

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО
ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ПОКРЫТИЕМ**

Ватульян А.О., Плотников Д.К.

Ключевые слова: индентирование, функционально-градиентный материал, контактная задача, приближенная модель.

Vatulyan A. O., Plotnikov D. K.

Contact problem for an inhomogeneous rectangle with coating

Keywords: indentation, functionally graded material, contact problem, approximate model.

The approximate model of deformation of an elastic rectangle inhomogeneous along the vertical coordinate is presented. The model is based on hypotheses about the nature of changes in the components of the displacement field, depending on the properties of the material. The model allows to consider both continuous and discontinuous laws of heterogeneity. Based on an approximate model, the contact problem is investigated. Solutions for different laws of heterogeneity are constructed. The applicability region of the elastic rectangle model is described. A comparative analysis of the results of solutions based on approximate and finite element models.

Վատուլյան Ա.Օ., Պլոտնիկով Դ.Կ.

Անհամասեռ ծածկոյթով ուղանկյան կոնտակտային խնդիր

Հիմնաբառեր՝ կոնտակտային խնդիր, անհամասեռ ուղղանկյուն, մոտավոր մեթոդ

Աշատանքում առաջարկված է ըստ ուղղահայաց կորդինատի անհամասեռ ուղղանկյան դեֆորմացիայի մոդել: Մոդելը կառուցված է նյութի հատկություններից կախված տեղափոխությունների դաշտի փոփոխման՝ բնույթի վրա հիմնված վարկածների օգնությամբ: Վատարված է համեմատական անալիզ մոտավոր և վերջավոր էլեմենտների վրա հիմնված լուծումների արդյունքների միջև:

В работе представлена приближённая модель деформирования неоднородного по вертикальной координате упругого прямоугольника. Модель построена на основе гипотез о характере изменения компонент поля перемещений, зависящих от свойств материала. Модель позволяет рассматривать как непрерывные законы неоднородности, так и законы, имеющие разрыв или сильную градиентность. На основе приближённой модели исследована контактная задача, построены решения для разных законов неоднородности. Описана область применимости модели для упругого прямоугольника. Проведён сравнительный анализ результатов решений, построенных на основе приближённой и конечно-элементной моделей.

Введение Область практических приложений теории контактных взаимодействий довольно широка. Необходимость решения контактных задач возникает, например, при применении стремительно развивающихся методов индентирования, которые широко используются для определения свойств различных материалов [1]. В современной инженерной практике актуальным в настоящее время является использование материалов, для которых характерно изменение механических свойств по координатам. Широко используются многослойные конструкции, активно

развиваются технологии создания функционально-градиентных материалов (ФГМ) с непрерывным изменением свойств [2]. Отсутствие разрывов в свойствах материала позволяет избежать образования областей концентрации напряжений и повысить прочностные характеристики изготавливаемых элементов конструкций. Одной из актуальных областей применения таких материалов является изготовление градиентных покрытий. Применение методов индентирования в проблеме идентификации свойств неоднородных структур требует исследования ряда контактных задач для неоднородных тел.

Задачи механики контактных взаимодействий в плоской постановке, как правило, сводятся к решению интегрального уравнения первого рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Эффективным способом аналитического решения контактных задач теории упругости являются асимптотические методы [3, 4]. Однако, в случае неоднородного материала ядра интегральных уравнения не могут быть найдены в явном виде и строятся численно, либо с помощью численно-аналитических подходов [5–7]. Другим способом исследования контактных задач является разработка приближённых моделей [8–10]. Среди работ, посвящённых исследованию контактных задач для тел, усиленных накладками и стрингерами, отметим [11–12].

В работах [13,14] построен ряд приближённых моделей для неоднородной упругой полосы, в основе которых лежат гипотезы о характере компонент поля перемещений. В настоящей работе этот подход развит на случай конечной прямоугольной области.

1. Контактная задача для прямоугольника

Рассмотрим задачу о действии жёсткого штампа с основанием параболической формы на неоднородный по вертикальной координате упругий прямоугольник, жёстко сцеплённый с недеформируемым основанием по нижней границе. Параметры Ляме прямоугольника являются произвольными положительными функциями вертикальной координаты: $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, в том числе и имеющими разрывы первого рода. Полагая, что трение между контактными поверхностями штампа и прямоугольника отсутствует, сформулируем смешанную краевую задачу для прямоугольной области $S = [-L, L] \times [0, h]$. Уравнения равновесия и определяющие соотношения для изотропного тела имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 3$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(x_3) u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu(x_3) \varepsilon_{ij}$$

Граничные условия контактной задачи имеют вид:

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0,$$

$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad a < |x_1| \leq L, \quad u_3(x_1, h) = \delta - \frac{1}{2R} x_1^2, \quad |x_1| \leq a,$$

где a – размер площадки контакта, δ – величина внедрения, R – радиус кривизны параболического штампа.

Будем считать, что боковые границы прямоугольника свободны от напряжений:

$$\sigma_{11}(\pm L, x_3) = 0, \quad \sigma_{13}(\pm L, x_3) = 0.$$

Постановку задачи дополняет условие равновесия штампа, которое позволяет определить связь между силой и внедрением.

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки на отрезке $[-a, a]$ верхней границы прямоугольника. Введём следующие безразмерные параметры:

$$\xi_i = h^{-1} x_i, \quad \hat{u}_i = h^{-1} u_i, \quad \beta = h^{-1} a, \quad r = h^{-1} R, \quad l = h^{-1} L, \\ \hat{\sigma}_{ij} = \mu_0^{-1} \sigma_{ij}, \quad f_1 = \mu_0^{-1} \lambda, \quad f_2 = \mu_0^{-1} \mu, \quad \delta_* = h^{-1} \delta,$$

$$\text{где } \mu_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \mu(x_3).$$

2. Формулировка приближённой модели

Для исследования краевой задачи применим подход, сформулированный в [13, 14]. Сравнительный анализ, проведённый в [13], показал, что из предложенных гипотез наибольшее соответствие КЭ-модели позволяют получить гипотезы, зависящие от законов неоднородности полосы, поэтому в данной задаче в качестве гипотез о характере компонент поля перемещений примем следующие:

$$\hat{u}_1 = \psi_1(\xi_3) u(\xi_1), \quad \hat{u}_3 = \psi_3(\xi_3) w(\xi_1), \\ \psi_1(\xi_3) = g_1(\xi_3) / g_1(1), \quad \psi_3(\xi_3) = g_3(\xi_3) / g_3(1), \quad (2.1) \\ g_1(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{1}{f_2(\eta)} d\eta, \quad g_3(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{1}{f_1(\eta) + 2f_2(\eta)} d\eta.$$

Для определения введённых функций $u(\xi_1)$, $w(\xi_1)$ используем вариационный принцип Лагранжа. Запишем функционал потенциальной энергии, подставим в него соотношения (2.1), проинтегрируем по ξ_3 и построим упрощённый функционал

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(A_{11} u'^2 + 2(A_{12} u'w + A_{21} uw') + A_{20} w^2 + A_{10} u^2 + A_{22} w'^2 \right) d\xi_1 - \int_{-\beta}^{\beta} q w d\xi_1, \quad (2.2)$$

где q – безразмерное контактное давление, коэффициенты A_{ij} определяются формулами

$$A_{10} = \int_0^1 f_2 \Psi_1'^2 d\xi_3, \quad A_{11} = \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \Psi_1^2 d\xi_3, \quad A_{12} = \int_0^1 f_1 \Psi_1 \Psi_3' d\xi_3,$$

$$A_{20} = \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \Psi_3'^2 d\xi_3, \quad A_{21} = \int_0^1 f_2 \Psi_1' \Psi_3 d\xi_3, \quad A_{22} = \int_0^1 f_2 \Psi_3^2 d\xi_3.$$

Применим вариационный принцип Лагранжа к функционалу (2.2). Имеем

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & (A_{11}u' + A_{12}w) \delta u \Big|_{-l}^l + (A_{21}u + A_{22}w') \delta w \Big|_{-l}^l + \\ & + \int_{-l}^l \left[(A_{10}u + A_{21}w' - (A_{11}u')' - (A_{12}w)') \delta u + \right. \\ & \left. + (A_{20}w + A_{12}u' - (A_{21}u)' - (A_{22}w')') \delta w \right] d\xi_1 - \int_{-\beta}^{\beta} q \delta w d\xi_1 = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при независимых вариациях, получим систему дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами относительно компонент смещения верхней границы прямоугольника, которая имеет такой же вид, как и в задаче для полосы

$$\begin{aligned} -A_{11}u'' - (A_{12} - A_{21})w' + A_{10}u &= 0, \\ -A_{22}w'' + (A_{12} - A_{21})u' + A_{20}w &= q \end{aligned} \quad (2.3)$$

и естественные граничные условия в виде

$$(A_{11}u' + A_{12}w) \Big|_{\xi_1 = \pm l} = 0, \quad (A_{21}u + A_{22}w') \Big|_{\xi_1 = \pm l} = 0. \quad (2.4)$$

На границах контактной области $\xi_1 = \pm\beta$ должны быть выполнены стыковые условия

$$\begin{aligned} u_-(\pm\beta) = u_+(\pm\beta), \quad w_-(\pm\beta) = w_+(\pm\beta), \\ u'_-(\pm\beta) = u'_+(\pm\beta), \quad w'_-(\pm\beta) = w'_+(\pm\beta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где индексами «-» и «+» обозначены решения системы (2.3) в области контакта и вне её.

Исключая из системы (2.3) перемещение u , получим операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение на верхней границе полосы с нормальной нагрузкой

$$b_2 w^{IV} - b_1 w'' + b_0 w = -a_1 q'' + a_0 q \quad (2.6)$$

Причем,

$$u = \frac{1}{A_{12} - A_{21}} \left(\frac{b_2}{a_0} w''' + \left(\frac{b_2}{a_1} - \frac{b_1}{a_0} \right) w' + q' \right) \quad (2.7)$$

где коэффициенты a_i, b_i определяются формулами

$$a_0 = A_{10}, \quad a_1 = A_{11}, \quad b_0 = A_{10}A_{20}, \quad b_1 = A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - (A_{12} - A_{21})^2, \quad b_2 = A_{11}A_{22}.$$

В области контакта $|\xi_1| \leq \beta$, полагая в уравнении (2.6) $w_-(\xi_1) = \delta_* - \frac{1}{2r}\xi_1^2$, найдём

контактное давление в виде

$$q(\xi_1) = C_0 \operatorname{ch}(k\xi_1) + B_1\xi_1^2 + B_0 \quad (2.8)$$

где

$$B_0 = \frac{1}{ra_1k^2} \left(b_1 - \frac{b_0}{k^2} + b_0\delta_*r \right), \quad B_1 = -\frac{b_0}{2ra_1k^2}, \quad k^2 = \frac{a_0}{a_1}.$$

Смещения верхней границы прямоугольника вне контактной области найдём из решения уравнения (2.6), полагая в нём $q_* = 0$ для $\xi_1 > 0$:

$$w_+(\xi_1) = C_1 \exp(-\lambda_1\xi_1) + C_2 \exp(-\lambda_2\xi_1) + C_3 \exp(\lambda_1\xi_1) + C_4 \exp(\lambda_2\xi_1) \quad (2.9)$$

Горизонтальная компонента смещения определяется формулой (2.7), где вне контактной зоны $q = 0$ и q определяется выражением (2.8) в области контакта. Неизвестные константы, а также связь величины площадки контакта с глубиной внедрения найдём из условий (2.4), (2.5). Окончательный вид решений не приводится ввиду громоздкости. Отметим, что при $l \rightarrow \infty$ коэффициенты $C_3, C_4 \rightarrow 0$ и решение (2.9) стремится к решению для полосы. Условие равновесия штампа даёт зависимость силы, действующей на штамп, от глубины внедрения.

3. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении вычислительных экспериментов были выбраны четыре пары безразмерных законов неоднородности прямоугольника:

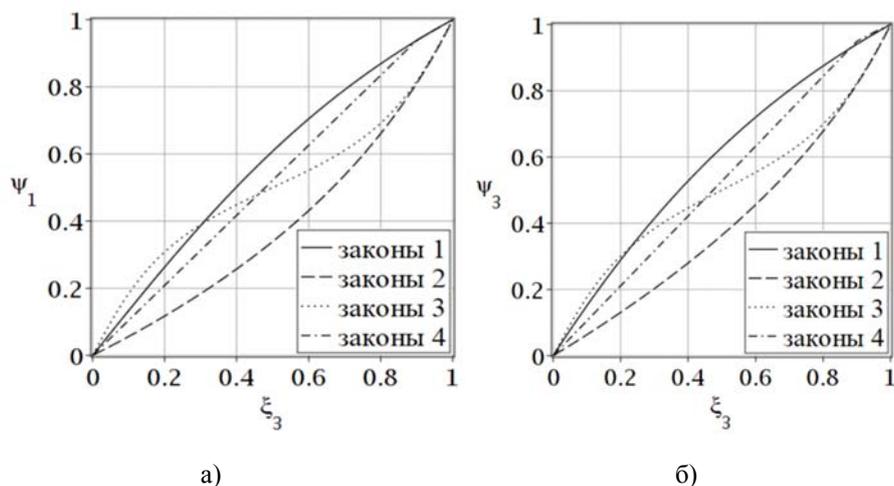
1. возрастающие $f_1^{(1)}(\xi_3) = 0.2 + 0.8\xi_3, \quad f_2^{(1)}(\xi_3) = 0.4375 + 0.5625\xi_3^2$;
2. убывающие $f_1^{(2)}(\xi_3) = -0.4\xi_3^3 + 0.7, \quad f_2^{(2)}(\xi_3) = -0.75\xi_3 + 1$;
3. немонотонные
 $f_1^{(3)}(\xi_3) = 0.6 - 0.3 \cos(2\pi\xi_3), \quad f_2^{(3)}(\xi_3) = 0.625 - 0.375 \cos(2\pi\xi_3)$;
4. разрывные

$$f_1^{(4)}(\xi_3) = \begin{cases} 0.5, & \xi_3 \in [0, 0.9) \\ 10\xi_3 - 8, & \xi_3 \in [0.9, 1] \end{cases}, \quad f_2^{(4)}(\xi_3) = \begin{cases} 0.584, & \xi_3 \in [0, 0.9) \\ 0.088\xi_3 + 0.912, & \xi_3 \in [0.9, 1] \end{cases}$$

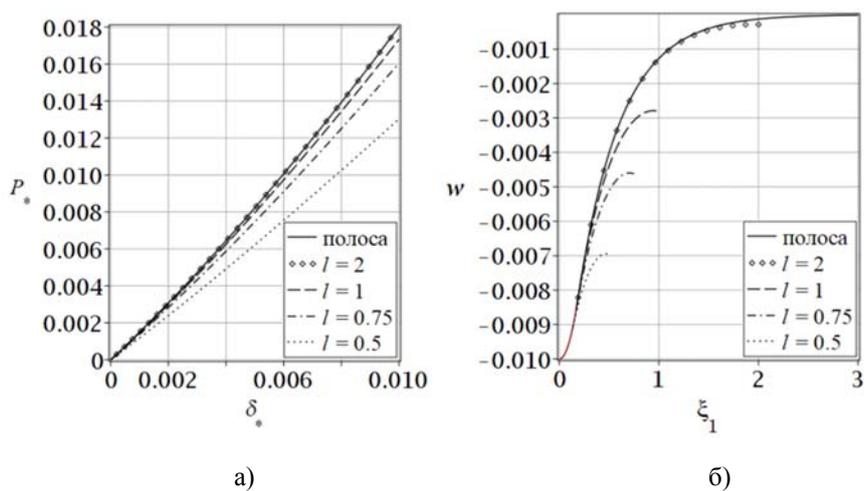
Законы неоднородности имеют одинаковые средние значения, т.е.

$$\int_0^1 f_1^{(j)}(\xi_3) d\xi_3 = 0.6, \quad \int_0^1 f_2^{(j)}(\xi_3) d\xi_3 = 0.625, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Поскольку гипотезы (2.1) зависят от свойств прямоугольника, характер изменения компонент вектора перемещений по вертикальной координате будет различным для каждого из законов неоднородности. На фиг.1 представлены графики функций $\Psi_1(\xi_3)$ и $\Psi_3(\xi_3)$ для законов 1–4.



Фиг.1: Характер изменения смещений по ξ_3 : а) $\psi_1(\xi_3)$; б) $\psi_3(\xi_3)$.



Фиг. 2: Сравнение решений контактной задачи для полосы и прямоугольников различной длины: а) сила-внедрение; б) вертикальное смещение верхней границы.

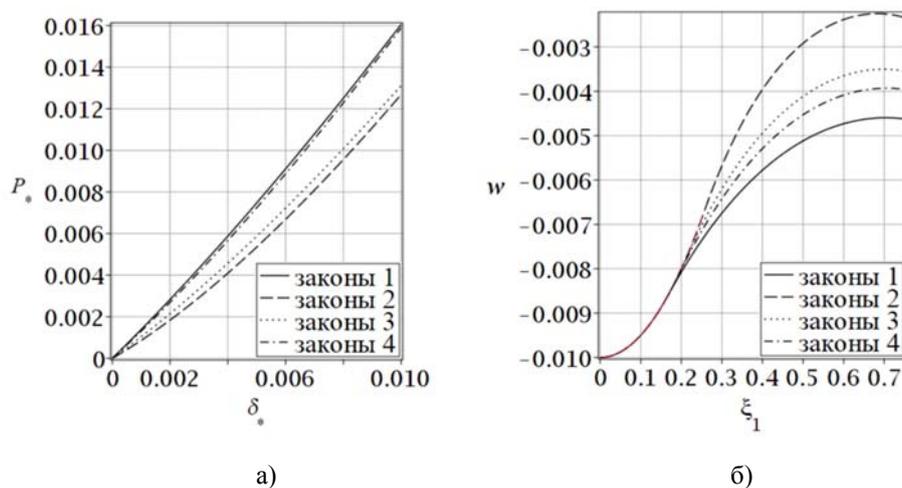
На фиг.2 приведено сравнение решений контактной задачи для полосы и прямоугольника с различными соотношениями геометрических параметров. Вычисления проведены для возрастающих законов неоднородности l при значении безразмерного радиуса кривизны штампа $r = 10$. Анализ результатов показал, что для вертикального смещения верхней границы наибольшая разница решений полосы и прямоугольника наблюдается в точке $\xi_1 = l$, что обусловлено структурой решения (2.9), и составляет 5% при $l = 0.7332$. Разница 5% для значений безразмерной силы $P_* = P / \mu_0 h$, действующей на штамп, для внедрения $\delta_* = 0.01$ достигается при $l = 0.9389$. Значения l , при которых разность в значениях силы и вертикального

смещения в точке $\xi_1 = l$ при $\delta_* = 0.01$ достигает 5% и 10% для законов неоднородности 1–4 приведены в Табл. 1.

Таблица 1.

Законы неоднородности	$\Delta_p = 5\%$	$\Delta_p = 10\%$	$\Delta_w = 5\%$	$\Delta_w = 10\%$
1	0.9389	0.7727	0.7332	0.5111
2	0.6569	0.5522	0.6750	0.5611
3	0.7927	0.6569	0.7101	0.5476
4	0.8419	0.6962	0.7129	0.5298

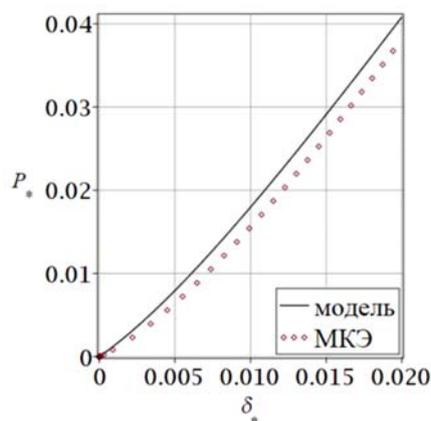
На фиг. 3 представлено сравнение решений контактной задачи для прямоугольника на основе приближённой модели для законов неоднородности 1–4 при $r=10$, $l=0.75$. Несмотря на одинаковые средние значения функций $f_1^{(j)}(\xi_3)$, $f_2^{(j)}(\xi_3)$, результаты решения контактной задачи различны и данная модель может быть использована для идентификации упругих свойств прямоугольника по данным индентирования. Графики зависимости сила-внедрение для законов 1 и 4 значительно отличаются от аналогичных зависимостей для законов 2 и 3, так как максимальные значения безразмерных модулей $f_1^{(1)}(\xi_3)$, $f_2^{(1)}(\xi_3)$ и $f_1^{(4)}(\xi_3)$, $f_2^{(4)}(\xi_3)$ достигаются на верхней границе прямоугольника $\xi_3 = 1$. Таким образом, для зависимости сила-внедрение существенными характеристиками являются значения упругих модулей материала на верхней границе.



Фиг. 3: Решения контактной задачи для законов 1–4.

Построено решение контактной задачи с помощью МКЭ. Неоднородный прямоугольник смоделирован с помощью КЭ-пакета Ansys в виде многослойной области для количества слоёв $N = 21$. Сравнение решений приближённой модели с

решениями, полученными на основе КЭ-модели, представлено на фиг. 4. Вычисления проведены для разрывных законов неоднородности 4 при значениях параметров $r = 20$, $l = 0.75$. Как и для полосы, приближённая модель даёт завышенное значение при одинаковом внедрении по сравнению с решением на основе КЭ-модели. Разница решений составляет 12.5% при глубине внедрения $\delta_* = 0.01$ и 6.4% при внедрении $\delta_* = 0.02$.



Фиг. 4. Сравнение решений на основе приближённой и КЭ моделей для законов 4.

Заключение

Построена приближённая модель деформирования неоднородного по вертикальной координате упругого прямоугольника. Сформулированы граничные условия на боковых сторонах прямоугольника. В рамках модели решена задача контактного взаимодействия неоднородного упругого прямоугольника и жёсткого штампа параболической формы. Проведено сравнение решений контактной задачи для прямоугольника с решениями для полосы. Проведён сравнительный анализ решений для разных законов неоднородности, который показал чувствительность модели к характеру изменения упругих свойств, что говорит о возможности исследования задач об оценке свойств неоднородного тела в рамках представленной модели. Основной информацией при решении обратных задач может служить зависимость сила-внедрение. Проведён сравнительный анализ результатов решений, построенных на основе приближённой и конечно-элементной моделей, обсуждены границы применимости модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borodich F.M., Bull S.J., Epshtein S.A. Nanoindentation in Studying Mechanical Properties of Heterogeneous Materials // J. Mining Science. 2015. Vol. 51. No.3 P. 470–476.
2. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Applied Materials Today. 2016. Vol. 5. P. 223–245.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

4. Механика контактных взаимодействий (ред. Ворович И. И., Александров В. М.). М.: Физматлит, 2001. 672 с.
5. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
6. Волков С.С., Васильев А. С, Айзикович С.М., Селезнев Н.М., Леонтьева А.В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34.
7. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Контактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации // Известия НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. № 1. С.6–15.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
9. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980, 411с.
10. Саркисян С.О. О цилиндрическом изгибе пластинки жесткими штампами. // Доклады АН Арм. ССР, 1977, вып. LXIV, № 4, с. 216–223.
11. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полосы и бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.22-34.
12. Григорян М.С., Мхитарян С.М. О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругой полубесконечной пластиной. // Доклады НАН Армении. 2018. Т.118. №1. С.49–59.
13. Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т.18, вып. 4. С 421–432.
14. Ватульян А.О., Плотников Д.К. Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы // Доклады РАН. 2019. Т.485. №5. С. 564–567.

Сведения об авторах:

Ватульян Александр Ованесович, д.ф.м.н., проф., зав. Каф. теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Адрес: Россия, Ростов-на-Дону, 344015, ул. Зорге, дом 27/3 кв.48
Тел:+7 (918) 589-60-75, **E-mail:**vatulyan@math.rsu.ru

Плотников Дмитрий Константинович, м.н.с. ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ
Адрес: Россия, Аксай, 346720, ул. Садовая, дом 5, кв. 21
Тел:+7 (909) 412-48-07, **E-mail:**dustheap@mail.ru

Поступила в редакцию 23.04.2020