ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ С ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ УРАВНЕНИЕМ МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР

Саакян А.В.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, весовая функция Якоби, метод механических квадратур, краевая трещина, гиперсингулярное интегральное уравнение.

Sahakyan A.V.

Solution a problem for edge crack with a hypersingular governing equation by the mechanical quadrature method

Keywords: hypersingular integral, quadrature formula, Jacobi weight function, mechanical quadrature method, edge crack, hypersingular integral equation

The mechanical quadrature method, which has proven itself to efficiently solve singular integral equations of various types, is also quite effective in solving the hypersingular integral equation. A unified quadrature formula is obtained for a hypersingular integral with the weight function of the Jacobi polynomials. Formula is applicable for all admissible values, both real and complex, of the exponents of the weight function.

The method has been tested to solve a simple model problem for an elastic half-plane containing an edge crack of finite length in the framework of the plane problem of the elasticity theory, the defining equation of which can be written in the form of a hypersingular integral equation for crack opening. The convergence of the method is shown, and the results of solving the problem are presented in the form of a graph and a table.

Ա.Վ.Սահակյան

Եզրային ճաքի համար հիպերսինգուլյար որոշիչ հավասարումով խնդրի լուծումը քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով

Հիմնաբառեր՝ հիպերսինգուլյար ինտեգրալ, քառակուսացման բանաձև, Յակոբիի կշռային ֆունկցիա, քառակուսացման բանաձևերի մեթոդ, եզրային ճաք, հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարում։

Տարբեր տիպի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար որպես արդյունավետ եղանակ դրսևորած քառակուսացման բանաձևերի մեթոդը բավականին արդյունավետ է նաև հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար։ Յակոբիի բազմանդամների կշռային ֆունկցիա պարունակող հիպերսինգուլյար ինտեգրալի համար ստացված է միասնական քառակուսացման բանաձև, որը օգտագործելի է կշռային ֆունկցիայի ցուցիչների բոլոր, ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս, թույլատրելի արժեքների համար։

Մեթոդը փորձարկված է վերջավոր երկարության եզրային ճաք պարունակող առաձգական կիսահարթության համար պարզ մոդելային խնդրի լուծման վրա։ Խնդրի որոշիչ հավասարումը կարելի է ձևակերպել որպես հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարում ճաքի բացվածքի նկատմամբ։ Ցույց է տրված մեթոդի զուգամիտությունը, ինչպես նաև խնդրի լուծման արդյունքները գրաֆիկով և աղյուսակով։

Метод механических квадратур, хорошо зарекомендовавший себя для эффективного решения сингулярных интегральных уравнений разного типа, достаточно эффективен и при решении гиперсингулярного интегрального уравнения. Получена единая квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с плотностью, содержащей весовую функцию многочленов Якоби, применимая при всех допустимых, как вещественных, так и комплексных, значениях показателей весовой функции.

Метод опробирован на решении простой модельной задачи для упругой полуплоскости, содержащей краевую трещину конечной длины в рамках плоской задачи теории упругости, определяющее уравнение которой можно выписать в виде гиперсингулярного интегрального уравнения относительно раскрытия трещины. Показана сходимость метода, а также представлены результаты решения задачи в виде графика и таблицы.

Введение. Широкое развитие теории гиперсингулярных интегральных уравнений в последние десятилетия обусловлено тем, что ими описываются определяющие уравнения многих прикладных задач в различных областях: теории упругости, механике разрушения, теории дифракции волн, теории вибраторных антенн, аэродинамике и др., например [1-4]. За редким исключением, решение этих уравнений строится приближенными методами, развитию которых посвящено очень много работ, в частности [5-12]. Следует отметить, что подавляющее большинство работ относится к наиболее распространенному частному случаю, когда поведение плотности сингулярного или гиперсингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования описывается корневой функцией. Существенно меньше число работ, посвященных приближенному вычислению указанных интегралов, плотности которых содержат весовую функцию многочленов Якоби с произвольными допустимыми вещественными показателями. В работе [13] приведены квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные.

В настоящей работе строятся интерполяционные квадратурные формулы для гиперсингулярного интеграла при предположении, что плотность этого интеграла содержит множителем весовую функцию Якоби с произвольными, в том числе и комплексными, допустимыми показателями. В отличие от работы [14], где выделены случаи равенства нулю хотя бы одного из показателей весовой функции Якоби, здесь получена единая квадратурная формула для всех допустимых значений показателей.

Для иллюстрации применения полученной квадратурной формулы к решению гиперсингулярного интегрального уравнения, рассмотрена известная, например [20], задача для упругой полуплоскости, содержащей перпендикулярную к границе краевую трещину. Определяющее уравнение задачи сформулировано в виде гиперсингулярного интегрального уравнения относительно раскрытия трещины. При помощи полученной квадратурной формулы определяющее уравнение сведено к системе линейных алгебраических уравнений и найдена функция, описывающая форму раскрытия трещины.

Вывод квадратурной формулы. Для полноты изложения здесь частично, главным образом, в вводной части, повторим изложение работы [14]. Рассмотрим интеграл

$$J_0(z)=\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx \qquad (z\in C,\ z\neq\pm 1), \tag{1}$$

который при $z\in(-1,1)$ понимается в смысле конечного значения по Адамару [15]

$$J_0(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{z-\varepsilon}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx+\int_{z+\varepsilon}^{1}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx-\frac{2\Phi(z)}{\varepsilon}.\right]$$

Интегрируя интегралы в последнем выражении по частям и устремляя ε к нулю, нетрудно получить

$$J_0(z) = -\frac{\Phi(1)}{1-z} - \frac{\Phi(-1)}{1+z} + \int_{-1}^{1} \frac{\Phi'(x)}{x-z}dx, \tag{2}$$

то есть интеграл $J_0(z)$ можно понимать как результат формального интегрирования по частям и, следовательно, вычисление гиперсингулярного интеграла сведётся к вычислению интеграла

$$I(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\Phi'(x)}{x-z}dx. \tag{3}$$

Предположим, что

$$\Phi(x) = \varphi(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad (\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) \geq 0), \tag{4}$$

Здесь $\varphi(x)$ – гельдеровская функция на замкнутом отрезке $[-1,1]$, которую можно заменить интерполяционным многочленом

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(\xi_j) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j) P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)},$$

где $\xi_j \left(j = \overline{1,n}\right)$– корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Эти корни, в общем случае, будут комплексными и возникает вопрос, что понимать под $\varphi(\xi_j)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, если функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[-1,1]$. В общем случае, под $\varphi(\xi_j)$ целесообразно понимать значения многочлена порядка $(n-1)$, интерполирующего функцию $\varphi(x)$ по узлам на отрезке $[-1,1]$, например, чебышевским. В случае же, если функция $\varphi(x)$ аналитически продолжается в комплексную плоскость, то $\varphi(\xi_j)$ можно считать значениями и самой функции $\varphi(x)$. Однако, следует заметить, что в последнем случае, точность аппроксимации будет существенно зависеть от величины мнимых частей показателей.

Поскольку интерполяционный многочлен $\varphi_n(x)$ по сути является многочленом порядка $n-1$, то в случае, если $\varphi(x)$ будет многочленом порядка $m < n$, будем иметь $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x)$.

Тогда для $\Phi(x)$ будем иметь:

$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \tag{5}$$

Воспользовавшись равенством, непосредственно вытекающим из формулы 10.8(38) [16],

$$\frac{d}{dx}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\right]=-2(n+1)(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$$

производную функции $\Phi(x)$ запишем в виде

$$\Phi'(x)=-(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)}{x-\xi_j}+(1-x^2)\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)^2}\right]$$

Подставляя полученное представление в интеграл $I(z)$ и меняя порядок интегрирования и суммирования, будем иметь:

$$I(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[2(n+1)\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{(x-z)(x-\xi_j)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)dx+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(x-z)(x-\xi_j)^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx\right]$$

Пользуясь формулой Кристоффеля-Дарбу для многочленов Якоби, откуда получим

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-\xi_j}=A(\xi_j)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}}$$

$$A(\xi_j)=\frac{(2n+\alpha+\beta)}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\frac{2^{\alpha+\beta}\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

и равенством

$$\frac{1}{(x-z)(x-\xi_j)}=\left[\frac{1}{x-z}-\frac{1}{x-\xi_j}\right]\frac{1}{z-\xi_j},$$

получим

$$I(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{2(n+1)\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)(z-\xi_j)} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{x-y} P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\,dx \Bigg|_{y=\xi_j}^{y=z} + \right.$$
$$\left. + \frac{A(\xi_j)}{2(n+1)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{x-z} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx \Bigg|_{y=\xi_j}^{y=z} \right\} \tag{6}$$

Здесь

$$h_m^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+\beta+1)},$$

а также, для простоты записи, использовано обозначение $f(y)\Big|_{y=b}^{y=a} = f(a) - f(b)$.

Введём в рассмотрение функцию

$$R_k^{(a,b)}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^a (1+x)^b}{x-z} P_k^{(a,b)}(x)\,dx, \tag{7}$$

которая тесно связана с функцией Якоби второго рода $Q_k(z)$

$$Q_k(z) = \frac{R_k^{(a,b)}(z)}{2(z-1)^a (z+1)^b}$$

и определена во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1,1]$. При условии $(a > -1, b > -1)$ эта функция имеет много различных представлений [16], из которых представим только одно:

$$R_k^{(a,b)}(z) = -\left(\frac{2}{z-1}\right)^{k+1} 2^{a+b} B(k+a+1, k+b+1) \times$$
$$\times F\left[k+1, k+a+1; 2k+a+b+2; \frac{2}{1-z}\right] \tag{8}$$

Здесь $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ – известная бета-функция, а $F(a,b;c;z)$ – гипергеометрический ряд [17].

Отметим, что функция $R_k^{(a,b)}(z)$ принимает различные значения в зависимости от того, стремится ли точка z к точке ξ разреза из верхней полуплоскости $(\xi + i0)$ или из нижней полуплоскости $(\xi - i0)$. На самом разрезе функция $R_k^{(a,b)}(z)$ определяется как полусумма этих значений:

$$R_k^{(a,b)}(\xi)=\frac{1}{2}\left[R_k^{(a,b)}(\xi+i0)+R_k^{(a,b)}(\xi-i0)\right] \qquad (-1<\xi<1).$$

Поскольку, согласно (4), показатели α и β могут принимать и нулевые значения, то для первого интеграла в выражении (6) представления (7) и (8), в общем случае, неприменимы. Используя разные соотношения между многочленами Якоби, преобразуем этот интеграл так, чтобы и в этих случаях можно было бы использовать представление (8).

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{x-y}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\,dx=\\
&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)}{(x-y)(1+x)}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)}{(x-y)(1-x)}dx=\\
&=\frac{1}{2(1+y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(x-y)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)dx+\frac{1}{2(1-y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(x-y)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)\,dx-\\
&-\frac{1}{2(1+y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(1+x)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)dx+\frac{1}{2(1-y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(1-x)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)\,dx
\end{aligned} \tag{9}$$

Первые два интеграла в последнем выражении определены при любых α и β, а вот последние два при ненулевых значениях α и β равны нулю в силу ортогональности многочленов Якоби и принимают конечные значения соответственно при $\beta=0$ и $\alpha=0$. Найдём эти значения на примере второго из этих интегралов.

Пусть $\alpha=0$, тогда этот интеграл примет вид

$$I_\alpha=\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{\beta}}{1-x}P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)dx.$$

Нетрудно проверить, что $P_{n+1}^{(-1,\beta)}(1)=0$, следовательно, многочлен $P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)$ можно представить в виде

$$P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)=(1-x)\sum_{k=0}^{n}a_kP_k^{(0,\beta)}(x). \tag{10}$$

Для определения коэффициентов a_k воспользуемся известным соотношением между многочленами Якоби и реккурентной формулой для них, выписанными для случая $\alpha=0$:

$$P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)=\frac{(n+\beta+1)}{2n+\beta+2}\left[P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)-P_n^{(0,\beta)}(x)\right]$$

$$P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)=\frac{(2n+\beta+1)\left[(2n+\beta+2)(2n+\beta)x-\beta^{2}\right]}{2(n+1)(n+\beta+1)(2n+\beta)}P_{n}^{(0,\beta)}(x)-$$
$$-\frac{n(n+\beta)(2n+\beta+2)}{(n+1)(n+\beta+1)(2n+\beta)}P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)$$

Подставив $P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)$ из реккурентной формулы в первое соотношение и группируя так, чтобы выделить множитель $(1-x)P_{n}^{(0,\beta)}(x)$, получаем другую реккурентную формулу:

$$\frac{(n+\beta+1)}{2n+\beta+2}\left[P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)-P_{n}^{(0,\beta)}(x)\right]=\frac{n(n+\beta)}{(n+1)(2n+\beta)}\left[P_{n}^{(0,\beta)}(x)-P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)\right]-$$
$$-\frac{2n+\beta+1}{2(n+1)}(1-x)P_{n}^{(0,\beta)}(x)$$

n, кратное использование которой приводит к разложению (10) с коэффициентами

$$a_k=-\frac{2k+\beta+1}{2(n+1)}\quad (k=0,1,...,n).$$

Подставляя (10) в интеграл I_α и учитывая ортогональность многочленов Якоби, будем иметь:

$$I_\alpha=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_{-1}^{1}(1+x)^{\beta}P_{k}^{(0,\beta)}(x)dx=a_0h_0^{(0,\beta)}=-\frac{2^{\beta}}{n+1}\tag{11}$$

Таким образом, для интеграла I_α в общем случае будем иметь:

$$I_\alpha=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)dx=-\frac{2^{\beta}}{n+1}\delta(\alpha,0)\tag{12}$$

где $\delta(a,b)$ – символ, подобный символу Кронекера и равный 1 только при $a=b$.

Аналогичным образом для второго интеграла будем иметь:

$$I_\beta=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1+x)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)dx=(-1)^{n}\frac{2^{\alpha}}{n+1}\delta(\beta,0)\tag{13}$$

Численный анализ показал, что сумма первых двух слагаемых выражения (9) равна $R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(y)$ в виде представления (8) независимо от значений показателей α и β. Следовательно, формулу (6) можно переписать в виде

$$I(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{2(n+1)\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)(z-\xi_j)}\left\{R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}-\frac{2^{\beta}\delta(\alpha,0)}{2(n+1)(1-y)}\Bigg|_{y=\xi_j}^{y=z}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{2^{\alpha}\delta(\beta,0)}{2(n+1)(1+y)}\Bigg|_{y=\xi_j}^{y=z}+\frac{A(\xi_j)}{2(n+1)}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}}R_m^{(\alpha,\beta)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}\right\}$$

или

$$I(z)=-\frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)(z-\xi_j)}\left\{2(n+1)R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}+\right.$$

$$\left.+A(\xi_j)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}}R_m^{(\alpha,\beta)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}\right\}+\frac{\Phi(1)}{1-z}+\frac{\Phi(-1)}{1+z} \tag{14}$$

Полученная квадратурная формула (14) при ненулевых α и β, очевидно, должна совпасть с соответствующей формулой, приведённой в работе [14], которая имеет более компактный и простой для вычислений вид

$$I(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_j}R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2}\right] \tag{15}$$

Следовательно, формулу (14) можно записать в виде

$$I(z)=\frac{\Phi(1)}{1-z}+\frac{\Phi(-1)}{1+z}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_j}R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2}\right] \tag{16}$$

Численный анализ показывает, что последняя формула верна и при нулевых α и β. Подставляя формулу (16) в представление (2), для гиперсингулярного интеграла $J_0(z)$ (1) будем иметь:

$$J_0(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j\varphi(\xi_j)}{z-\xi_j}\left[2(n+1)R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)}\right] \tag{17}$$

где $c_j=2\left[(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)\right]^{-1}$, а функции $R_k^{(a,b)}(y)$ определяются формулой (8).

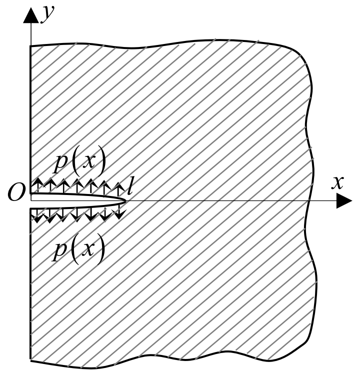
Таким образом, получена единая квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла $J_0(z)$, применимая как при ненулевых, так и при нулевых значениях показателей α и β.

При необходимости вычисления интеграла $J_0(z)$ в узловой точке $z = \xi_m$ $(m = \overline{1,n})$ следует в соответствующем слагаемом квадратурной формулы (17) использовать предельное значение:

$$\lim_{z\to\xi_m}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_m}R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{d^2R_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{dz^2}\bigg|_{z=\xi_m}$$

Численный анализ сходимости квадратурной формулы (17) здесь не приводится, поскольку, он в точности повторяет данные, приведённые в работе [14] в достаточном количестве.

Решение гиперсингулярного интегрального уравнения. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу теории упругости для упругой полуплоскости, содержащей трещину конечной длины l, перпендикулярно выходящую на границу. Полуплоскость деформируется под воздействием равномерно распределённой по берегам трещины сжимающей нагрузки $p(x)$ (фиг.1).



Фиг.1 Схематическое представление задачи

Предлагаемая задача рассматривалась неоднократно и многими авторами, в частности, отметим книгу [20]. Обычно определяющие уравнения для задач с трещинами выписываются относительно производной скачка перемещений берегов трещины, который, по сути, является мерой раскрытия трещины.

Согласно работе [20], после введения безразмерных величин

$$t=\frac{l}{2}(\tau+1);\qquad x=\frac{l}{2}(\xi+1);\qquad \frac{\kappa+1}{2\mu}p\left(\frac{l}{2}(\xi+1)\right)=f(\xi);$$
$$\frac{d}{d\tau}\left[v^+\left(\frac{l}{2}(\tau+1)\right)-v^-\left(\frac{l}{2}(\tau+1)\right)\right]=\varphi(\tau);\qquad (-1<\tau,\xi<1) \tag{18}$$

определяющее уравнение задачи, выписанное относительно скачка производной нормальной компоненты перемещения берегов трещины $\varphi(\tau)$, принимает вид:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}d\tau+\int_{-1}^{1}K(\xi,\tau)\varphi(\tau)d\tau=\pi f(\xi)\qquad(-1<\xi<1) \tag{19}$$

где

$$K(\xi,t) = -\frac{1}{t+\xi+2} - 6(1+\xi)\frac{d}{d\xi}(t+\xi+2)^{-1} - 2(1+\xi)^2\frac{d^2}{d\xi^2}(t+\xi+2)^{-1}. \quad (20)$$

Здесь $k = 3-4\nu$ – в случае плоской деформации, $k = (3-\nu)/(1+\nu)$ – в случае плоского напряжённого состояния, μ, ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полуплоскости.

Введём в рассмотрение функцию $v(t)$, представляющую раскрытие трещины и являющуюся интегралом функции $\varphi(t)$, т.е. $v'(t) = \varphi(t)$. Подставив последнее представление в уравнение (19) и проинтегрировав интегралы по частям, с учётом того, что $v(1) = 0$, получим:

$$\left[\frac{1}{1+\xi} - K(\xi,-1)\right]v(-1) + \int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau-\xi)^2}d\tau - \int_{-1}^{1}\frac{\partial K(\xi,\tau)}{\partial\tau}v(\tau)d\tau = \pi f(\xi) \quad (|\xi|<1)$$

Нетрудно проверить, что внеинтегральный член в левой части уравнения тождественно равен нулю, следовательно, придём к следующему гиперсингулярному интегральному уравнению:

$$\int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau-\xi)^2}d\tau + \int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau+\xi+2)^2}d\tau + 6(1+\xi)\frac{d}{d\xi}\int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau+\xi+2)^2}d\tau +$$
$$+2(1+\xi)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau+\xi+2)^2}d\tau = \pi f(\xi) \qquad (|\xi|<1) \quad (21)$$

Учитывая, что, исходя из физических соображений, раскрытие трещины в точке $t=-1$ принимает конечное значение, а в точке $t=1$ обращается в ноль как корневая функция, искомую функцию $v(t)$ можно представить в виде

$$v(t) = g(t)\sqrt{1-t} \qquad (|t|<1) \quad (22)$$

Подставляя (22) в интегралы уравнений (21) и используя квадратурную формулу (17) при $\alpha = 0.5;\ \beta = 0$, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j g(\xi_j)\left\{\frac{B_j(\xi)}{\xi_j-\xi} - \frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2} - \right.$$
$$\left. -6(1+\xi)\frac{d}{d\xi}\frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2} - 2(1+\xi)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2}\right\} = \pi f(\xi) \quad (23)$$

где $\xi_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – корни полинома $P_n^{(0.5,0)}(x)$, $c_j=2\left[(n+1.5)P_{n-1}^{(1.5,1)}\left(\xi_j\right)\right]^{-1}$, $g\left(\xi_j\right)$ – искомые константы, представляющие значения искомой функции $g(x)$ в узлах квадратурной формулы,

$$B_j(z)=2(n+1)R_{n+1}^{(-0.5,-1)}(z)+\frac{R_n^{(0.5,0)}(z)-R_n^{(0.5,0)}\left(\xi_j\right)}{\left(z-\xi_j\right)}.$$

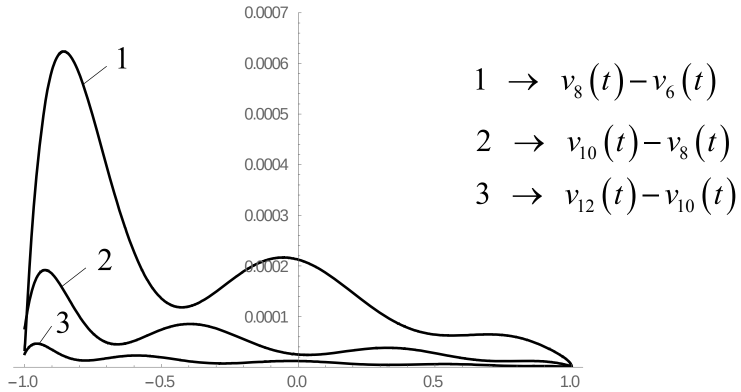
В качестве точек коллокации для сведения уравнения (23) к системе линейных алгебраических уравнений и определения констант $g\left(\xi_j\right)$ выберем корни многочлена Чебышева первого рода $T_n\left(\zeta_k\right)$. В итоге придём к следующей с.л.а.у.:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j g\left(\xi_j\right)\left\{\frac{B_j\left(\zeta_k\right)}{\xi_j-\zeta_k}-\frac{B_j\left(-\zeta_k-2\right)}{\xi_j+\zeta_k+2}-6(1+\zeta_k)\frac{d}{d\xi}\frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2}\bigg|_{\xi->\zeta_k}-\right.$$
$$\left.-2(1+\zeta_k)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2}\bigg|_{\xi->\zeta_k}\right\}=\pi f(\zeta_k) \qquad (24)$$

После определения констант $g\left(\xi_j\right)$, раскрытие трещины $v(t)$ выразим более удобной, чем (5), формулой

$$v(t)=\sqrt{1-t}\sum_{i=1}^{n} w_i g\left(\xi_i\right)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(0.5,0)}\left(\xi_i\right)P_m^{(0.5,0)}(t)}{h_m^{(0.5,0)}} \qquad (25)$$

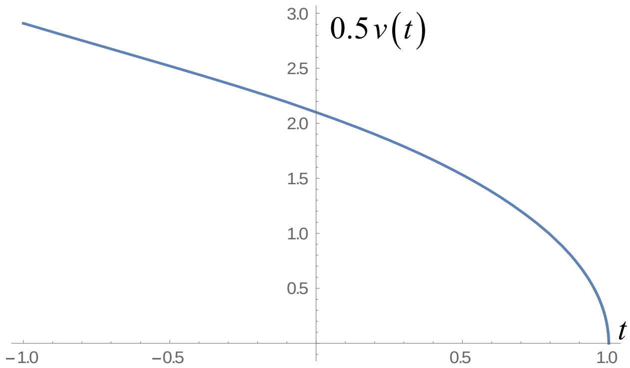
где $w_i=\dfrac{8\sqrt{2}}{\left(1-\xi_i^2\right)\left[(n+1.5)P_{n-1}^{(1.5,1)}\left(\xi_i\right)\right]^2}$



Фиг. 2. Относительная погрешность вычислений

Проведён численный анализ сходимости системы (24) по порядку аппроксимации n при $f(\xi)=-1$. На фиг.2 представлены графики разницы между функциями $v(t)$, рассчитанными при различных n, которые представим с индексом, указывающим на порядок аппроксимации $v_n(t)$.

Ввиду симметрии относительно оси Ox, на фиг.3 показан график функции $0.5\,v(t)$, который показывает реальную форму раскрытой трещины.



Фиг.3. Форма раскрытия трещины

Нетрудно найти, что коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца трещины определяется формулой

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i g(\xi_i)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(0.5,0)}(\xi_i)P_m^{(0.5,0)}(1)}{h_m^{(0.5,0)}} \tag{26}$$

Для сравнения в таблице приведены значения коэффициента концентрации напряжений, приведённые в [20] и рассчитанные по формуле (26).

Таблица

Формула (26)	n	6	8	10	12
	K	1.12145	1.12150	1.12152	1.12152
Работа [20]	n	30	40	50	60
	$k_1/p\sqrt{l}$	1.1213	1.1214	1.1214	1.1215

Графики на фиг.2 и данные, приведённые в таблице, очевидным образом указывают на эффективность применения метода механических квадратур для решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Заключение. Получена единая квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, плотность которого содержит весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями степени. Формула применима при любых допустимых значениях показателей. На примере плоской задачи теории упругости для полуплоскости с краевой трещиной показано, что приведённая квадратурная формула вкупе с квадратурными формулами для других интегралов, представленными в [18,19], позволяет с успехом применить метод механических квадратур [19] к решению и гиперсингулярных интегральных уравнений на отрезке.

Автор выражает благодарность к.ф.м.н. А.А.Амирджаняну за полезное обсуждение работы и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линьков А.М., Могилевская С.Т. Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости. //ПММ. 1990. Т.54, в.1. С.116-122.
2. Lu, J., Hanyga, A. Scattering of SH wave by a crack terminating at the interface of a bimaterial. Computational Mechanics 34, 74–85 (2004). https://doi.org/10.1007/s00466-004-0555-3
3. A. Whye-Teong, Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis, Woodhead Publishing House, Oxford (2013).
4. Boykov I. and Aikashev P., To the numerical method for synthesis of fractal antennas, 2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED), Prague, Czech Republic, 2019, pp. 1-6.
5. P. Linz, On the approximate computation of certain strongly singular integrals. Computing, 35 (1985), pp. 345-353
6. A.C. Kaya, F. Erdogan On the solution of integral equations with strongly singular kernels. Quart. Appl. Math., 45 (1987), pp. 105-122
7. M. Diligenti, G. Monegato, Finite-part integrals: their occurence and computation. F. Altomare, G. Mastroianni (Eds.), Proc. 2nd Int. Conf. in Functional Analysis and Approximation Theory, Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo Ser. II, 33 (1993), pp. 39-61.
8. Бойков И.В., Добрынина Н.Ф., Домнин Л.Н. Приближённые методы вычисления интегралов Адамара и решение гиперсингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во Пенз. гос.ун-та, 1996. 188с.
9. Criscuolo G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals. J. of Comp. and App. Math., 1997, Vol. 78, Iss. 2, pp. 255-275, https://doi.org/10.1016/S0377-0427(96)00142-2
10. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Изд-во «Янус-К», 2001, 508 с.
11. Плиева Л.Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования. //Сиб. журн. вычисл. матем., 2016, том 19, № 4, 419–428 DOI: https://doi.org/10.15372/SJNM20160406
12. Бойков И.В., Сёмов М.А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов. // Изв. вузов. Матем., 2016, № 3, С.3–17.
13. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные. //Известия РАН, Механика твёрдого тела. 2012. №6. С.116-121.
14. Саакян А.В. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями.

//Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2020, № 2, с. 94-100.
15. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. СМБ, том 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, СМБ, том 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
18. Саакян А.В., Амирджанян А.А. Метод механических квадратур для решения сингулярных интегральных уравнений разного типа. Тр. V межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 2-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, Ер.: НУАСА, 2017, с.117-118.
19. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi:10.1088/1742-6596/991/1/012070
20. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1976. 443 с.

Сведения об авторе:

Саакян Аветик Вараздатович
Д.ф.м.н., зам.директора Института механики НАН Армении,
Тел.: (37410) 568188, (37494)579348
E-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Поступила в редакцию 24.05.2020