ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №1, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.1.5

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ ПО ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Саркисян Л.С., Саркисян С.О.

Ключевые слова: градиентная теория, упругость, асимптотический метод, тонкой стержень, прикладная модель, растяжение-сжатие, изгиб.

Sargsyan L.S., Sargsyan S.H.

Asymptotic method of construction of an applied model of deformation of thin beams by the gradient theory of elasticity

Key words: gradient theory, elasticity, asymptotic method, thin beam, applied model, tension-compression, bending

In the present paper the plane problem of the gradient theory of elasticity in a thin rectangular region is considered. The asymptotic method is applied and an internal iterative process is constructed. Based on the results of the internal iterative process (respectively for the symmetric and inversely symmetric cases), the following is constructed: a) an applied model of the bending deformation of a thin beam according to the gradient theory of elasticity, b) an applied model of the compression tension of a beam according to the gradient theory of elasticity.

The constructed applied models of bending deformation and compression tension of thin neams according to the gradient theory of elasticity will be further used to solve specific boundary value problems.

Սարգսյան Լ.Ս., Սարգսյան Ս.Հ.

Առաձգականության գրադիենտային տեսությամբ բարակ ձողերի կիրառական մոդելների կառուցման ասիմպտոտիկ մեթոդը

Հիմնաբառեր: գրադիենտային առաձգականության տեսություն, ասիմպտոտիկ մեթոդ, բարակ ձողեր, կիրառական մոդել, ձգում-սեղմում, ծռում:

Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգականության գրադիենտային տեսության հարթ խնդիրը բարակ ուղղանկյուն տիրույթում: Կիրառվում է ասիմպտոտիկ մեթոդը և կառուցվում է ներքին իտերացիոն պրոցեսը: Ներքին իտերացիոն պրոցեսի հիման վրա (սիմետրիկ և հակասիմետրիկ դեպքերին համապատասխան) կառուցվում է ա) ըստ առաձգականության գրադիենտային տեսության բարակ ձողի ծռման դեֆորմացիայի կիրառական մոդելը, բ) ըստ առաձգականության գրադիենտային տեսության բարակ ձողի ձգման-սեղման դեֆորմացիայի մոդելը: Գրադիենտային առաձգականության տեսությամբ բարակ ձողերի ծռման և ձգման-սեղման դեֆորմացիաների մաթեմատիկական մոդելները հետագայում կիրառվելու են որոշակի եզրային խնդիրների լուծման համար:

В работе рассматривается плоская задача градиентной теории упругости в тонкой прямоугольной области. Применяется асимптотический метод и построен внутренний итерационный процесс. На основе результатов внутреннего итерационного процесса (соответственно, для симметричного и антисимметричного случаев), построена: а) прикладная модель изгибной деформации тонкого стержня по градиентной теории упругости, б) прикладная модель растяжения-сжатия стержня по градиентной теории упругости.Построенные прикладные модели изгибной деформации и растяжения сжатий тонких стержней по градиентной теории упругости в дальнейшем будут использованы для решения конкретных краевых задач.

1. Введение. Известно, что модель классической упругости не может учесть микроструктуру материала и масштабный эффект. Микроструктуру материала и масштабный эффект учитываются как в моментной теории упругости, так и в градиентной теории упругости.

Известны две основные формулировки градиентной теории упругости. Первая, это модель Эрингена (Eringen) [1], которая из себя представляет формулировку модели интегрального типа на основе нелокальной теории упругости. Вторая модель, это модель Айфантиса (Aifantis) [2-4], в которой в определяющих соотношениях напряжения зависят от деформаций и от второго градиента деформаций.

В данной статье будет рассмотрена модель Айфантиса.

Система основных уравнений трехмерной градиентной теории упругости для изотропного материала представляет собой [2-4]:

Соотношения упругости

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - l^2\varepsilon_{kl,mm}\right), \tag{1.1}$$

где σ_{ij} – напряжения, зависящие от деформаций ε_{kl} и второго градиента деформаций, D_{ijkl} – тензор упругих коэффициентов четвёртого ранга классической теории упругости, l – параметр внутренней длины, связанный с размерами микроструктуры материала.

Уравнения (1), как в классической теории упругости, решается совместно с уравнениями равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{1.2}$$

а связь между деформациями и перемещениями записывается в виде классических геометрических соотношений Коши:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right). \tag{1.3}$$

Отметим, что все индексы в уравнениях (1.1)-(1.3) принимают значения 1,2,3, а по повторяющимся индексам имеем суммирование, запятой обозначено дифференцирование по соответствующей координате. Отметим, что при $l = 0$, уравнения (1.1)-(1.3) переходят к уравнениям классической теории упругости.

Асимптотический метод построения упругих тонких стержней, пластин и оболочек по классической теории упругости развит в работах К.О. Фридрихса [5], А.Е. Грина [6], А.Л. Голденвейзера [7], И.И. Воровича [8], В. Л. Бердичевского [9], Л.А.Агаловяна [10,11], Ю.Д. Каплунова [12] и др., в магнитоупругости и в моментной теории упругости – в работах С.О.Саркисяна [13-17].

В данной работе используется вариант асимптотического метода, применяемого в работах [7,10, 11, 13-17] и на основе системы уравнений в тонкой прямоугольной области плоского напряжённого состояния градиентной теории упругости, выведены основные уравнения прикладной модели для деформаций растяжения-сжатия и изгиба тонкого стержня.

2. Асимптотический метод построения внутреннего итерационного процесса в тонкой прямоугольной области плоского напряжённого состояния градиентной теории упругости.

Уравнения (1.1)-(1.3) представляют собой основные уравнения пространственной задачи градиентной теории упругости. Основные уравнения плоского напряжённого состояния градиентной теории упругости в области прямоугольника $0 \le x_1 \le a$, $-h \le x_2 \le h$ представляют собой:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}=0, \tag{2.1}$$

Физические соотношения упругости

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)\left[\mathrm{e}_{11}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}\right)\right]+\lambda\left[\mathrm{e}_{22}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)\right],\\
\sigma_{22}=(\lambda+2\mu)\left[\varepsilon_{22}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)\right]+\lambda\left[\mathrm{e}_{11}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}\right)\right],\\
\sigma_{12}=\sigma_{21}=2\mu\left[\mathrm{e}_{12}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial y^2}\right)\right],
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Геометрические соотношения

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x},\qquad e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial y},\qquad e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right). \tag{2.3}$$

Здесь, $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}=\sigma_{21}$ – напряжения, $e_{11},e_{22},e_{12}=e_{21}$ – деформации, u_1 и u_2 – перемещения, λ,μ – упругие постоянные Ламе, l – параметр, который имеет размерность длины, характеризует внутреннюю микроструктуру материала.

Будем считать, что на лицевых линиях прямоугольника $y=\pm h$ заданы граничные условия первой граничной задачи градиентной теории упругости, а на краевых кромках прямоугольника $x=0,\quad x=a$ заданы граничные условия либо I-го, либо II-го, либо смешанного варианта граничных условий градиентной теории упругости.

Считая прямоугольник тонким ($\varepsilon=\frac{h}{a}<<1$ малый геометрический параметр задачи), осуществим изменеие масштабов:

$$\xi=\frac{x}{a},\quad \zeta=\frac{y}{h} \tag{2.4}$$

и введём безразмерные величины:

$$\overline{\sigma}_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E},\qquad \overline{\sigma}_{22}=\frac{\sigma_{22}}{E},\qquad \overline{\sigma}_{12}=\overline{\sigma}_{21}=\frac{\sigma_{12}}{E},\qquad \overline{u}_1=\frac{u_1}{a},\qquad \overline{u}_2=\frac{u_2}{a}. \tag{2.5}$$

После введения безразмерных величин, система уравнений (2.1)-(2.3) примет вид:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\overline{\sigma}_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\overline{\sigma}_{12}}{\partial\zeta}=0,\ \frac{\partial\overline{\sigma}_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\overline{\sigma}_{22}}{\partial\zeta}=0, \tag{2.6}$$

Физические соотношения упругости

$$\overline{\sigma}_{11}=\left(\frac{\lambda+2\mu}{E}e_{11}+\frac{\lambda}{E}e_{22}\right)-\frac{\lambda+2\mu}{E}\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial\zeta^2}\right)-\frac{\lambda l^2}{Ea^2}\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial\zeta^2}\right),$$

$$\overline{\sigma}_{22}=\left(\frac{\lambda+2\mu}{E}e_{22}+\frac{\lambda}{E}e_{11}\right)-\frac{\lambda+2\mu}{E}\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial\zeta^2}\right)-$$
$$-\frac{\lambda}{E}\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial\zeta^2}\right), \tag{2.7}$$
$$\overline{\sigma}_{12}=\overline{\sigma}_{21}=\frac{2\mu}{E}\left[e_{12}-\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial\zeta^2}\right)\right],$$

Геометрические соотношения

$$e_{11}=\frac{\partial\overline{u}_1}{\partial\xi},\qquad e_{22}=\varepsilon^{-1}\frac{\partial\overline{u}_2}{\partial\zeta},\qquad e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}_2}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}\right). \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.6)-(2.8), сингулярно возмущённая с малым параметром ε, следовательно, решение этой системы складывается из двух типов решений: внутреннего (основного), т.е. незатухающего при удалении от границы в глубь области, и типа погранслоя. Решение каждой из этих задач есть сумма решений по ζ (или по y) симметричной (растяжение-сжатие) и антисимметричной (изгиб) задач. В симметричной задаче $u_1,\sigma_{11},\sigma_{22}-$чётные, а $u_2,\sigma_{12}=\sigma_{21}-$нечётные по ζ функции, в антисимметричной задаче, – наоборот.

Нас будет интересовать построение прикладных моделей стержня по градиентной теории упругости при деформациях: а) растяжения-сжатия, б) изгибе. Следовательно, в каждом случае будем строить и изучать внутренний итерационный процесс.

Для безразмерного геометрического малого параметра внутренней микроструктуры материала $\frac{l^2}{a^2}$ примем представление

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2=\varepsilon^2 l_*^2, \tag{2.9}$$

где считается, что порядок $l_*\sim 1$.

Внутреннее решение ищем в виде

$$Q=\varepsilon^{-q}\sum_{s=0}^{s}\varepsilon^s Q^{(s)}. \tag{2.10}$$

Здесь под Q подразумевается любое из напряжений, деформаций и перемещений, $q-$целое число, различное для различных отмеченных величин. Целое число q подбирается так, чтобы после подстановки (2.10) в уравнения (2.6)-(2.8) градиентной теории упругости и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях s, получить рекуррентную (итерационную) систему относительно $Q^{(S)}$.

Для $\left(\overline{\sigma}_{11}\text{ и }\overline{u}_1\right),\overline{\sigma}_{12}=\overline{\sigma}_{21},\overline{\sigma}_{22}$ соответственно, имеем $q=2,1,0,$ а для $\overline{u}_2-q=1$ в симметричной и $q=3$ – в антисимметричных задачах.

В результате получим следующую систему уравнений:

а) антисимметричная задача

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(S)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(S)}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{12}^{(S)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(S)}}{\partial\zeta}=0, \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} e_{22}^{(s)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial\zeta^2}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}e_{11}^{(s-2)}+l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s-4)}}{\partial\xi^2}+ \\ +\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial\zeta^2}+\frac{E}{\lambda+2\mu}\sigma_{22}^{(s-4)}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$e_{12}^{(s)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(s)}}{\partial\zeta^2}=l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}+\frac{E}{2\mu}\sigma_{12}^{(s-2)}, \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{11}^{(s-2)}=\frac{\lambda}{E}\left(e_{22}^{(s)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial\xi^2}\right)+\frac{\lambda+2\mu}{E}\left(e_{11}^{(s-2)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}\right)- \\ -\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}-\frac{\lambda+2\mu}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s-4)}}{\partial\xi^2}, \end{gathered} \tag{2.14}$$

$$e_{11}^{(s)}=\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\xi},\qquad e_{22}^{(s)}=\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial\zeta},\qquad e_{12}^{(s)}=\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\zeta}, \tag{2.15}$$

б) симметричная задача

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(S)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(S)}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{12}^{(S)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(S)}}{\partial\zeta}=0, \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{11}^{(s)}=\frac{\lambda+2\mu}{E}e_{11}^{(s)}+\frac{\lambda}{E}e_{22}^{(s)}-\frac{\lambda+2\mu}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}-\frac{\lambda+2\mu}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s)}}{\partial\zeta^2}- \\ -\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}-\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial\zeta^2}, \end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{22}^{(s-2)}=\frac{\lambda+2\mu}{E}\left(e_{22}^{(s)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial\zeta^2}\right)+\frac{\lambda}{E}\left(e_{11}^{(s)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s)}}{\partial\zeta^2}\right)- \\ -\frac{\lambda+2\mu}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}-\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}, \end{gathered} \tag{2.18}$$

$$e_{12}^{(s)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(s)}}{\partial\zeta^2}=\frac{E}{2\mu}\sigma_{12}^{(s-2)}+l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(s-2)}}{\partial\xi^2},$$

из этого последнего уравнения получим

$$\sigma_{12}^{(s-2)}=\frac{2\mu}{E}\left(e_{12}^{(s)}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(s-2)}}{\partial\xi^2}\right), \tag{2.19}$$

а также

$$e_{11}^{(s)} = \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \xi}, \qquad e_{22}^{(s)} = \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \zeta}, \qquad e_{12}^{(s)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \zeta} \right). \tag{2.20}$$

Следует отметить, что приближения $s=1$ аналогично приближению $s=0$, а приближение $s=3$ аналогично приближению $s=2$ и т.д. Для построения прикладной модели изгиба и растяжения-сжатия по градиентной теории упругости используем приближения $s=0$ и $s=2$, и в итоге, их сумма.

3. Прикладная модель изгибной деформации стержня по градиентной теории упругости.

Из формул (2.12), (2.13) и (2.14) имеем:

$$e_{22}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{E}\left(e_{22}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\lambda}{E} e_{11}^{(0)} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\lambda+2\mu}{E}\left(e_{22}^{(4)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(4)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda}{E} e_{11}^{(2)} - \frac{\lambda+2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial \zeta^2} = \sigma_{22}^{(0)}, \tag{3.3}$$

$$e_{12}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{2\mu}{E}\left[\left(e_{12}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(0)}}{\partial \xi^2} \right] = \sigma_{12}^{(0)}, \tag{3.5}$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \frac{\lambda}{E}\left(e_{22}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{E}\left(e_{11}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \xi^2}, \tag{3.6}$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = \frac{\lambda}{E}\left(e_{22}^{(4)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(4)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{E}\left(e_{11}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \xi^2}. \tag{3.7}$$

На основе уравнений (3.1), (3.4) будем иметь (в дальнейшем построим такие решения, в которых возможна подстановка $l=0$, т.е. случай перехода к классической теории):

$$e_{22}^{(0)} = 0, \quad e_{12}^{(0)} = 0. \tag{3.8}$$

Используя уравнения (2.15), при $s=0$ получим:

$$u_2^{(0)} = \overset{0\,(0)}{u_2}(\xi), \qquad u_1^{(0)} = \overset{1\,(0)}{u_1}(\xi)\zeta, \qquad \overset{1\,(0)}{u_1} = -\frac{d\overset{0\,(0)}{u_2}(\xi)}{d\xi}, \tag{3.9}$$

$$e_{11}^{(0)} = \overset{1(0)}{e}_{11}(\xi)\zeta, \qquad \overset{1(0)}{e}_{11}(\xi) = \frac{d\overset{1(0)}{u}_1(\xi)}{d\xi} = -\frac{d^2\overset{0(0)}{u}_2(\xi)}{d\xi^2}. \tag{3.10}$$

Используя (3.8)-(3.10), уравнение (3.2) и выражение (3.6) примут вид:

$$e_{22}^{(0)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial\zeta^2} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{1(0)}{e}_{11}(\xi)\zeta, \tag{3.11}$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \overset{1(0)}{\sigma}_{11}(\xi)\zeta, \qquad \overset{1(0)}{\sigma}_{11}(\xi) = \frac{1}{1-\nu^2}\overset{1(0)}{e}_{11}(\xi). \tag{3.12}$$

Из уравнений равновесия (2.11), при $s = 0$ получим:

$$\sigma_{12}^{(0)} = \overset{2(0)}{\sigma}_{12}(\xi)\zeta^2 + \overset{0(0)}{\sigma}_{12}(\xi), \qquad \overset{2(0)}{\sigma}_{12}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{d\overset{1(0)}{\sigma}_{11}(\xi)}{d\xi}, \tag{3.13}$$

$$\sigma_{22}^{(0)} = \overset{3(0)}{\sigma}_{22}(\xi)\zeta^3 + \overset{1(0)}{\sigma}_{22}(\xi)\zeta, \; \overset{3(0)}{\sigma}_{22}(\xi) = -\frac{1}{3}\frac{d\overset{2(0)}{\sigma}_{12}(\xi)}{d\xi}, \; \overset{1(0)}{\sigma}_{22}(\xi) = -\frac{d\overset{0(0)}{\sigma}_{12}(\xi)}{d\xi}. \tag{3.14}$$

С учётом формулы $\sigma_{12}^{(0)}$ (3.13), уравнение (3.5) примет вид:

$$e_{12}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{\partial\zeta^2} = \frac{E}{2\mu}(\overset{2(0)}{\sigma}_{12}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(0)}{\sigma}_{12}(\xi)). \tag{3.15}$$

Решение уравнений (3.11) и (3.15) примем соответственно в виде:

$$e_{22}^{(2)} = \overset{1(2)}{e}_{22}(\xi)\cdot\zeta, \tag{3.16}$$

$$e_{12}^{(2)} = \overset{2(2)}{e}_{12}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(2)}{e}_{12}(\xi), \tag{3.17}$$

тогда будем иметь

$$\overset{1(2)}{e}_{22}(\xi) = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{1(0)}{e}_{11}(\xi), \tag{3.18}$$

$$\overset{2(2)}{e}_{12}(\xi) = \frac{E}{2\mu}\overset{2(0)}{\sigma}_{12}(\xi), \qquad \overset{0(2)}{e}_{12}(\xi) = \frac{E}{2\mu}\left(\overset{0(0)}{\sigma}_{12}(\xi) + \frac{E}{\mu}l_*^2\cdot\overset{2(0)}{\sigma}_{12}(\xi)\right). \tag{3.19}$$

Если снова обратиться к уравнениям (2.15), но, на этот раз, при $s = 2$, получим:

$$u_2^{(2)} = \overset{2(2)}{u}_2(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(2)}{u}_2(\xi), \qquad \overset{2(2)}{u}_2(\xi) = \frac{1}{2}\overset{1(2)}{e}_{22}(\xi), \tag{3.20}$$

$$u_1^{(2)} = \overset{3(2)}{u}_1(\xi)\cdot\zeta^3 + \overset{1(2)}{u}_1(\xi)\cdot\zeta, \qquad \overset{3(2)}{u}_1(\xi) = \frac{1}{3}\left(\overset{2(2)}{e}_{12}(\xi) - \frac{d\overset{2(2)}{u}_2(\xi)}{d\xi}\right),$$

$$\overset{1\,(2)}{u_1}(\xi)=\overset{0(2)}{e_{12}}(\xi)-\frac{d\overset{0\,(2)}{u_2}}{d\xi}, \tag{3.21}$$

$$e_{11}^{(2)}(\xi)=\overset{3(2)}{e_{11}}(\xi)\cdot\zeta^3+\overset{1(2)}{e_{11}}(\xi)\cdot\zeta,\quad \overset{3(2)}{e_{11}}(\xi)=\frac{d\overset{3\,(2)}{u_1}(\xi)}{d\xi},\quad \overset{1(2)}{e_{11}}(\xi)=\frac{d\overset{1\,(2)}{u_1}(\xi)}{d\xi}. \tag{3.22}$$

Теперь, обратимся к уравнению (2.12), при $s=4$, будем иметь:

$$e_{22}^{(4)}(\xi)-l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(4)}}{\partial\zeta^2}=\frac{E}{\lambda+2\mu}\left[\sigma_{22}^{(0)}-\frac{\lambda}{E}e_{11}^{(2)}+\frac{\lambda+2\mu}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial\xi^2}+\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial\xi^2}+\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial\zeta^2}\right].$$

Подставляя в (2.14), при $s=4$ для $\sigma_{11}^{(2)}$ получим:

$$\sigma_{11}^{(2)}=\overset{3\,(2)}{\sigma_{11}}(\xi)\cdot\zeta^3+\overset{1\,(2)}{\sigma_{11}}(\xi)\cdot\zeta, \tag{3.23}$$

где $\overset{3\,(2)}{\sigma_{11}}(\xi)=\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{3\,(0)}{\sigma_{22}}(\xi)+\dfrac{1}{1-\nu^2}\overset{3(2)}{e_{11}}(\xi),$ (3.24)

$$\overset{1\,(2)}{\sigma_{11}}(\xi)=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{1\,(0)}{\sigma_{22}}(\xi)+\frac{1}{1-\nu^2}\left(\overset{1(2)}{e_{11}}(\xi)-6l_*^2\cdot\overset{3(2)}{e_{11}}(\xi)-l_*^2\frac{d^2\overset{1\,(0)}{e_{11}}(\xi)}{d\xi^2}\right). \tag{3.25}$$

Как отметили выше, для построения прикладной модели изгиба тонкого стержня по градиентной теории упругости используем сумму приближений $s=0$ и $s=2$. Поступая так, для напряжения σ_{11} будем иметь:

$$\sigma_{11}=E\varepsilon^{-2}\cdot(\sigma_{11}^{(0)}+\varepsilon^2\cdot\sigma_{11}^{(2)}), \tag{3.26}$$

где $\sigma_{11}^{(0)}$ определяется формулой (3.6), а $\sigma_{11}^{(2)}$ – формулой (3.23).

Из уравнения равновесия (2.11)₁, при $s=0$ получим

$$\frac{2}{3}\frac{d\overset{1\,(0)}{\sigma_{11}}}{d\xi}+\left(\sigma_{12}^{(0)}\cdot\zeta\right)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\sigma_{12}^{(0)}d\zeta=0, \tag{3.27}$$

здесь

$$Q^{(0)}=\int_{-1}^{1}\sigma_{12}^{(0)}d\zeta \tag{3.28}$$

– перерезывающая сила в исходном асимптотическом приближении.

Используя граничные условия для $\sigma_{12}^{(0)}$ на лицевых линиях, будем иметь

$$\left(\sigma_{12}^{(0)}\cdot\zeta\right)\Big|_{-1}^{1}=\sigma_{12}^{(0)}\Big|_{\zeta=1}+\sigma_{12}^{(0)}\Big|_{\zeta=-1}=\frac{1}{2}q_1^{(0)+}+\frac{1}{2}q_1^{(0)-}.$$

Т.к. при изгибе $q_1^{(0)-}=+q_1^{(0)+}$, получим

$$\left(\sigma_{12}^{(0)}\cdot\zeta\right)\Big|_{-1}^{1}=q_1^{(0)+}, \tag{3.29}$$

где $q_1^{(0)+} = \dfrac{q_1}{E \cdot \varepsilon^{-1}}$. (3.30)

Таким образом, уравнение (3.27) с учётом (3.28) примет вид:

$$\frac{dM_{11}^{(0)}}{d\xi} + Q^{(0)} = q_1^{(0)+}, \tag{3.31}$$

где $M_{11}^{(0)} = -\int\limits_{-1}^{1} \sigma_{11}^{(0)} \cdot \zeta d\zeta$ (3.32)

– изгибающий момент в исходном асимптотическом приближении.

Используя второе уравнение равновесия (2.11), при $s = 0$ получим

$$\frac{dQ^{(0)}}{d\xi} + \sigma_{22}^{(0)}\Big|_{-1}^{1} = 0. \tag{3.33}$$

С учётом граничных условий для $\sigma_{22}^{(0)}$ на лицевых линиях $\zeta = \pm 1$, будем иметь

$$\sigma_{22}^{(0)}\Big|_{-1}^{1} = \sigma_{22}^{(0)+} - \sigma_{22}^{(0)-}, \tag{3.34}$$

т.к. при изгибе

$$\sigma_{22}^{(0)-} = -\sigma_{22}^{(0)+}, \tag{3.35}$$

где $\sigma_{22}^{(0)+} = \dfrac{1}{2} q_2^{(0)+}, \quad q_2^{(0)+} = \dfrac{q_2}{E}$, (3.36)

тогда, имея ввиду (3.34)-(3.36), уравнение (3.33) можем записать так:

$$\frac{dQ^{(0)}}{d\xi} = -q_2^{(0)+}. \tag{3.37}$$

Аналогичным образом из уравнений равновесия (2.11), при $s = 2$, получим уравнения типа (3.31) и (3.37):

$$\frac{dM_{11}^{(2)}}{d\xi} + Q^{(2)} = q_1^{(2)+}, \tag{3.38}$$

$$\frac{dQ^{(2)}}{d\xi} = -q_2^{(2)+}, \tag{3.39}$$

где $Q^{(2)} = \int\limits_{-1}^{1} \sigma_{12}^{(2)} d\zeta, \quad M_{11}^{(2)} = -\int\limits_{-1}^{1} \sigma_{11}^{(2)} \cdot \zeta d\zeta.$ (3.40)

Объединяя уравнения (3.31), (3.38) и (3.37), (3.39), в размерном виде получим уравнения равновесия для прикладной модели изгибной деформации тонкого стержня по градиентной теории упругости (которые идентичны уравнениям равновесия изгибной деформации тонкого стержня по классической теории упругости):

$$\frac{dM_{11}}{dx} + Q = h \cdot q_1, \quad \frac{dQ}{dx} = -q_{2.} \tag{3.41}$$

Исключая из этой системы перерезывающую силу Q, приходим к следующему известному уравнению равновесия относительно изгибающего момента M_{11}:

$$\frac{d^2M_{11}}{dx^2}=q_2+h\cdot\frac{dq_1}{dx}. \tag{3.42}$$

Для перемещений на отмеченном выше приближении будем иметь

$$u_2=a\cdot\varepsilon^{-3}\cdot(\overset{0}{u}{}_2^{(0)}+\varepsilon^2u_2^{(2)}),\quad w(x)=u_2(y=0)=a\cdot\varepsilon^{-3}\left(\overset{0}{u}{}_2^{(0)}+\varepsilon^2\overset{0}{u}{}_2^{(2)}\right), \tag{3.43}$$

$$u_1=a\cdot\varepsilon^{-2}\cdot(u_1^{(0)}+\varepsilon^2u_1^{(2)}).$$

В размерном виде для перемещений получим выражения

$$u_1=\psi_1(x)\cdot y+\frac{1}{3}\psi_2(x)\cdot y^3,\;\; u_2=w(x)+\frac{1}{2}\psi_3(x)\cdot y^2, \tag{3.44}$$

где

$$\psi_3(x)=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{d^2w}{dx^2},\;\psi_1(x)=-\frac{dw}{dx},\;\psi_2(x)=-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{d^3w}{dx^3}=-\frac{1}{2}\frac{d\psi_3}{dx}, \tag{3.45}$$

w – прогиб стержня при изгибе.

Отметим, что функция $\psi_3(x)$ определяет обжатие стержня e_{22}:

$$e_{22}=\psi_3(x)\cdot y=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{d^2w}{dx^2}\cdot y. \tag{3.46}$$

Для сдвиговой деформации $e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$ имеем выражение

$$e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_1\right)+\frac{1}{2}\left(\psi_2+\frac{1}{2}\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right)y^2. \tag{3.47}$$

На уровне оси стержня $(y=0)$ сдвиговая деформация будет:

$$\gamma=e_{12}\big|_{y=0}=e_{21}\big|_{y=0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_1\right). \tag{3.48}$$

Приведём также выражения для относительной продольной деформации e_{11}:

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x}\cdot y+\frac{1}{3}\frac{\partial\psi_2(x)}{\partial x}\cdot y^3. \tag{3.49}$$

Как убедимся, перемещения (а также обжатие, сдвиговая деформация) в прикладной модели изгиба стержня по градиентной теории упругости выражаются через прогибную функцию $w=w(x)$.

Изгибающий момент M_{11} выражается так:

$$M_{11}=-\int_{-h}^{h}\sigma_{11}\cdot ydy=-h^2\int_{-1}^{1}\sigma_{11}\cdot\zeta d\zeta=-Eh^2\cdot\varepsilon^{-2}\int_{-1}^{1}\overline{\sigma}_{11}\cdot\zeta d\zeta=$$

$$=-Eh^2\cdot\varepsilon^{-2}\int_{-1}^{1}\left(\sigma_{11}^{(0)}+\varepsilon^2\sigma_{11}^{(2)}\right)\cdot\zeta d\zeta. \tag{3.50}$$

Здесь $\sigma_{11}^{(0)}$ выражается формулой (3.12), а $\sigma_{11}^{(2)}$ – формулой (3.23) с учётом (3.24) и (3.25).

Ниже приведём некоторые формулы, которые при вычислении M_{11} будут использованы:

$$\overset{3\,(0)}{\sigma}_{22} = \frac{1}{6}\frac{d^2 \overset{1\,(0)}{\sigma}_{11}(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{d^2 \overset{1\,(0)}{e}_{11}(\xi)}{d\xi^2}, \quad \overset{3\,(2)}{e}_{11} = -\frac{1}{6}\frac{d^2 \overset{1\,(0)}{e}_{11}}{d\xi^2},$$

$$\overset{1\,(0)}{\sigma}_{22}(\xi) = q_2^{(0)} - \overset{3\,(0)}{\sigma}_{22}(\xi) = q_2^{(0)} - \frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{d^2 \overset{1\,(0)}{e}_{11}(\xi)}{d\xi^2}, \quad q_2^{(0)} = \frac{q_2}{E}. \tag{3.51}$$

В результате, для изгибающего момента M_{11} будем иметь:

$$M_{11} = -D\left[K_{11} + \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{12+\nu}{30}h^2 - l^2\right)\frac{d^2 K_{11}}{dx^2}\right] - \frac{2h^3}{3(1-\nu)}\frac{dq_1}{dx} - \frac{2\nu}{3(1-\nu)}h^2 \cdot q_2, \tag{3.52}$$

где

$$K_{11} = -\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{3.53}$$

представляет кривизну оси стержня при изгибной деформации.

Уравнения равновесия (3.41) (либо уравнение (3.42)), соотношение упругости (3.52) и геометрическое соотношение (3.53) определяют модель изгибной деформации тонкого стержня по градиентной теории упругости.

4. Прикладная модель растяжения-сжатия стержня по градиентной теории упругости.

Теперь рассмотрим систему уравнений, симметричную по y (по ζ) задачи в итерациях: (2.16)-(2.20).

Из уравнений (2.19) при $s = 0$ получим

$$e_{12}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \tag{4.1}$$

откуда будет следовать следующее равенство:

$$e_{12}^{(0)} = 0. \tag{4.2}$$

Из уравнения $(2.20)_3$ при $s = 0$ с учётом (4.2) будем иметь:

$$e_{12}^{(0)} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \zeta} = 0.$$

В результате получим

$$u_1^{(0)} = \overset{0\,(0)}{u}_1(\xi). \tag{4.3}$$

Рассмотрим уравнение (2.18) при $s = 0$:

$$\frac{\lambda+2\mu}{E}\left(e_{22}^{(0)}-l_*^2\cdot\frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial\zeta^2}\right)+\frac{\lambda}{E}\left(e_{11}^{(0)}-l_*^2\cdot\frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial\zeta^2}\right)=0. \qquad (4.4)$$

Из уравнения $(2.20)_1$ с учётом формулы (4.3) получим:

$$e_{11}^{(0)}=\overset{0\,(0)}{e}_{11}=\frac{d\overset{0\,(0)}{u}_1(\xi)}{d\xi}. \qquad (4.5)$$

Имея ввиду (4.5), уравнение (4.4) примет вид:

$$\frac{\lambda+2\mu}{E}\left(e_{22}^{(0)}-l_*^2\cdot\frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial\zeta^2}\right)=-\frac{\lambda}{E}\overset{0\,(0)}{e}_{11}(\xi). \qquad (4.6)$$

Решение уравнения (4.6) ищем в виде

$$e_{22}^{(0)}=\overset{0\,(0)}{e}_{22}(\xi). \qquad (4.7)$$

В результате будем иметь:

$$e_{22}^{(0)}=\overset{0\,(0)}{e}_{22}(\xi)=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{0\,(0)}{e}_{11}(\xi). \qquad (4.8)$$

Рассмотрим уравнение $(2.20)_2$ при $s=0$

$$e_{22}^{(0)}=\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\zeta},$$

тогда с учётом (4.8) приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\zeta}=\overset{0\,(0)}{e}_{22}(\xi)=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{0\,(0)}{e}_{11}(\xi),$$

откуда получим

$$u_2^{(0)}=\overset{1\,(0)}{u}_2(\xi)\cdot\zeta,\qquad \overset{1\,(0)}{u}_2=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{0\,(0)}{e}_{11}(\xi). \qquad (4.9)$$

Теперь, при $s=0$ из уравнения (2.17) с учётом (4.8), для $\sigma_{11}^{(0)}$ приходим к следующей формуле:

$$\sigma_{11}^{(0)}=\overset{0\,(0)}{\sigma}_{11}(\xi)=\frac{1}{1-\nu^2}\overset{0\,(0)}{e}_{11}(\xi) \qquad (4.10)$$

Рассмотрим уравнение равновесия $(2.16)_1$ при $s=0$, тогда, с учётом (4.10) будем иметь:

$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(0)}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial\sigma_{11}^{(0)}}{\partial\xi}=-\frac{\partial\overset{0\,(0)}{\sigma}_{11}(\xi)}{\partial\xi}.$$

В результате получим:

$$\sigma_{12}^{(0)}=\overset{1\,(0)}{\sigma}_{12}(\xi)\cdot\zeta, \qquad (4.11)$$

где $\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi) = -\dfrac{d\overset{0}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi}$. (4.12)

Рассматривая уравнение равновесия $(2.16)_2$, с учётом (4.11), для $\sigma_{22}^{(0)}$ приходим к следующей формуле:

$$\sigma_{22}^{(0)} = \overset{2}{\sigma}{}_{22}^{(0)}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0}{\sigma}{}_{22}^{(0)}(\xi), \tag{4.13}$$

где $\overset{2}{\sigma}{}_{22}^{(0)}(\xi) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi)}{d\xi}$. (4.14)

Теперь рассмотрим уравнения (2.18) и (2.17), при $s = 0$ с учётом (4.5) и (4.7) будем иметь:

$$\sigma_{22}^{(0)} = \frac{\lambda+2\mu}{E}\left(e_{22}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial\zeta^2}\right) + \frac{\lambda}{E}\left(e_{11}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial\zeta^2}\right) - \frac{\lambda+2\mu}{E}l_*^2\frac{d^2\overset{0}{e}{}_{22}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2} -$$

$$-\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{d^2\overset{0}{e}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2}, \tag{4.15}$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = \frac{\lambda+2\mu}{E}\left(e_{11}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial\zeta^2}\right) + \frac{\lambda}{E}\left(e_{22}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial\zeta^2}\right) - \frac{\lambda+2\mu}{E}l_*^2\frac{d^2\overset{0}{e}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2} -$$

$$-\frac{\lambda}{E}l_*^2\frac{d^2\overset{0}{e}{}_{22}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2}, \tag{4.16}$$

Рассмотрим также уравнение (2.19), при $s = 2$ получим

$$e_{12}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{d\zeta^2} = \frac{E}{2\mu}\sigma_{12}^{(0)},$$

с учётом (4.11), для определения $e_{12}^{(2)}$ приходим к решению следующего уравнения:

$$e_{12}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{d\zeta^2} = \frac{E}{2\mu}\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi)\cdot\zeta, \tag{4.17}$$

Решение уравнения (4.17) ищем в виде

$$e_{12}^{(2)} = \overset{1}{e}{}_{12}^{(2)}(\xi)\cdot\zeta, \tag{4.18}$$

будем иметь:

$$\overset{1}{e}{}_{12}^{(2)} = \frac{E}{2\mu}\cdot\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi). \tag{4.19}$$

При $s = 2$ из уравнения $(2.20)_3$, с учётом (4.18) и (4.9), будем иметь:

$$u_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2\overset{1(2)}{\sigma}_{12}(\xi) - \frac{d\overset{1(0)}{u}_2(\xi)}{d\xi}\right)\zeta^2 + \overset{0(2)}{u}_1(\xi), \quad u_1^{(2)} = \overset{2(2)}{u}_1(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(2)}{u}_1(\xi). \tag{4.20}$$

Рассмотрим уравнение $(2.20)_1$, тогда с учётом (4.20), для $e_{11}^{(2)}$ получим формулу

$$e_{11}^{(2)} = \overset{2(2)}{e}_{11}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(2)}{e}_{11}(\xi), \tag{4.21}$$

где $$\overset{2(2)}{e}_{11}(\xi) = \frac{d\overset{2(2)}{u}_1(\xi)}{d\xi}, \quad \overset{0(2)}{e}_{11}(\xi) = \frac{d\overset{0(2)}{u}_1(\xi)}{d\xi}, \tag{4.22}$$

$$\overset{2(2)}{u}_1(\xi) = \frac{1}{2}\left(2\overset{1(2)}{e}_{12}(\xi) - \frac{d\overset{1(0)}{u}_2(\xi)}{d\xi}\right). \tag{4.23}$$

Обратимся к уравнению (4.15), тогда с учётом (4.13) и (4.21), это же уравнение запишем в виде

$$\begin{gathered} e_{22}^{(2)} - l_*^2\frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial\zeta^2} = \frac{E}{\lambda+2\mu}\left(\overset{2(0)}{\sigma}_{22}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(2)}{\sigma}_{22}(\xi)\right) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\overset{2(2)}{e}_{11}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(2)}{e}_{11}(\xi)\right) + \\ +2\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}l_*^2\overset{2(2)}{e}_{11}(\xi) + l_*^2\frac{d^2\overset{0(0)}{e}_{22}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}l_*^2\frac{d^2\overset{0(0)}{e}_{11}(\xi)}{d\xi^2}. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Решение уравнения (4.24) ищем в виде

$$e_{22}^{(2)} = \overset{2(2)}{e}_{22}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0(2)}{e}_{22}(\xi), \tag{4.25}$$

будем иметь

$$\overset{2(2)}{e}_{22}(\xi) = \frac{E}{\lambda+2\mu}\overset{2(0)}{\sigma}_{22}(\xi) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{2(2)}{e}_{11}(\xi), \tag{4.26}$$

$$\overset{0(2)}{e}_{22}(\xi) = \frac{E}{\lambda+2\mu}\left(\overset{0(2)}{\sigma}_{22}(\xi) + 2l_*^2\overset{2(0)}{\sigma}_{22}(\xi)\right) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\overset{0(2)}{e}_{11}(\xi) - l_*^2\frac{d^2\overset{0(0)}{e}_{11}(\xi)}{d\xi^2}\right) + l_*^2\frac{d^2\overset{0(0)}{e}_{22}(\xi)}{d\xi^2}. \tag{4.27}$$

Используя уравнение $(2.20)_2$, при $s = 2$ с учётом (4.25), для перемещения $u_2^{(2)}$ получим формулу

$$u_2^{(2)} = \overset{3(2)}{u}_2(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{1(2)}{u}_3(\xi)\cdot\zeta, \tag{4.28}$$

где

$$\overset{3(2)}{u}_2(\xi) = \frac{1}{3}\overset{2(2)}{e}_{22}(\xi), \quad \overset{1(2)}{u}_3(\xi) = \overset{0(2)}{e}_{22}(\xi). \tag{4.29}$$

Учитывая выражения (4.21), (4.25), после некоторых преобразований для определения $\sigma_{11}^{(2)}$ получим выражение

$$\sigma_{11}^{(2)} = \frac{1}{1-\nu^2}\overset{2(2)}{e_{11}}(\xi)(\zeta^2 - 2l_*^2) + \frac{1}{1-\nu^2}\left(\overset{0(2)}{e_{11}}(\xi) - l_*^2\frac{d^2\overset{0(0)}{e_{11}}(\xi)}{d\xi^2}\right) +$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\overset{2\,(0)}{\sigma_{22}}(\xi)\cdot\zeta^2 + \overset{0\,(0)}{\sigma_{22}}(\xi)\right). \tag{4.30}$$

В итоге приближений $s=0,\ s=2$, для суммарного напряжения σ_{11} будем иметь

$$\sigma_{11} = E\cdot\varepsilon^{-2}\left(\sigma_{11}^{(0)} + \varepsilon^2\cdot\sigma_{11}^{(2)}\right), \tag{4.31}$$

где $\sigma_{11}^{(0)}$ определяется формулой (4.10), а $\sigma_{11}^{(2)}$ – формулой (4.30).

Проинтегрировав уравнение равновесия (2.16)₁ по ζ, от -1 до +1 при $s=0$, получим

$$\frac{dN^0}{d\xi} + \sigma_{12}^{(0)}\Big|_{\zeta=-1}^{\zeta=+1} = 0, \tag{4.32}$$

где

$$N^{(0)} = \int_{-1}^{1}\sigma_{11}^{(0)}d\zeta \tag{4.33}$$

представляет собой нормальное усилие в стержне в исходном асимптотическом приближении.

Учитывая, что в симметричной по ζ задаче $\sigma_{12}^{(0)}(\zeta=+1) = -\sigma_{12}^{(0)}(\zeta=-1) = \frac{1}{2}q_1^{(0)}$, уравнение (4.32) можем записать так:

$$\frac{dN^{(0)}}{d\xi} = -q_1^{(0)}. \tag{4.34}$$

Аналогичным образом, из того же уравнения равновесия (2.16)₁, при $s=2$, будем иметь

$$\frac{dN^{(2)}}{d\xi} = -q_1^{(2)}. \tag{4.35}$$

Для нормального усилия в поперечном сечении стержня в размерном виде получим:

$$N = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}dy = h\int_{-1}^{1}\sigma_{11}d\zeta = Eh\varepsilon^{-2}\int_{-1}^{1}\bar{\sigma}_{11}d\zeta = Eh\varepsilon^{-2}\int_{-1}^{1}\left(\sigma_{11}^{(0)} + \varepsilon^2\sigma_{11}^{2}\right)d\zeta =$$
$$= Eh\varepsilon^{-2}\left(N^{(0)} + \varepsilon^2 N^{(2)}\right). \tag{4.36}$$

Имея ввиду выражение (4.36), из уравнений (4.34) и (4.35) получим уравнение равновесия в прикладной теории растяжении-сжатии стержня по градиентной теории упругости (которое идентично соответствующему уравнению по классической теории упругости):

$$\frac{dN}{dx} = -q_1. \tag{4.37}$$

(здесь следует иметь ввиду формулу: $q_1 = E\varepsilon^{-1}\left(q_1^{(0)} + \varepsilon^2 q_1^{(2)}\right)$.

Используя формулы для $\sigma_{11}^{(0)}$ ((4.10)) и $\sigma_{11}^{(2)}$ ((4.30)), подставляя их в формулу (4.36) и выполняя интегрирование, приходим к соотношению упругости в модели растяжения-сжатия стержня по градиентной теории упругости:

$$N = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\tilde{e}_{11} - \frac{\nu}{6(1-\nu)}h^2\frac{d^2\tilde{e}_{11}}{dx^2} + \frac{1-2\nu}{1-\nu}l^2\frac{d^2\tilde{e}_{11}}{dx^2}\right) +$$
$$+\frac{2}{3(1-\nu)}h^2\frac{dq_1}{dx} - \frac{4}{1-\nu}l^2\frac{dq_1}{dx} + \frac{2\nu}{1-\nu}hq_2, \tag{4.38}$$

где

$$\tilde{e}_{11} = \frac{du}{dx}, \qquad u = u(x). \tag{4.39}$$

Уравнение равновесия (4.37), соотношение упругости (4.38) и геометрическое соотношение (4.39) определяют прикладную модель растяжения-сжатия тонкого стержня по градиентной теории упругости.

Вопрос о выводе граничных условий для прикладных моделей изгибной деформации и растяжении-сжатии тонких стержней будет посвящена отдельная статья.

Заключение. В данной работе рассматривается плоское напряжённое состояние градиентной теории упругости в тонкой области прямоугольника, и используя асимптотический метод, построены прикладные модели стержня по градиентной теории упругости при его растяжении-сжатии и изгиба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eringen A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves //J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54. P. 4703-4710.
2. Aifantis E.C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture //International Journal of Engineering Science. 1992. Vl.30. P.1279-1299.
3. Aifantis E.C. Stain gradient interpretation of size effects //Int. J. Fract. 1999. Vol.95. P.299-314.
4. Alten B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity//Journal of Mechanical Behavior of Materials.-1997.-Vol. 8.-P.231-282.
5. Fridrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics //Bull. Amer. Soc. 61. 6. 1955. P.485.

6. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. N 1325. P. 143-160.
7. Гольденвейзер А.Л. Построение приближённой теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //Прикладная математика и механика. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
8. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек //Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методом расчёта оболочек и пластин. Гегечкори, Грузинская ССР, 1-10 октября 1974. Тбилиси: Изд-во ТГУ. 1975. С.51-148.
9. Бердичевский В.Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек //Прикладная математика и механика. 1979. Т.43. Вып.4. С.664-687.
10. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414с.
11. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anizotropic Plates and Shells. World Scientific. 2015. 360p.
12. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера //Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1990. №6. С.127-138.
13. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260с.
14. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости// Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.4154.
15. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости //Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
16. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек //Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып.2. С.325-343.
17. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells//Advances in Pure Mathematics. 2015. Vol.5. №10. P.629-643.

<u>Информация об авторе:</u>

Саркисян Лусине Самвеловна – канд. физ-мат наук, доцент, Институт механики НАН Армении,
E-mail: slusin@yahoo.com
Саркисян Самвел Оганесович – член-корреспондент НАН РА, доктор физ-мат. наук, профессор. Ширакский государственный университет. (093) 15 16 98
E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 15.11.2019