{-(s)} = \sigma_{r\theta}^{-(s)} = 0, u_x^{+(s)} = u_{\theta}^{+(s)} = u_r^{-(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0 \end{aligned}$$

Выведенные выше формулы (1.7) – (1.12) носят итерационный характер и позволяют найти значения всех компонент тензора напряжений и вектора

перемещения с заранее заданной точностью. Таким образом, условия (1.1) – (1.2) оказались достаточными для определения всех искомых величин во внутренней задаче. Это решение, как правило, не будет удовлетворять торцевым условиям и условиям на краях цилиндрической оболочки. Для удовлетворения условиям на торцах $x = 0, L$ и на краях $\theta = 0, \Theta$ необходимо построить решения типа пограничного слоя вблизи этих торцов и краёв [3-6].

2. Примеры. В качестве иллюстрации рассмотрим частные примеры.

а) Пусть имеем анизотропную цилиндрическую оболочку, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы следующие условия для напряжений и перемещений:

$$\sigma_r^+ = -q, u_x^+ = 0, u_\theta^+ = 0, \sigma_{rx}^- = 0, \sigma_{r\theta}^- = 0, u_r^- = 0. \quad (2.1)$$

Учитывая, что $Q_r^{*(k,0)} = 0$ и ограничившись нулевым приближением, с помощью рекуррентных формул (1.7) – (1.12) получим решение

$$\sigma_r^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}q, \sigma_x^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(1)}q, \sigma_\theta^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}b_3^{(1)}q, \sigma_{x\theta}^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}c_3^{(1)}q, \quad (2.2)$$

$$u_x^{(k)} = u_\theta^{(k)} = u_r^{(k)} = 0, \sigma_{rx}^{(k)} = \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Вычисляя все приближения до $s = 2$ включительно, получим решение внутренней задачи с точностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= -\sqrt{\frac{R}{h}}q - \sqrt{\frac{1}{Rh}}(b_3^{(1)} - 1)(r - R - h_1)q, \quad \sigma_{rx}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0 \\ \sigma_x^{(1)} &= -\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(1)}q - \left[B_{12}^{(1)}(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)})\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \right. \\ &\quad \left. + B_{12}^{(1)}(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)})\frac{h_2}{h} + a_3^{(1)}(b_3^{(1)} - 1)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \right. \\ &\quad \left. + (a_1^{(1)}a_3^{(1)} + a_2^{(1)}b_3^{(1)} + a_6^{(1)}c_3^{(1)} + a_3^{(1)})\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right]q, \quad (2.3) \\ \sigma_\theta^{(1)} &= -\sqrt{\frac{R}{h}}b_3^{(1)}q - \left[B_{22}^{(1)}(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)})\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \right. \\ &\quad \left. + B_{22}^{(1)}(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)})\frac{h_2}{h} + b_3^{(1)}(b_3^{(1)} - 1)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \right. \\ &\quad \left. + (b_1^{(1)}a_3^{(1)} + b_2^{(1)}b_3^{(1)} + b_6^{(1)}c_3^{(1)} + b_3^{(1)})\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right]q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x\theta}^{(1)} = & -\sqrt{\frac{R}{h}}c_3^{(1)}q - \left[B_{26}^{(1)} \left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \right. \\ & + B_{26}^{(1)} \left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{h_2}{h} + c_3^{(1)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \\ & \left. + \left(c_1^{(1)}a_3^{(1)} + c_2^{(1)}b_3^{(1)} + c_6^{(1)}c_3^{(1)} + c_3^{(1)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right] q,\end{aligned}$$

$$u_x^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} \left(a_{15}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{25}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{56}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{35}^{(1)} \right) (r-R-h_1)q, (x, \theta; 4, 5)$$

$$\begin{aligned}u_r^{(1)} = & -\sqrt{\frac{R}{h}} \left[\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)} \right) (r-R) + \right. \\ & \left. + \left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) h_2 \right] q\end{aligned}$$

Для второго слоя имеем:

$$\sigma_r^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}q - \sqrt{\frac{1}{Rh}} \left[\left(b_3^{(2)} - 1 \right) (r-R) - \left(b_3^{(1)} - 1 \right) h_1 \right] q, \quad \sigma_{rx}^{(2)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(2)} = & -\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(2)}q - \left[B_{12}^{(2)} \left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{r-R+h_2}{\sqrt{Rh}} + \right. \\ & + a_3^{(2)} \left(b_3^{(2)} - 1 \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} - a_3^{(2)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{h_1}{\sqrt{Rh}} + \\ & \left. + \left(a_1^{(2)}a_3^{(2)} + a_2^{(2)}b_3^{(2)} + a_6^{(2)}c_3^{(2)} + a_3^{(2)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right] q,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^{(2)} &= -\sqrt{\frac{R}{h}} b_3^{(2)} q - \left[B_{22}^{(2)} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{r-R+h_2}{\sqrt{Rh}} + \right. \\
&\quad + b_3^{(2)} \left(b_3^{(2)} - 1 \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} - b_3^{(2)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{h_1}{\sqrt{Rh}} + \\
&\quad \left. + \left(b_1^{(2)} a_3^{(2)} + b_2^{(2)} b_3^{(2)} + b_6^{(2)} c_3^{(2)} + b_3^{(2)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right] q, \\
\sigma_{x\theta}^{(2)} &= -\sqrt{\frac{R}{h}} c_3^{(2)} q - \left[B_{26}^{(2)} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{r-R+h_2}{\sqrt{Rh}} + \right. \\
&\quad + c_3^{(2)} \left(b_3^{(2)} - 1 \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} - c_3^{(2)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{h_1}{\sqrt{Rh}} + \\
&\quad \left. + \left(c_1^{(2)} a_3^{(2)} + c_2^{(2)} b_3^{(2)} + c_6^{(2)} c_3^{(2)} + c_3^{(2)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right] q, \\
u_r^{(2)} &= -\sqrt{\frac{R}{h}} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) (r-R+h_2) q, \\
u_x^{(2)} &= -\sqrt{\frac{R}{h}} \left[\left(a_{15}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{25}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{56}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{35}^{(2)} \right) (r-R) - \right. \\
&\quad \left. - \left(a_{15}^{(1)} a_3^{(1)} + a_{25}^{(1)} b_3^{(1)} + a_{56}^{(1)} c_3^{(1)} + a_{35}^{(1)} \right) h_1 \right] q, (x, \theta; 4, 5)
\end{aligned}$$

Если материалы слоёв ортотропные, то полученные формулы намного упрощаются. В частности, $u_x^{(k)} = u_{\theta}^{(k)} = 0$.

б) Пусть имеем ортотропную цилиндрическую оболочку, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы следующие условия:

$$\sigma_r^+ = 0, u_x^+ = 0, u_{\theta}^+ = 0, \sigma_{rx}^- = \tau_1, \sigma_{r\theta}^- = \tau_2, u_r^- = 0. \quad (2.4)$$

Вычисляя все приближения до $s=4$ включительно, получим решение внутренней задачи с точностью $O(\varepsilon^4)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(k)} &= \sigma_x^{(k)} = \sigma_{\theta}^{(k)} = \sigma_{x\theta}^{(k)} = 0, u_r^{(k)} = 0, \\
\sigma_{rx}^{(k)} &= \sqrt{\frac{R}{h}} \tau_1 + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{Rh}} (r-R+h_2)(r-2R) \tau_1, \\
\sigma_{r\theta}^{(k)} &= \sqrt{\frac{R}{h}} \tau_2 + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{Rh}} (r-R+h_2)(3r-5R+h_2) \tau_2, \quad (2.5)
\end{aligned}$$

$$u_x^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Rh}} a_{55}^{(1)} \left[2R(r-R-h_1) - (r-R+h_2)^2 + (h_1+h_2)^2 \right] \tau_1,$$

$$u_x^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Rh}} \left[a_{55}^{(2)} \left(2R(r-R) - (r-R+h_2)^2 \right) - a_{55}^{(1)} \left(2h_1R - (h_1+h_2)^2 \right) \right] \tau_1.$$

$$u_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{hR}} a_{44}^{(1)} (R-h_1-2h_2)(r-R-h_1) \tau_2,$$

$$u_0^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \left[a_{44}^{(2)} (R-2h_2)(r-R) - a_{44}^{(1)} (r-h_1-2h_2)h_1 \right] \tau_2.$$

В заключение отметим, что решение типа пограничного слоя можно построить с помощью функций типа пограничного слоя [5-7,9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360p.(inRussian).
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с. Ambartsumyan S.A. General Theory of Anisotropic Shells. M.: Nauka, 1987. 360p.(inRussian).
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.//ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.593-608. Goldenveizer A.L. The construction of the approximate theory of shells by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory //J.Appl.Math.Mech. 1963.Vol.27.Issue 4.pp. 593-608 (in Russian).
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с. Goldenveizer A.L. Theory of elastik thin shells. M.: Nauka, 1976. 512p. (in Russian).
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с. Aghalovian L.A. Asimptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London. World Scientific Publ. 2015. 376p.
6. Агаловян Л.А., Геворгян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Yerevan. 2005. 468p. (in Russian).
7. Хачатрян Ш.М. О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. №3. С. 26-41. Khachatryan Sh.M. On stress states and the equations to describe them for cylindrical shell of general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1979. Vol. 32. № 3. pp. 26-41 (in Russian).
8. Хачатрян А.М., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной цилиндрической оболочки. Труды VI Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 01-06 октября, 2019. Дилижан, Армения. С.340-344. Khachatryan A.M., Petrosyan G.A. Asymptotic solution of one mixed boundary value problem anisotropic cylindrical shell. //Proceedings of VI International Conference «Topical Problems of Continuum Mechanics». Dilijan, Armenia. October 01-6, 2019. pp. 340-344 (in Russian).

9. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009.Т.62. №4. С.65-72. Petrosyan G.A. Khachatryan A.M. Asimptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2009. Vol. 62. № 4. pp. 65-72 (in Russian).

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович, д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.

Тел.: (37499)21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru

Петросян Гаянэ Альбертовна, к.ф.м.н., доцент кафедры математики АрГУ.

Адрес: Республика Арцах, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.

Тел.: (37497)23-83-10. **E-mail:** gayan-petrosian@mail.ru

Поступила в редакцию 8.05.2020.