ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №1, 2020 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.1.4

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ РЕБРОМ ЖЁСТКОСТИ НА СВОБОДНОМ КРАЕ

Белубекян В.М., Белубекян Э.В.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, локализованная неустойчивость, свободный край, ребро усиления.

BelubekyanV.M., Belubekyan E.V.

On the stability problem of the plate with a rib reinforcement of the free edge

Keywords: rectungular plate, localized nonstability, free edge, rib reinforsment.

The rectangular plate with three simply supported edges and rib reinforced free edge is considered. The plate is preliminary regularly suppressed by the opposite free supported edges. The influence of the reinforcement characteristics on localized instability near the free edges are investigated.

Բելուբեկյան Վ.Մ., Բելուբեկյան Է.Վ.

Ազատ եզրով կոշտության կողով ուղեկցված սալի կայունության խնդրի մասին

Հիմնաբառեր. ՈՒղղանկյուն սալ, տեղայնացված անկայունություն, ազատ եզր, ամրացման կող.

Դիտարկված է ուղղանկյուն առաձգական սալ, որի երեք կողմերը հոդակապորեն ամրակցված են և մեկ կողմը ազատ է, բայց ուժեղացված է կողով: Սալը նախապես սեղմված է հավասարաչափ հակադիր հոդակապորեն ամրակցված կողմերով: Հետազոտված է կողի բնութագրիչների ազդեցությունը ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված անկայունության առաջացման պայմանի վրա:

Рассматривается прямоугольная упругая пластинка с тремя шарнирно закреплёнными краями и одним свободным, усиленным ребром жёсткости. Пластинка предварительно равномерно сжата по двум противоположным шарнирно закреплённым сторонам. Исследуется влияние характеристик ребра жёсткости на условия появления локализованной неустойчивости окрестности свободного края.

Введение.

В статье А.Ю. Ишлинского [1] доказано, что пластинка с двумя нагружёнными противоположными шарнирно закреплёнными краями и с двумя другими свободными краями может потерять устйчивость при критической нагрузке меньшей, чем критическая нагрузка потери устойчивости по цилиндрической форме поверхности независимо от отношения сторон пластинки.

Отсюда следует, что возможна потеря устойчивости пластинки, локализованной в окрестности свободного края [2,3]. Известны способы стабилизации нагружённой пластинки при помощи рёбер жёсткости и шпангоутов [4,5]. В настоящей статье показывается возможность устранения локализованной неустойчивости при помощи ребра жёсткости.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) пластинка занимает область $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h.$ Пластинка по кромкам $y = 0,\ y = b$ предварительно равномерно сжата. При допущениях теории Кирхгофа уравнение статической устойчивости пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 w + P\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \tag{1.1}$$

где $w(x, y)$ – функция прогиба, Δ – оператор Лапласа,

$$D = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}, \quad P = 2h\sigma_0 \tag{1.2}$$

– жёсткость пластины на изгиб и усилие, приложенное на кромках $y = 0, b$, соответственно.

Три стороны пластинки шарнирно закреплены:

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = a \tag{1.3}$$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b\,. \tag{1.4}$$

По четвёртой стороне пластинка соединена с ребром жёсткости, что приводит к следующим граничным условиям [4,6]:

$$\left.\begin{aligned} &D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + G_0 I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0,\\ &D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + E_0 I\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma_0 S\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x = 0 \tag{1.5}$$

В (1.5) $\sigma_0 S, E_0 I$ – жёсткости ребра (балки) на кручение и изгиб, соответственно.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям шарнирного закрепления ((1.4), представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin\lambda_n y, \quad \lambda_n = {n\pi}/{b}\,. \tag{1.6}$$

Подстановка (1.6) в (1.1) приводит к решению последовательных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_n^{\mathrm{IV}} - 2\lambda_n^2 f_n^{\mathrm{II}} + \lambda_n^4\left(1-\eta^2\right) f_n = 0\,, \tag{1.7}$$

где

$$\eta^2 = 2h\,\sigma_0 \big/ \left(D\lambda_n^2\right). \tag{1.8}$$

Общее решение уравнения (1.7) получается в виде

$$f_n(x) = A_n \operatorname{sh} P_1\lambda_n x + B_n \operatorname{ch} P_1\lambda_n x + C_n \operatorname{sh} P_2\lambda_n x + D_n \operatorname{ch} P_2\lambda_n x\,, \tag{1.9}$$

где

$$p_1 = \sqrt{1+\eta}, \quad p_2 = \sqrt{1-\eta}\,. \qquad (1.10)$$

Требование, чтобы (1.6) с учётом (1.9) удовлетворяло также граничным условиям шарнирного защемления (1.3), даёт

$$f_n\left(x\right) = F_n \operatorname{sh} p_1\lambda_n\left(a-x\right) + G_n \operatorname{sh} p_2\lambda_n\left(a-x\right), \qquad (1.11)$$

где F_n, G_n – новые произвольные постоянные.

2. Подстановка (1.6), с учётом выражения для функции $f_n\left(x\right)$ из (1.11) в граничные условия (1.5), приводит к следующей системе однородных алгебраических урпанений относительно произвольных постоянных F_n, G_n:

$$\begin{aligned}&\left[\left(p_1^2-\nu\right)\operatorname{sh}\varsigma_1+\gamma_1 p_1 \operatorname{ch}\varsigma_1\right]F_n+\left[\left(p_2^2-\nu\right)\operatorname{sh}\varsigma_2+\gamma_1 p_2 \operatorname{ch}\varsigma_2\right]G_n=0\\&\left[p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)\operatorname{ch}\varsigma_1-\gamma_2 p_1\operatorname{sh}\varsigma_1\right]F_n+\left[p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)\operatorname{ch}\varsigma_2-\gamma_2\operatorname{sh}\varsigma_2\right]G_n=0\end{aligned} \qquad (2.1)$$

В (2.1) приняты новые обозначения:

$$\begin{aligned}&\gamma_2=\frac{\lambda_n}{D}\left(E_0 I-\frac{G_0 S}{\lambda_n^2}\right),\ \varsigma_k=p_k\lambda_n a\quad\left(k=1,2\right),\\&\gamma_1=\frac{G_0 I_1}{D}\lambda_n,\ \gamma_2=\frac{E_0 I}{D}\lambda_n-\frac{G_0 S}{D\lambda_n}.\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Условие равенств нулю детерминанта системы уравнений (2.1) после преобразований приводится к уравнению

$$\begin{aligned}&p_2\left[\left(p_1^2-\nu\right)\left(p_2^2-2+\nu\right)+\gamma_1\gamma_2\right]\operatorname{th}\varsigma_1-p_1\left[\left(p_2^2-\nu\right)\left(p_1^2-2+\nu\right)+\gamma_1\gamma_2\right]\operatorname{th}\varsigma_1-\\&-\left(p_1^2-p_2^2\right)\left[\gamma_2 th\varsigma_1\operatorname{th}\varsigma_2+\gamma_1 p_1 p_2\right]=0.\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Из (2.3) для полубесконечной пластинки $a/b \to c_0$ или в приближении $\operatorname{th}\varsigma_k \approx 1$ получается (И – оператор Ишлинского [1])

$$\left(p_2-p_1\right)\mathrm{I}\left(\eta,\nu\right)=0, \qquad (2.4)$$

где

$$\mathrm{I}\left(\eta,\nu\right)\equiv p_1^2p_2^2+2\left(1-\nu\right)p_1p_2-\nu^2+\left(p_1+p_2\right)\left(\gamma_2+\gamma_1p_1p_2\right)+\gamma_1\gamma_2=0\,. \qquad (2.5)$$

Уравнение, аналогичное уравнению (2.4), получается в задаче локализованных изгибных колебаний пластин, усиленных рёбрами жёсткости [7].

Корень уравнения (2.4) $\eta=0\ \left(p_1=p_2\right)$ соответствует тривиальному решению $w\equiv 0$. Функция $\mathrm{I}\left(\eta,\nu\right)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}\left(0,\nu\right)=\left(1-\nu\right)\left(3+\nu\right)+2\left(\gamma_1+\gamma_2\right)+\gamma_1\gamma_2>0\\&\mathrm{I}\left(1,\nu\right)=-\nu^2+\sqrt{2}\,\gamma_2+\gamma_1\gamma_2\end{aligned} \qquad (2.6)$$

В случае отсутствия ребра $(\gamma_1 - \gamma_2 = 0)$ из (2.6) следует $\mathrm{I}(1,\nu) < 0$ при $\nu \neq 0$ и локализованная неустойчивость имеет место, так как уравнение (2.4) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$0 < \eta < 1, \tag{2.7}$$

поэтому из (2.6) получается следующее условие отсутствия локализованной неустойчивости

$$\left(\sqrt{2} + \gamma_1\right)\gamma_2 > \nu^2. \tag{2.8}$$

Из уравнения (2.3) также можно получить условия появления локализованной неустойчивости в зависимости от относительных размеров пластинки. Уравнение (2.3) имеет корень $\eta = 1$, который разделяет решения, удовлетворяющие условию $\eta > 1$ от решений, удовлетворяющих условию (2.8), при котором локализованная неустойчивость существует [8]. Исключив корень $\eta = 1$ $(p_2 = 0)$ из уравнения (2.3), получим:

$$\begin{gathered}\left[(2-\nu)^2 - \gamma_1\gamma_2\right]\operatorname{th}\sqrt{2}\,\lambda_n a - \sqrt{2}\left(\nu^2 - \gamma_1\gamma_2\right)\lambda_n a + \\ +2\left[\gamma_2\lambda_n a \operatorname{th}\sqrt{2}\,\lambda_n a + \sqrt{2}\,\gamma_1\right] = 0\end{gathered} \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) определяет значение корня $\lambda_n a$, с увеличением которого корни уравнения (2.5)$-\eta$ будут удовлетворять условию (2.7), т.е. условию существования локализованной неустойчивости окрестности свободного края пластинки, усиленной ребром жёсткости. Использование приближения $\operatorname{th}\sqrt{2}\,\lambda_n a \approx 1$ даёт простое решение для $\lambda_n a$

$$\lambda_n a > \frac{(2-\nu)^2 - \gamma_1\gamma_2 + 2\sqrt{2}\,\gamma_1}{\sqrt{2}\left(\nu^2 - \gamma_1\gamma_2 + \sqrt{2}\,\gamma_2\right)}, \quad \left(\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \lambda_1 a > \frac{(2-\nu)^2}{\sqrt{2}\,\nu^2}\right). \tag{2.10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин. //Докл. СССР. 1954. Т.XCV. №3. С.477-479. Ishlinskii A.Yu. About the some limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates //Reports of Academy of Seiences 1954, v.95, №3, p.38-46. (in Russian).
2. Белубекян М.В. Задача локализованной неустойчивости пластинки. / В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван: Изд.ЕГУ, 1997. С.95-99. Belubekyan M.V. The problemof the plate localized nonstability // Jn book «The questions of the mechanical sistem optimal contrability, stability and strengths». Yerevan, YSU ed., 1997, pp.95-99 (in Russian).
3. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластин с учётом поперечных сдвигов. //Изв.РАН. МТТ. 2004. №2. С.126-131. Belubekyan M.V. On the plate stability problem with accounting of the transvers shear //Izv.RAS, 2004, №2, pp126-131. (in Russian).

4. TimoshenkoS., Woinovsky-Krieger S. Theory of Plates and Sheiis. Me Graw-Hill. 1959.
5. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312с. Alfhutov N.A. The basis of calculation on the mechanical system stability. M.: «Mashinostroenie», 1978. 312p. (in Russian).
6. Белубекян Э.В., Погосян А.Г. Оптимальное проектирование прямоугольной ребристой пластинки из композиционного материала по критерию устойчивости. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.66. №1. С.38-43. Belubekyan E.V., Pogosyan A.G. Optimal desing of the rectangular plate of composite material, rein-focused with rigid ribs by the stability cuterion //Proc. of NAS of Armenia, 2007, v.66, №1, pp.38-43. (in Russian).
7. Attilio Milanese, Pier Mazzocca, Mels Belubekyan, Karen Chazaryan. Effect of thestiffness and inertia of a rib rein foreement on localized bending waves un semi-unfinite strips. Jntern.Yournal of solids and structures. 2009. 46. P.2126-2135.
8. Белубекян М.В. Условия появления локализованных изгибных колебаний растянутой пластинки. / В сб.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: «Гитутюн», 2017. С.93-98. Belubekyan M.V. Localized bending vibration appearance condition of the plate under tension /«Problems of deformable solid body». Yerevan, 2017, pp.93-98. (in Russian).

<u>**Сведения об авторах:**</u>

Белубекян Вагаршак Мелсович – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении. **E-mail:** vbelub@gmail.com

Белубекян Эрнест Вагаршакович –доктор технических наук, профессор. **E-mail:**ebelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 16.12.2019