ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.2

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ[1]

Агаян К.Л.

Ключевые слова . **Упругие волны, трещина, факторизация, дифракция.**

Diffraction of shear flat waves on a semi-infinite crack in a compound elastic half-space

K.L.Aghayan

Keywords: Elastic waves, crack, factorization, diffraction.

The problems of dynamic elasticity theory related to the processes of vibration, propagation and diffraction of stress waves in composite elastic bodies containing various type stress concentrators are an urgent problem from both a scientific and practical point of view. The paper investigates a dynamic contact problem of propagation and diffraction of shear plane waves in a composite elastic half-space consisting of elastic half-space and a layer and weakened by a semi-infinite tunnel crack on the contact surface of the material interface. The solution of the mixed diffraction problem is reduced to a Riemann-type boundary value problem on the real axis. Obtained solution of the defining equation in generalized functions allows us to obtain the distribution of the wave field in the considered inhomogeneous structure.

Աղայան Կ. Լ.

Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքով բաղադրյալ առաձգական կիսատարածությունում

Հիմնաբառեր՝ առաձգական ալիքներ, ճաք, ֆակտորիզացիա, դիֆրակցիա

Լարումների տարաբնույթ կուտակիչներ պարունակող բաղադրյալ առաձգական մարմիններում տատանումների գործընթացների, ալիքների տարածման և դիֆրակցիայի հետ կապված առաձգականության տեսության դինամիկ խնդիրները թե գիտական, և թե գործնական տեսակետից շատ արդիական են: Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգական կիսատարածությունից և ճնշ շերտից բաղկացած բաղադրյալ առաձգական կիսատարածությունում սահքի հարթ ալիքների տարածման և դիֆրակցիայի դինամիկ կոնտակտային խնդիր: Կիսատարածությունը թուլացված է մարմինների կոնտակտային մակերևույթով տարածվող թունելային ճաքով: Դիֆրակցիայի խառը խնդրի լուծումը բերվում է իրական առանցքի վրա Ռիմանի տիպի եզրային խնդրի: Ընդհանրացված ֆունկցիաներով ստացված բնութագրիչ հավասարման լուծումը թույլ է տալիս բացահայտ տեսքով ներկայացնել դիտարկվող անհամասեռ տիրույթներում տեղափոխությունների դաշտը՝ ալիքային բաղադրիչների գումարի տեսքով:

Задачи динамической теории упругости, связанные с процессами колебаний, распространения и дифракции волн напряжений в составных упругих телах, содержащих разнородные концентраторы напряжений, являются актуальной проблемой как с научной, так и с практической точки зрения. В работе исследуется динамическая контактная задача о распространении и дифракции сдвиговых плоских волн в составном упругом полупространстве, состоящем из упругих полупространства и слоя и ослабленном полубесконечной туннельной трещиной по контактной поверхности раздела материалов. Решение смешанной задачи дифракции сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси. Полученное

[1] Статья посвящается 100-летнему юбилею академика И.И.Воровича.

в обобщённых функциях решение определяющего уравнения позволяет найти в явном виде распределение волнового поля в рассматриваемой неоднородной конструкции.

1.Введение. Многие фундаментальные исследования и основополагающие результаты в областях теории смешанных и контактных задач и динамической теории упругости с большой полнотой были отражены в многочисленных работах и монографиях академика И.И. Воровича и его соратников – учеников из ростовской школы механиков. В предлагаемой работе рассматривается динамическая контактная задача о направленном (волноводном) распространении и излучении гармонических сдвиговых плоских волн из слоя в упругое полупространство и, наоборот, из полупространства в слой. Конструктивная неоднородность и наличие трещины в среде являются причиной дифракции и появления локализованных поверхностных волн. Одной из актуальных отраслей применения результатов таких задач является идентификация и при определённом изменении параметров, входящих в контактирующие тела, упорядочить число и волновые параметры отражённых, проходящих и дифрагированных волн. По родственным вопросам исследования характерных особенностей распространения и дифракции гармонических волн в различных неоднородных упругих средах с разными конфигурациями посвящено много работ, особенно ростовских ученых – механиков. Останавливаться на всех этих работах не представляется возможным. Поэтому, исходя из собственных побуждений, отметим лишь монографии [1-5]. Обращаясь теперь к более близким к рассматриваемой здесь задаче работам, отметим монографии [6-8], обзорные статьи [9-10] и работы [11-18]. Рассмотренные в них задачи, особенно последние, по постановке, методам решения определяющих уравнений и анализу полученных решений тесно связаны с решаемой здесь задачей.

2. Постановка и решение задачи. Рассмотрим, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$, составное упругое полупространство, составленное из упругих слоя (волновод) и полупространства. Слой с модулем сдвига μ_0 и плотностью ρ_0, занимающий область $\Omega_0(-\infty < x, z < \infty; 0 \le y \le h)$, по своей граничной полуплоскости $S_+\left(x \ge 0, -\infty < z < \infty; y = h\right)$ соединён (жёсткий контакт) с полупространством $\Omega_1(-\infty < x, z < \infty; y \ge h)$ с упругими характеристиками μ_1, ρ_1. Слой и полупространство по полуплоскости $S_-\left(x \le 0, -\infty < z < \infty; y = h\right)$ не контактируют (разделены туннельной трещиной) и свободны от напряжений. Относительно поверхности $\omega_0\left(|x, \mathrm{z}| < \infty, y = 0\right)$ предполагается, что она свободна от напряжений.

Внутри свободной части ($x < 0$) волновода, по направлению оси $0x$ распространяется плоская сдвиговая волна с амплитудой

$$w_{0N}\left(x, y\right) = A_N e^{i\gamma_N x} \cos\frac{\pi N}{h}\left(y - h\right), \qquad |x| < \infty, \quad 0 \le y \le h \tag{2.1}$$

$$\gamma_N = \sqrt{k_0^{\,2} - \left(\pi N/h\right)^2}, \qquad k_0 > \pi N/h, \qquad N = 1, 2, ... \tag{2.2}$$

а в полупространстве Ω_1 из бесконечности под углом φ распространяется заданная сдвиговая плоская волна с амплитудой

$$w_{1n}(x,y) = A_1 e^{ip_1 x}\cos(q_1 y), \qquad |x| < \infty,\ y \ge h, \tag{2.3}$$

где $p_1 = \cos k_1\varphi$, $q_1 = \sin k_1\varphi$ – волновые компоненты падающей волны.

В (2.1)-(2.3) A_N и A_1 – постоянные, $k_j = \omega/c_j$ – волновые числа, а $c_j = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$ – скорости распространения сдвиговых упругих волн в слое $(j=0)$ и полупространстве $(j=1)$. N является неотрицательным целым числом, удовлетворяющим условию $N < hk_0/\pi$, обеспечивающему распространяемость волн (2.1) по волноводу.

Предполагая, что составное полупространство находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить распределение полного волнового поля в рассматриваемой кусочно-однородный конструкции.

Гармонический множитель, как обычно, опускается, т.е. задача решается в амплитудах. Тогда, уравнения движения в амплитудах перемещений в базовой плоскости $z=0$ примут вид [19]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \begin{Bmatrix} k_1^2 \\ k_0^2 \end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_0 \end{Bmatrix} = 0, \qquad (x,y) \in \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_0 \end{Bmatrix}, \tag{2.4}$$

где $w_1(x,y)$ и $w_0(x,y)$ – подлежащие определению амплитуды упругих перемещений в областях Ω_1 и Ω_0 соответственно. Для формирования граничных условий заметим, что на свободных поверхностях отсутствуют напряжения τ_{yz}, а на поверхности соприкасания выполняются условия полного контакта. Так что, граничные и контактные условия при помощи $w_1(x,y)$ и $w_0(x,y)$ запишутся в виде:

$$\mu_0 \left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h-0} = \mu_1 \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=h+0} = 0,\ x < 0 \tag{2.5}$$

$$w_0(x, h-0) = w_1(x, h+0),\ x \ge 0 \tag{2.6}$$

$$\mu_0 \left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h-0} = \mu_1 \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=h-0},\quad x > 0 \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty \tag{2.8}$$

Решение задачи должно удовлетворять ещё и условиям уходящей волны.

Решение краевой задачи (2.4)-(2.8) в областях Ω_0 и Ω_1 представим в виде

$$w_0(x,y) = W_0(x,y) + w_{0N}(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega_0, \tag{2.9}$$

$$w_1(x,y)=W_1(x,y)+w_{1n}(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega_1, \tag{2.10}$$

где $w_{0N}(x,y)$ и $w_{1n}(x,y)$ даются формулами (2.1) и (2.3), соответственно.

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.4) по обычной процедуре, решение задачи при помощи интегрального преобразования Фурье представим в виде:

$$\begin{gathered}\overline{w}_0(\sigma,y)=C_0\mathrm{ch}(\gamma_0 y)+D_0\mathrm{sh}(\gamma_0 y)+\\ +2\pi A_N\cos\frac{\pi N}{h}(y-h)\delta(\sigma+\gamma_N) \qquad 0\le y\le h,\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\overline{w}_1(\sigma,y)=B_1(\sigma)e^{-\gamma_1 y}+2\pi A_1\cos(p_1 y)\delta(\sigma+p_1), \qquad h\le y<\infty, \tag{2.12}$$

где C_0, D_0, B_1 – неизвестные функции, а $\delta(\sigma)$ – известная дельта – функция Дирака, $\gamma_j(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_j^2}$ $(j=0,1)$. Отметим, что в дальнейшем, для определённости, будем предполагать $k_1<k_0$, т.е. будем придерживаться пределов появления локализованных поверхностных волн Лява [19].

Относительно двузначных функций $\gamma_0(\sigma)$ и $\gamma_1(\sigma)$ предполагается, что $\sqrt{\sigma^2-k_j^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, а для $|\sigma|<k_j$ имеет место равенство $\sqrt{\sigma^2-k_j^2}=-i\sqrt{k_j^2-\sigma^2}$, $j=0,1$, что позволяет обеспечить выполнение условия уходящей волны в (2.11)-(2.12). Для выбора таких ветвей двузначной функции $\gamma_0(\sigma)$ и $\gamma_1(\sigma)$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ разрезы до бесконечности от точек $\sigma=k_1, \sigma=k_0$ в верхней полуплоскости и от точек $\sigma=-k_0, \sigma=-k_1$ в нижней полуплоскости. В таком случае действительная ось обходит точки $\sigma=-k_0$, $\sigma=-k_1$ сверху, а точки $\sigma=k_0$, $\sigma=k_1$ – снизу [6,7].

Применив теперь преобразование Фурье к граничным и контактным условиям (2.5) и (2.8) и удовлетворяя им при помощи представлений (2.11) и (2.12), приходим к следующему функциональному уравнению типа Винера-Хопфа на действительной оси:

$$\overline{\Phi}^-(\sigma)+\overline{K}(\sigma)\overline{\Psi}^+(\sigma)=\overline{F}(\sigma) \tag{2.13}$$

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{1+\mu_*}{2}\frac{\overline{R}(\sigma)}{\gamma_1}; \qquad \overline{R}(\sigma)=\frac{\mu_*+\gamma_1\gamma_0^{-1}\mathrm{cth}(\gamma_0 h)}{1+\mu_*}, \quad \mu_*=\frac{\mu_0}{\mu_1} \tag{2.14}$$

$$\overline{F}(\sigma)=\pi A_1 e^{hq_1}\delta(\sigma+p_1)-\pi A_N\delta(\sigma+\gamma_N) \tag{2.15}$$

где $\overline{\Phi}^-(\sigma)$ и $\overline{\Psi}^+(\sigma)$ – трансформанты Фурье функций $\varphi^-(x)$ и $\psi^+(x)$, которые связаны с амплитудами $w_j(x,y)$ $(j=0,1)$ зависимостями

$$w_0(x,h-0)-w_1(x,h+0)=2\varphi^-(x),\qquad \left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h-0}=\psi^+(x),\qquad |x|<\infty \tag{2.16}$$

где $\varphi^-(x)=0$ при $x>0,$ а $\psi^+(x)=0$ при $x<0.$

Неизвестные функции C_0, D_0 и B_1 из (2.11), (2.12) определяются решением функционального уравнения (2.14) следующим образом:

$$\begin{gathered}C_0(\sigma)=\frac{1}{\gamma_0\mathrm{sh}(\gamma_0 h)}\bar{\Psi}^+(\sigma),\qquad D_0=0,\\ B_1(\sigma)e^{-\gamma h}=-\mu_*\gamma^{-1}\bar{\Psi}^+(\sigma)+2\pi A_N\cos\frac{\sigma N}{h}(y-h)\delta(\sigma+\gamma_N),\end{gathered} \tag{2.17}$$

Таким образом, решение вышепоставленной задачи свелось к решению функционального уравнения (2.14).

Используя известные представления [20] $\gamma_1(\sigma)=\sqrt{(\sigma-k_1)(\sigma+k_1)}$, $2\pi i\delta(\sigma-\sigma_0)=\dfrac{1}{\sigma-\sigma_0-i0}-\dfrac{1}{\sigma-\sigma_0+i0}$, методом факторизации [6] получим решение уравнения (2.14) в виде

$$\begin{gathered}\bar{\Psi}^{/+}(\sigma)=\frac{\sqrt{\mu_*(\sigma+k_1)}}{\bar{R}^+(\sigma)}\left[\frac{A_1^*}{\sigma+p_1+i0}-\frac{A_N^*}{\sigma+\gamma_N+i0}\right],\\ \bar{\Phi}^{/+}(\sigma)=\frac{\bar{R}^-}{\sqrt{\bar{\mu}_*(\sigma-k_1)}}\left[\frac{A_1^*}{\sigma+p_1-i0}+\frac{A_N^*}{\sigma+\gamma_N-i0}\right],\end{gathered} \tag{2.18}$$

где

$$\bar{\mu}_*=\frac{2}{1+\mu_*},\quad A_N^*=A_N\frac{\sqrt{\bar{\mu}_*(k_1+\gamma_N)}}{\bar{R}^+(\gamma_N)},\quad A_1^*=A_1\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_*k_1}\cos(\varphi/2)}{2\bar{R}^+(p_1)}$$

$$\begin{gathered}\bar{R}(\sigma)=\bar{R}^+(\sigma)\bar{R}^-(\sigma),\qquad \bar{R}^\pm(\sigma)=\exp(F_\pm(\sigma)),\\ \bar{F}_+(\sigma)=\int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx;\qquad \bar{F}_-(\sigma)=\int_{-\infty}^0 F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx;\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1-\gamma_1\gamma_0^{-1}cth(\gamma_0 h)}{1+\mu_*}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.20}$$

Из (2.19) нетрудно заметить, что $\overline{F}_{+}(\sigma)=\overline{F}_{-}(-\sigma)$, следовательно, $\overline{R}^{+}(\sigma)=\overline{R}^{-}(-\sigma)$. Отметим, что для вычисления $\overline{F}_{+}(\sigma)$ можно использовать формулу $\overline{F}_{+}(\sigma)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\overline{R}(\sigma)+\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{R}(t)\dfrac{dt}{t-\sigma}$.

В (2.19) $\overline{R}^{\pm}(\sigma)$ являются граничными значениями функций $\overline{R}^{\pm}(\alpha)$ в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+it$, регулярных и не имеющих нулей, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях. При этом, $\overline{R}^{\pm}(\alpha)\to 1$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности [6].

Теперь, имея решение (2.18), при помощи (2.10) из (2.11), (2.12), после обратного преобразования, для амплитуд упругих перемещений в областях Ω_0 и Ω_1 получим следующие представления:

$$
\begin{gathered}
w_0(x,y)=A_N\cos\frac{\pi N}{h}(y-h)e^{i\gamma_N x}+ \\
+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}(\gamma_0 y)}{\gamma_0}\frac{\sqrt{\sigma+k_1}}{\overline{R}^{+}(\sigma)}\left[\frac{\sqrt{\mu_*}A_1^*}{\sigma+p_1+i0}-\frac{\sqrt{\mu_*}A_N^*}{\sigma+\gamma_N+i0}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma,\ (x,y)\in\Omega_0,
\end{gathered}
\tag{2.21}
$$

$$
\begin{gathered}
w_1(x,y)=A_1\cos(q_1 y)e^{ip_1 x}+ \\
+\frac{\mu_*}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma+k_1}}{\overline{R}^{+}(\sigma)}\frac{e^{-\gamma_1(y-h)}}{\gamma_1}\left[\frac{\sqrt{\mu_*}A_1^*}{\sigma+p_1+i0}-\frac{\sqrt{\mu_*}A_N^*}{\sigma+\gamma_N+i0}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma,\ (x,y)\in\Omega_1,
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

которые дают решение вышепоставленной задачи.

3. Анализ волнового поля в подобластях. Для полного изучения характерных особенностей волнового поля упругих перемещений в составном полупространстве, следует детально исследовать интегральные составляющие, входящие в решения (2.22), (2.23), в каждой подобласти Ω_0 и Ω_1 и, тем самым, получить конкретные формулы, определяющие волновые поля в этих областях.

Рассмотрим подобласть $\Omega_{01}(x<0;\ \ 0\le y\le h)$, где амплитуда перемещений даётся формулой (2.22). Для исследования интегрального составляющего из (2.22), как обычно, переходим в разрезанную вышеуказанным способом, комплексную плоскость и замыкаем контур интегрирования в верхней полуплоскости. Из представления [5]

$$
\frac{\operatorname{sh}\left[h\gamma_0(\alpha)\right]}{\gamma_0(\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\alpha^2-k_0^2\right)^{n+1}h^{2n+1}}{(2n+1)!}
\tag{3.1}
$$

следует, что подынтегральные функции в (2.21) имеют только простые полюса в точках

$$\alpha_m = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - (\pi m/h)^2}, & k_0 > \pi m/h \\ i\sqrt{(\pi m/h)^2 - k_0^2}, & k_0 < \pi m/h \end{cases} \qquad m = 0,1,2,.... \tag{3.2}$$

При этом, действительная ось вышеуказанным образом обходит, так точки ветвления функции $\gamma_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2}$ $(j = 0,1)$, так и нули функции (3.1), представляющие единственные полюса подынтегральных функций из (2.21).

Вычисляя интегралы, в итоге, для амплитуды перемещений $w_{01}(x,y)$ в области Ω_{01} получим:

$$w_{01}(x,y) = A_N \cos\frac{\pi N}{h}(y-h)e^{i\gamma_N x} + \tag{3.3}$$

$$+\frac{1}{1+\mu_*}\frac{\sqrt{k_0+k_1}e^{-ik_0x}}{2k_0h\overline{R}^+(k_0)}\left[\frac{A_1\sqrt{2k_1}\cos(\beta/2)}{\overline{R}^+(p_1)(k_0+p_1)} - \frac{A_N\sqrt{\gamma_N+k_1}}{\overline{R}^+(\gamma_N)(k_0+\gamma_N)}\right] + \frac{i}{2(1+\mu_*)}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\sqrt{\alpha_m+k_1}}{h\alpha_m\overline{R}^+(\alpha_m)}\left[\frac{A_1\sqrt{2k_1}\cos(\beta/2)}{\overline{R}^+(p_1)(\alpha_m+p_1)} - \frac{A_N\sqrt{\gamma_N+k_1}}{\overline{R}^+(\gamma_N)(\alpha_m+\gamma_N)}\right]\cos\left(\frac{\pi m}{h}y\right)e^{-i\alpha_m x}$$

При рассмотрении подобласти $\Omega_{02}(x > 0,\ 0 \le y \le h)$ для вычисления интегральной составляющей из (2.21), путь интегрирования в разрезанной комплексной плоскости следует замкнуть в нижней полуплоскости и перейти от ,+' функций к ,-' функциям. После этих преобразований и соответствующих вычислений, перемещение в Ω_{02} можно представить в виде

$$w_{02}(x,y) = -A_1 i\sin(q_1h)e^{iq_1(y-h)}e^{ip_1x} + C_A iq_1\cos(\chi y)e^{ip_1x} +$$

$$+\frac{\mu_*}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha_1\alpha_0\sin(\alpha_0h)\cos(\alpha_1y)\overline{R}_*^-(-it)}{[\mu_*\alpha_0\sin(\alpha_0h)]^2 + [\alpha_1\cos(\alpha_0h)]^2}\Big[A_N\frac{\sqrt{\gamma_K+k_1}}{(\gamma_N-i\tau)\overline{R}^+(\gamma_N)} -$$

$$-A_1\frac{\sqrt{2k_1}\cos(\varphi/2)}{(p_1-i\tau)\overline{R}^+(p_1)}\Bigg]e^{-\tau x}d\tau + \tag{3.4}$$

$$+\frac{\mu_*}{\pi}\int_0^{K_1}\frac{\beta_1\beta_0\sin(\beta_0h)\cos(\beta_0y)\overline{R}_*^-(-\sigma)}{[\mu_*\beta_0\sin(\beta_0h)]^2 + [\varphi\cos(\varphi_0h)]^2}\Big[A_N\frac{\sqrt{\gamma_K+k_1}}{(\gamma_N-\sigma)\overline{R}^+(\gamma_N)} -$$

$$-A_1\frac{\sqrt{2k_1}\cos(\beta_1/2)}{(p_1-\sigma)\overline{R}^+(p_1)}\Bigg]e^{i\sigma x}d\sigma + \Lambda_0(x,y), \qquad x > 0,\ 0 \le y \le h$$

где

$$\alpha_j=\sqrt{k_j^2+\tau^2},\ \beta_j=\sqrt{k_j^2-\sigma^2}\quad (j=0,1);\ \ \chi=\sqrt{k_0^2-p_1^2} \tag{3.5}$$

$$C_A=A_1\frac{\mu_*\chi\sin(\chi h)-iq_1\cos(\chi h)}{\left[\mu_*\alpha_0\sin(\alpha_0 h)\right]^2+\left[\alpha_0\cos(\alpha_0 h)\right]^2} \tag{3.6}$$

$$\Lambda_0(x,y)=\sum_{j=1}^{n}a_j\mu_1\sqrt{\sigma_j^2-k_1^2}\cos\left(\sqrt{k_0^2-\sigma_j^2}\,y\right)e^{i\sigma_j x} \tag{3.7}$$

$$a_j=\frac{\bar{R}^+(\sigma_j)}{\sqrt{\sigma_j+k_1}L_1'(-\sigma_j)}\left[\frac{\bar{A}_1}{p_1-\sigma_j}-\frac{\bar{A}_N}{\gamma_N-\sigma_j}\right] \tag{3.8}$$

$$\bar{A}_1=A_1e^{-iq_1h}\frac{\sqrt{2k_1}\cos(\varphi/2)}{\bar{R}^+p_1},\qquad \bar{A}_N=A_N\frac{\sqrt{\gamma_N+k_1}}{\bar{R}^+\gamma_N} \tag{3.9}$$

$L_1'(\sigma)=\partial L_1/\partial\sigma;\ L_1(\sigma)=\mu_0\gamma_0\mathrm{sh}(\gamma_0 h)+\mu_1\gamma_1\mathrm{ch}(\gamma_0 h);\ \sigma_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – положительные корни уравнения.

Функция $L_1(\sigma)$ из (3.9) имеет симметрично расположенные действительные корни $\pm\sigma_j$ при $k_1<\sigma<k_0$, а число этих корней и их расположение существенно зависит от параметра $h\sqrt{k_0^2-k_1^2}$ [11,14].

В подобластях области Ω_1, для амплитуд перемещений аналогичным путём получим:

в области $\Omega_{11}(x<0,y\ge h)$

$$\begin{aligned}w_{11}(x,y)&=A_1\left[\cos(q_1y)-i\sin(q_1h)e^{iq_1(y-h)}\right]e^{ip_1x}+\\&+\frac{\mu_*}{\pi i(1+\mu_*)}\int_0^\infty\frac{\sqrt{k_1+i\tau}\cos(\alpha_1(y-h))}{\alpha_1\bar{R}^+(i\tau)}\left[\frac{\bar{A}_1}{p_1+i\tau}-\frac{\bar{A}_N}{\gamma_N+i\tau}\right]e^{-\tau|x|}d\tau+\\&+\frac{\mu_*}{\pi i}\int_0^{k_1}\frac{\sqrt{k_1+\sigma}\cos(p_1(y-h))}{\beta_1\bar{R}^+(\sigma)}\left[\frac{\bar{A}_1}{p_1+\sigma}-\frac{\bar{A}_N}{\gamma_N+\sigma}\right]e^{i\sigma x}d\sigma,\end{aligned} \tag{3.10}$$

в области $\Omega_{12}(x>0,y\ge h)$

$$w_{12}(x,y)=A_1\left[\cos(q_1y)-i\sin(q_1h)e^{iq_1(y-h)}\right]e^{ip_1x}+C_A\mu_*\chi\sin(\chi h)e^{iq_1(y-h)}e^{ip_1x}-$$

$$-\frac{\mu_*}{\pi i}\int_0^\infty\frac{\alpha_0\sin(\alpha_0h)\left[\mu_*\alpha_0\sin(\alpha_0h)-\alpha_1\cos(\alpha_0h)\cos(2(y-h))\right]}{\left[\mu_*\alpha_0\sin(\alpha_0h)\right]^2+\left[\alpha_1\cos(\alpha_0h)\right]^2}\times$$

$$\times\overline{R}^{+}(i\tau)\left[\frac{\overline{A}_1}{p_1-i\tau}-\frac{\overline{A}_N}{\gamma_N-i_0}\right]e^{-\tau|x|}d\tau+$$

$$+\frac{i\mu_*}{\pi}\int_0^{K_1}\frac{\beta_0\sin(\beta_0 h)\left[\mu_*\beta_0\sin(\beta_0 h)\sin(\beta_1(y-h))-\beta_1\cos(\beta_1 h)\cos\beta_0(y-h)\right]}{\left[\mu_*\beta_0\sin(\beta_0 h)\right]^2+\left[\beta_1\cos(\beta_0 h)\right]^2}\times$$

$$\times\overline{R}_*^{+}(\sigma)\left[\frac{\overline{A}_1}{p_1-\sigma}-\frac{\overline{A}_N}{\gamma_N-\sigma}\right]e^{i\sigma x}d\sigma+\Lambda_1(x,y) \tag{3.11}$$

$$\Lambda_1(x,y)=-\sum_{j=1}^{n}a_j\mu_0\sqrt{k_0^2-\sigma_j^2}\,\sin\left(\sqrt{k_0^2-\sigma_j^2}h\right)e^{-\sqrt{\sigma_j^2-k_1^2}(y-h)}e^{i\sigma_j x}, \tag{3.12}$$

где a_j даётся формулой (3.8).

При помощи полученных решений нетрудно убедиться, что граничные и контактные условия (2.5) - (2.8) удовлетворяются точно.

В (3.4) и (3.12), составляющие $\Lambda_0(x,y)$ и $\Lambda_1(x,y)$ представляют собой излучённые волны с волновыми числами σ_j, распространяющиеся по несвободной части слоя, $\Lambda_1(x,y)$ – локализованные поверхностные волны Лява, распространяющиеся в подобласти Ω_{12}.

Перейдя к общей характеристике волнового поля, заметим, что формулами (3.3), (3.4), (3.10) и (3.12) в явном виде представлены все компоненты волнового поля с определёнными волновыми параметрами в каждой подобласти. При помощи этих формул, благодаря экспоненциально убывающим множителям в интегралах с бесконечными пределами с достаточной точностью можно определить волновое поле, как в ближней зоне, так и в дальних зонах при помощи асимптотических формул.

Из (3.2) видно, что в $\Omega_{10}(x<0,\ 0\le y\le h)$ помимо падающей волны распространяются отражённые от сечения $x=0$ волны и проходящие по тому же сечению излучённые волны с волновыми числами α_m. При этом, как следует из (3.2), из всех α_m лишь конечное число вещественно. Следовательно, в волноводе $x<0$ будет возбуждено конечное число дифрагированных, отражённых и проходящих-излучённых волн.

В подобласти $\Omega_{02}(x>0,\ 0\le y\le h)$ волновое поле представляется в виде суммы конечного числа локализованных волн $\Lambda_0(x,y)$, объёмных распространяющихся излучённых волн с волновыми числами $p_1=k_1\cos\varphi$, обусловленных падающей в полупространстве $y>h_1$ волной, и нераспространяющихся объёмных волн, которые в асимптотике $x\to\infty$ распространяются со скоростью c_1. Последнее указывает, что в асимптотике $x \to \infty$ полупространство как бы «диктует» собственную скорость распространения волн в слое.

В $\Omega_1\left(|x|<\infty,\ y>h\right)$, как следует из (3.10), (3.12), кроме падающей и отражённых распространяются также излученные дифрагированные объёмные волны и локализованные поверхностные волны Лява $\Lambda_1(x,y)$. Следуя [21], получены асимптотические формулы с вполне определёнными коэффициентами при первом члене разложения. Так, для точек $y=h+0$ берега трещины при $x\to-\infty$ имеем:

$$w_{11}\left(x,h+0\right)=\frac{\mu_*\left[\bar{R}^+(k_1)\right]^{-1}}{\sqrt{\pi}\left(1+\mu_*\right)}\left[\frac{A_1\left[\bar{R}^+(\mathrm{p}_1)\right]^{-1}}{\sqrt{2k_1}\cos\left(\varphi/2\right)}-\frac{A_0\left[\bar{R}^+(\gamma_N)\right]^{-1}}{\sqrt{\gamma_N+k_1}}\right]\frac{1}{\sqrt{|x|}}e^{-ik_1x}+$$

$$+\mathrm{O}(|x|^{-\frac{3}{2}}),\quad x\to-\infty$$

Аналогичная формула для контактного участка $y=h\pm0$ указывает, что дифрагированная объёмная волна убывает со скоростью $|x|^{-\frac{3}{2}}$ (как в слое), а не $|x|^{-\frac{1}{2}}$ (как в полупространстве).

4. Частный случай. Коротко остановимся на одном частном случае рассмотренной задачи. Принимая в её постановке $\mu_1=\infty$, придём к динамической задаче о направленном распространении плоских сдвиговых волн в слое-волноводе $\left\{-\infty<x,z<\infty; 0\le y\le h\right\}$ с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=0}=0;\qquad \theta(-x)\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h}+\theta(x)w_0(x,h)=0,\qquad |x|<\infty, \tag{4.1}$$

где $w_0(x,y)$ – амплитуда перемещений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Предполагая, как и выше, что по свободной части волновода набегает сдвиговая волна (2.1) – (2.2), по аналогичной процедуре из (2.21) для амплитуд перемещений в волноводе получим:

для $x<0$

$$\begin{aligned} w_{01}\left(x,y\right)&=w_{0N}\left(x,y\right)-A_N\left[\bar{K}_0^+(\gamma_N)\bar{K}_0^+(k_0)\right]^{-1}e^{-i\alpha_0x}-\\ &-A_N\frac{i(\gamma_N+k_0)}{2\bar{K}_0^+(\gamma_N)}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha_m+k_0)\cos(\frac{\pi m}{h}y)}{h\alpha_m\bar{K}_0^+(\alpha_m)(\alpha_m+\gamma_N)}e^{-i\alpha_mx}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

а для $x>0$

$$w_{02}(x,y)=A_N\frac{\pi h(\gamma_N+k_0)}{2\bar{K}_0^+(\gamma_N)}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m(2m-1)}{h^3\beta_m(k_0-\beta_m)}\frac{\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{h}y\right)}{\left[\bar{K}_0^+(\beta_m)\right]^{-1}(\gamma_N-\beta_m)}e^{i\beta_m x} \quad (4.3)$$

где $\beta_m=\sqrt{k_0^2-\left(\frac{\pi(2m-1)}{h}\right)^2}$, а α_m дается формулой (3.2).

Отметим, что при получении (4.2.) и (4.3) следует в (2.22) заменить

$$\bar{R}^+(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\sqrt{h}(\sigma+k_0)}\bar{K}_0^+(\sigma) \quad (4.4)$$

где [6]

$$\bar{K}_0(\sigma)=\gamma_0 h\,\mathrm{cth}(\gamma_0 h)=\bar{K}_0^+(\sigma)\bar{K}_0^-(\sigma) \quad (4.5)$$

$$\bar{K}_0^{\pm}(\sigma)=\sqrt{\frac{k_0 h\cos(k_0 h)}{\sin(k_0 h)}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\pm i\sigma h_0\left((n-1/2)^2-(k_0h_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{1\pm i\sigma h_0\left(n^2-(k_0h_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}\right),\qquad h_0=h/\pi$$

Здесь знаки берутся одновременно или верхние, или нижние. При этом имеет место асимптотическое представление при $\alpha\to\infty$ в верхней полуплоскости,

$$\bar{K}_0^+(k_0)=1-2ik_0\ln 2 \quad \text{при} \quad k_0\to 0. \quad (4.6)$$

Имея в виду, что из всевозможных α_m и β_m лишь конечное число вещественно при заданном k_0, из (4.2) и (4.3) можно определить число отражённых и проходящих волн и их волновые параметры в зависимости от параметров падающей волны.

Так, из (4.2) следует, что независимо от волнового числа падающей волны γ_N, от сечения $x=0$ в области $x<0$ распространяется отражённая волна с волновым числом K_0 и с амплитудой $A_N\left[\bar{K}_0^+(\gamma_N)\bar{K}_0^+(k_0)\right]^{-1}$.

Количество, волновые числа и амплитуды остальных распространяющихся отражённых и проходящих волн зависят от волновых параметров падающей волны. Если, например, $1{,}5\pi<k_0h<2\pi$, то число N может принимать значения $N=0,1,2,3,$ а из волновых чисел положительными будут только $k_0,\alpha_1,\beta_1,\beta_2$. Тогда, при каждой моде (N) для отражённых и проходящих волн получим [18]

N	Отраж.	Проход.
0	k_0, α_1	β_1
1	k_0, β_1	α_1
2	k_0, α_1	β_1
3	k_0, β_1, β_2	α_1

5. Заключение. Построено замкнутое решение динамической контактной задачи о распространении сдвиговых плоских волн в упругом полупространстве при излучении падающей волны из упругого слоя (волновода) в полупространство и в упругом слое при излучении падающей волны из упругого полупространства в волновод. Полученные для амплитуд упругих перемещений формулы содержат все волновые компоненты, определяющие весь спектр волнового поля. С другой стороны, полученные решения позволяют из сравнительного анализа волновых параметров падающей волны и возбуждаемых волн сделать определённые выводы о упругих характеристиках контактирующих массивных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 324 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный Мир, 1999. 274 с.
3. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. – М.: Физмат-лит. 2007. – 223 с.
4. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред. М.: Физмат-лит. 2006. 272с.
5. Сумбатян М.А., А. Скалия. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 328 с.
6. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 294 с.
7. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
8. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
9. Мелешко В.В., Бондаренко А.А. и др. Упругие волноводы. История и современность - I, II. Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.51. №2. С.86-104.
10. Мелешко В.В., Бондаренко А.А. и др. Упругие волноводы. История и современность – I, II. Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 4. С.163-180.
11. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т.56. № 4. С.3-17.
12. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство. Изв. НАН РА. Механика. Т. 60, № 3, 2007 с. 23-38.

13. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Дифракция сдвиговой плоской волны в составном упругом пространстве с полубесконечной трещиной, параллельной линии неоднородности. МТТ. № 1. 2013. С.60-67.
14. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны на крае полубесконечной трещины в составном упругом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67, № 4. С.10-20.
15. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача упругого волновода с прямоугольным поперечным сечением. Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.65. № 4. С.3-8.
16. Piliposyan D.G., Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary conditions. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2014. T.67. №3. C.40-48.
17. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Ampliyude-phase distortion of the normal high–frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics. 2017. Vol.70. №2. P.28-42.
18. Агаян К.Л. Плоская сдвиговая волна в слое с неоднородными граничными условиями. //Тр. IX Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», Горис, 1-6 октября, 2018, с.19-23.
19. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 452 с.
20. Шилов Г.Е. Математичекий анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 275с.
21. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. //Докл. НАН Армении. 2010. № 3. С.361-371.

<u>Сведения об авторе:</u>
Агаян Каро Леренцович – д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адреса: домашний: ул. Башинджагяна, 2, пер.12, кв.15, Ереван, 0087, Армения.
Служебный: пр. Маршала Баграмяна, 24/2, Ереван, 0019, Армения.
E-mail: karo.aghayan@gmail.com
Тел.: (37491) 485566 (моб.)

Поступила в редакцию 20.05.2020