

**ФЛАТТЕР КОМПОЗИЦИОННОЙ СЛОИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ**

Багдасарян Г.Е.

Ключевые слова: композиционная слоистая цилиндрическая оболочка, флаттер, критическая скорость

Baghdasaryan G.Y.

Flutter of a composite layered cylindrical shell in a supersonic gas flow

Key words: composite laminate cylindrical shell, flutter, critical speed.

The stability problem of a layered cylindrical shell made of monolayers of an orthotropic composite material in a supersonic gas flow is considered. The study was conducted in a linear formulation in the case of a closed elongated shell. The formula for determining the critical speed of flutter is obtained. The minimum value of the critical velocity by wave numbers was found depending on the angles of reinforcement of the layers of the shell material. Based on this, it was shown that a) the minimum value (by wave numbers) of the critical velocity is a function of the angle of reinforcement and takes maximum values when one of the main directions of elasticity of the material of the monolayers forming the shell coincides with the direction of gas flow, b) the minimum values of the minimum (by wave numbers) critical velocity are reached at points within the interval $(0, \pi)$. Therefore, by varying the physical-mechanical parameters of the composite aeroelastic system, especially the angle of reinforcement of the shell material, it is possible to optimally control the critical velocity of flutter.

Բաղդասարյան Գ.Ե.

Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհասվող կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթի կայունությունը

Հիմնաբառեր՝ կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթ, ֆլատեր, կրիտիկական արագություն

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհասվող օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութից (ԿԼ) պատրաստված շերտավոր գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է գծային դրվածքով փակ երկար թաղանթի դեպքում: Ստացված է ֆլատերի կրիտիկական արագության որոշման բանաձև: Որոշված է կրիտիկական արագության ըստ ալիքային թվերի մինիմալ արժեքը՝ կախված թաղանթի նյութի շերտերի արմիրավորման անկյունից: Դրա հիման վրա ցույց է տրված, որ ա) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը ըստ արմիրավորման անկյան ֆունկցիա է և ընդունում է մակսիմալ արժեք, երբ թաղանթի նյութի մոնոշերտերի առաձգականության զիսավոր ուղղություններից մեկը համընկնում է գազի ուղղության հետ, բ) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը հասանելի է $(0, \pi)$ միջակայքի ներքին կետերում: Հետևաբար, կոմպոզիցիոն աերոառաձգական համակարգի ֆիզիկական պարամետրերի, և հատկապես թաղանթի նյութի արմիրավորման անկյան համապատասխան ընտրության միջոցով կարելի է օպտիմալ կերպով ղեկավարել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

Рассматривается задача устойчивости слоистой цилиндрической оболочки конечной длины, изготовленной из монослоев ортотропного композиционного материала обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой оболочки. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоев материала оболочки. На этой

основе показано, что а) минимальное значение (по числам волн в окружном направлении) критической скорости является функцией угла армирования и принимает максимальные значения, когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа; б) минимальные значения минимальной (по волновым числам) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$. Следовательно, варьируя физико-механическими параметрами композиционной аэроупругой системы, особенно углом армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Введение

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. В частности, вопросы сверхзвукового флаттера изотропных, слоистых и анизотропных (некомпозиционных) тонких пластин и оболочек изучены достаточно полностью, и эффекты взаимодействия здесь оказались весьма существенными. Аналогичные вопросы для тонких тел конечных размеров из композиционного материала почти не исследованы.

Настоящая работа посвящена вопросам устойчивости композиционной слоистой цилиндрической оболочки конечной длины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой оболочки, слой которой составлены из монослоев ортотропного композиционного материала. Аэродинамическое давление вычислено на основе приближённой формулы «поршневой теории» при малых возмущениях. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоёв материала оболочки. Исследован вопрос оптимального регулирования величины минимальной критической скорости при помощи выбора угла армирования и физико-механических параметров рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h , составленную из конечного числа $(2k + 1)$ слоёв, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки. За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки (срединная поверхность среднего слоя), которая представляется координатами α_1, α_2 (α_1 – вдоль образующей, α_2 – по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Третья координатная линия α_3 прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ до точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оболочки. Слои, симметрично расположенные относительно координатной поверхности $\alpha_3 = 0$, имеют одинаковые толщины, одинаковые физико-механические свойства и состоят из $2n_s$ элементарных слоёв ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi_s$ ($s = 1, 2, \dots, 2k + 1$) к оси цилиндра. Таким образом, рассматривается слоистая цилиндрическая оболочка, составленная из нечётного числа однородных ортотропных слоёв, симметрично расположенных относительно срединной поверхности [1,2]. Предполагается, что слои оболочки после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

Согласно вышеизложенному, упругие характеристики $B_{ij}^{(s)}$ материала S -ого слоя в главных геометрических направлениях оболочки, определяются через упругие характеристики $B_{ij}^{0(s)}$ соответствующих элементарных слоёв в главных физических направлениях по известным формулам поворота [3].

Пусть оболочка обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью \vec{u} ($|\vec{u}| = U = \text{const}$), направленной по образующим цилиндра. Исследовать устойчивость оболочки под действием избыточного давления газа, появляющегося вследствие малых возмущений обтекаемой поверхности (вследствие возмущённого колебания оболочки).

Для получения основных уравнений и соотношений, описывающих возмущённое движение рассматриваемой аэроупругой системы, принимаются следующие предположения:

- а) гипотеза о недеформируемых нормалях для всего пакета оболочки в целом [3];
- б) избыточное давление Δp вычисляется, используя приближённую формулу «поршневой теории» при малых возмущениях [4].

В силу принятых предположений получаются следующие уравнения и соотношения, описывающие поведение малых возмущений в рассматриваемой оболочке [3]:

уравнения возмущённого состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha_2} &= m^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_1} &= m^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial \alpha_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{R} T_{22} + Z &= m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь m^* – приведённая масса, отнесённая к единице площади срединной поверхности

$$m^* = \frac{2}{g} \left[\gamma_{k+1} \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i (\delta_i - \delta_{i+1}) \right],$$

где γ_i – удельный вес материала i -ого слоя, δ_i – расстояние верхней поверхности i -ого слоя от срединной поверхности, Z – нормальная составляющая внешней нагрузки, T_{ij} , M_{ij} – возмущения внутренних сил и моментов невозмущённого состояния;

соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2, & M_{11} &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2, \\
T_{22} &= c_{12}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2, & M_{22} &= D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2, \\
T_{12} &= T_{21} = c_{66}\omega, & M_{12} &= D_{66}\chi_{12}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь для жёсткостей растяжения c_{ij} и изгиба D_{ij} имеем:

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= 2 \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1} + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \\
D_{ij} &= \frac{2}{3} \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1}^3 + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s^3 - \delta_{s+1}^3) \right],
\end{aligned}$$

где упругие постоянные $B_{ij}^{(s)}$ материала s -ого слоя в главных геометрических направлениях оболочки, согласно формулы поворота, имеют следующие представления [3]:

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s, \\
B_{22}^{(s)} &= B_{11}^{(s)} \sin^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s, \\
B_{12}^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\
B_{66}^{(s)} &= B_{66}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\
B_0^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + 2B_{66}^{0(s)};
\end{aligned} \tag{1.3}$$

геометрические соотношения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R}, & \omega &= \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_1}, \\
\chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, & \chi_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, & \chi_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

В (1.1)-(1.4), $u(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $v(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $w(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки, $B_{ij}^{0(s)}$ – упругие постоянные материала s -ого слоя в главных физических направлениях (упругие постоянные элементарных слоёв, образующих данный слой оболочки), φ_s – угол армирования материала s -ого слоя.

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.2) в уравнение (1.1), получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений возмущённого движения оболочки:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= m^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{22}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= m^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} + \\
+ \frac{1}{R} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + c_{22} \frac{w}{R^2} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Поперечная нагрузка $Z(\alpha_1, \alpha_2, t)$ возмущённого состояния складывается из сил демпфирования и избыточного аэродинамического давления Δp

$$Z = -\varepsilon m^* \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p, \tag{1.6}$$

где ε – коэффициент затухания.

Используя формулу давления, полученную на основе «поршневой теории», для Δp в линейном приближении получается следующее представление [5]:

$$\Delta p = -\varkappa p_0 \left(\frac{1}{a_0} \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right), \quad M = \frac{U}{a_0}, \tag{1.7}$$

где M – число Маха, p_0 – давление, a_0 – величина скорости звука для невозмущённого газа, \varkappa – показатель политропы.

Если частота собственных поперечных колебаний оболочки мала по сравнению с частотой собственных колебаний в своей поверхности, то тангенциальными составляющими сил инерции можно пренебречь. В этом случае, введя функцию $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t)$, связанную с u, v, w соотношениями [3]

$$\begin{aligned}
u &= L_1 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \Phi, \\
v &= L_2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} - a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \right] \Phi, \\
w &= L_3 \Phi = \left[a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \Phi,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

с учётом (1.6) и (1.7), приведём систему (1.5) к одному разрешающему уравнению [6]

$$PL_3 \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha_1^4} + L_3 \left[m^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(m^* \varepsilon + \frac{\varkappa p_0}{a_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \varkappa p_0 M \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] \Phi = 0, \tag{1.9}$$

где линейный дифференциальный оператор P имеет вид

$$P = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}.$$

Коэффициенты a_{ik} линейных дифференциальных операторов L_i ($i = 1, 2, 3$) определяются формулами [3]

$$a_{ik} = \frac{c_{ik}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad a_{66} = \frac{1}{c_{66}} \quad (i = 1, 2, \quad k = 1, 2). \quad (1.10)$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа сведена к решению уравнения (1.9) при обычных условиях закрепления краёв оболочки.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки, шарнирно опёртой по торцам со свободным смещением в продольном направлении и при отсутствии смещения в дуговом. Тогда имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad T_{11} = 0 \\ w = 0, \quad M_{11} = 0 \end{aligned} \quad \text{при } \alpha_1 = 0 \text{ и } \alpha_1 = l \quad (2.1)$$

где l – длина оболочки.

Решение уравнения (1.9), удовлетворяющее условиям (2.1), представим в виде

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \lambda_m \alpha_1 \cos \frac{n}{R} \alpha_2, \quad \left(\lambda_m = \frac{m\pi}{l} \right), \quad (2.2)$$

где m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n – число волн в окружном направлении, $f_{mn}(t)$ – функции, подлежащие определению.

Представление (2.2) удовлетворяет условиям замкнутости оболочки по координате α_2 .

Подставляя (2.2) в (1.9) и используя обычный процесс ортогонализации, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных функций $x_{mn} = f_{mn}/h$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_{mn}}{d\tau^2} + \gamma_n \frac{dx_{mn}}{d\tau} + \Omega_{mn}^2 x_{mn} + \Psi_{mn} = 0, \\ (m = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\tau = \omega_{1n} t, \quad \gamma_n = \frac{1}{\omega_{1n}} \left(\varepsilon + \frac{\alpha p_0}{m^* a_0} \right), \quad \Omega_{mn}^2 = \frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{1n}^2}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{mn}^2 &= \frac{1}{m^*} \left[D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \frac{n^2}{R^2} + D_{22} \frac{n^4}{R^4} + \frac{\lambda_m^4}{R^2 A_{mn}} \right], \\
A_{mn} &= a_{11} \lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12}) \lambda_m^2 \frac{n^2}{R^2} + a_{22} \frac{n^4}{R^4}, \\
\Psi_{mn} &= \nu K_n \frac{m}{2A_{mn}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{m+k}}{m^2 - k^2} k A_{kn} x_{kn}, \quad K_n = \frac{4\alpha p_0}{m^* h \omega_{1n}^2}, \quad \nu = M \frac{h}{l}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь ω_{mn} – частоты малых собственных колебаний оболочки, ν – приведённый параметр скорости, а штрих над суммой означает, что член $k = m$ отсутствует.

Таким образом, получена система линейных дифференциальных уравнений (2.3), которая внешне не отличается от соответствующих систем уравнений, полученных в работе [7] в случае однослойных изотропных оболочек и в работе [6] в случае слоистых оболочек, слои которых составлены из обычных ортотропных (некомпозиционных) материалов. Однако, коэффициенты уравнений системы (2.3), как и следовало ожидать, зависят от углов армирования φ_s и поэтому, существенно отличаются от соответствующих коэффициентов, полученных в указанных работах.

3. Определение критической скорости флаттера

Будем искать такие значения числа M , при которых тривиальное решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$ рассматриваемой задачи (1.9), (2.1) (следовательно, и тривиальное решение $x_{mn} \equiv 0$ системы (2.3)) становится неустойчивым, что физически соответствует явлению флаттера. При этом " n " рассматривается как параметр и строится последовательность приближений по m . При $m = 2$, что соответствует первому приближению, система (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y_{1n}}{d\tau^2} + \gamma_n \frac{dy_{1n}}{d\tau} + y_{1n} - \frac{2}{3} \nu K_n y_{2n} &= 0, \\
\frac{d^2 y_{2n}}{d\tau^2} + \gamma_n \frac{dy_{2n}}{d\tau} + \Omega_{2n}^2 y_{2n} + \frac{2}{3} \nu K_n y_{1n} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $y_{1n} = A_{1n} x_{1n}$, $y_{2n} = A_{2n} x_{2n}$.

Представляя решение системы (3.1) в виде $y_{in} = z_{in} e^{\lambda \tau}$ ($i = 1, 2$), получим следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^4 + 2\gamma_n \lambda^3 + (\Omega_{2n}^2 + 1 + \gamma_n^2) \lambda^2 + \gamma_n (\Omega_{2n}^2 + 1) \lambda + \Omega_{2n}^2 + \frac{4}{9} K_n^2 \nu^2 = 0.$$

Невозмущённое состояние оболочки будет устойчиво, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица, записываются в виде:

$$\gamma_n > 0, \quad \gamma_n (1 + \Omega_{2n}^2) > 0, \quad (\Omega_{2n}^2 - 1)^2 + 2\gamma_n^2 (1 + \Omega_{2n}^2) - \frac{16}{9} K_n^2 \nu^2 > 0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства получим следующую формулу (соответствующую первому приближению) для определения предельных значений скорости обтекающего потока газа v_n^*

$$v_n^* = \frac{3}{4} \frac{\Omega_{2n}^2 - 1}{K_n} \left[1 + \frac{2\gamma_n^2 (\Omega_{2n}^2 + 1)}{(\Omega_{2n}^2 - 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

при которых невозмущённое состояние оболочки становится неустойчивым. Критической скоростью флаттера при $m = 2$ является минимальное значение функции v_n^* по n (минимальное значение предельных скоростей).

Аналогичным образом при $m = 4$, в случае отсутствия затухания получается следующее уравнение для определения v_n^* :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{256}{175} \right)^2 K^4 v^4 + \left[\frac{144}{49} (1 - \lambda^2) (\Omega_{2n}^2 - \lambda^2) + \frac{36}{25} (1 - \lambda^2) (\Omega_{4n}^2 - \lambda^2) + \right. \\ & \left. + \frac{16}{225} (\Omega_{2n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{3n}^2 - \lambda^2) + \frac{4}{9} (\Omega_{3n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{4n}^2 - \lambda^2) \right] K^2 v^2 + \\ & + (1 - \lambda^2) (\Omega_{2n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{3n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{4n}^2 - \lambda^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что аналогичные (3.2) и (3.3) формулы и уравнения, получены также в работах [5-7]. Здесь существенное отличие составляет зависимость коэффициентов в (3.2) и (3.3) от углов армирования ϕ_s слоёв оболочки.

Решив уравнение (1.19) относительно v , находим зависимость $v = f(\lambda)$. При этом, критическому параметру v соответствует слияние двух соседних действительных частот λ [5-7]. Следовательно, наибольший интерес представляют те значения параметра n , при которых предельная скорость принимает минимальное значение. Значения n_* , для которых v_n^* принимает минимальное значение, согласно (3.2), в случае отсутствия затухания определяются из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{6(D_{12} + 2D_{66})}{\pi^2} - \frac{1}{R^2 l^2} \left[16 \frac{(a_{66} - 2a_{12}) \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + 2a_{22} \frac{n^2}{R^2}}{A_{2n}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(a_{66} - 2a_{12}) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + 2a_{22} \frac{n^2}{R^2}}{A_{1n}^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Величина n_* , при которой v_n^* принимает минимальное значение, определяется как одно из двух чисел, ближайших к корню уравнения (3.4). Рассматривая (3.4), легко заметить, что критическое значение параметра n_* существенным образом зависит от упругих коэффициентов материала оболочки и от угла армирования Φ . Отметим, что для однослойной изотропной оболочки оно зависит только от коэффициента Пуассона [7].

Для наглядности и простоты рассматривается случай однослойной оболочки. Тогда, уравнение (3.4) можно привести к виду:

$$\frac{\bar{B}_{66}(\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2)}{\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66}} \left[\frac{16(2\pi^2 Q + qx)}{(16\pi^4 \bar{B}_{11}\bar{B}_{66} + 4\pi^2 Qx + qx^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 Q + 2qx}{(\pi^4 \bar{B}_{11}\bar{B}_{66} + \pi^2 Qx + qx^2)^2} \right] = \left(\frac{hR}{2\pi l^2} \right)^2 \quad (3.5)$$

где $\bar{B}_{ik} = \frac{B_{ik}}{B_{11}^0}$, $Q = \bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2 - 2\bar{B}_{12}\bar{B}_{66}$, $q = \bar{B}_{22}\bar{B}_{66}$, $x = \gamma^2 n^2$, $\gamma = l/R$.

Таким образом, в случае однослойной ортотропной композиционной оболочки критическое значение параметра n в первом приближении определяется из уравнения (3.5), коэффициенты которого зависят от отношений типа B_{ik}/B_{11}^0 и угла армирования Φ материала оболочки. Следовательно, от указанных параметров, согласно (3.2), зависят также значения функции $v_{cr}^{\min}(\varphi) = \min_{(n)} v_n^*$ (минимальное значение критической скорости v_n^* по n).

Для иллюстрации указанной зависимости приведены числовые расчёты: сперва определены значения n_* , численно решая уравнение (3.5) при определённых значениях угла Φ (таблица 1). Затем, используя найденные $n_*(\varphi)$, из (3.2) при отсутствии затухания вычислены значения функции $v_{cr}^{\min}(\varphi)$. Для расчёта принято $h = 0.01l$ и рассмотрена оболочка, изготовленная из СВМ-ИММ со следующими безразмерными упругими характеристическими $\bar{B}_{ik}^0 = B_{ik}^0/B_{11}^0$ в главных направлениях упругости [9,10]: $\bar{B}_{22}^0 = 0.26$, $\bar{B}_{12}^0 = 0.078$, $\bar{B}_{66}^0 = 0.086$. В табл. 1 приведены те значения n , при которых v_n^* принимает экстремальные значения. При этом, они представлены в виде дроби, числитель которой представляет величину n , при которой v_n^* принимает минимальное значение, а знаменатель – максимальное значение.

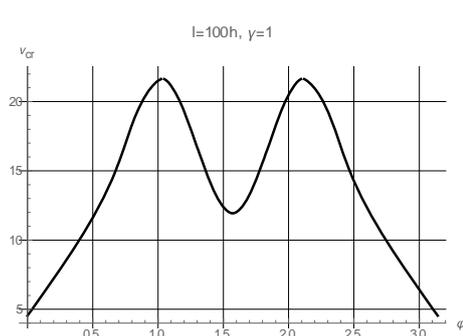
Результаты вычислений для минимальных значений критической скорости в зависимости от угла Φ представлены на фиг.1. Те же самые вычисления произведены

в случае максимальных значений, которые представлены на фиг.2. Кривые на этой фигуре представляют собой зависимости экстремальной безразмерной критической скорости $v_{cr}^{min}(\varphi) = A\tilde{v}(\varphi)$ от угла армирования φ . Здесь

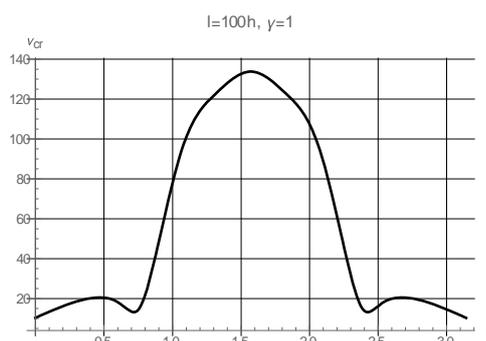
$$A = \frac{1}{3\pi^4} \left(\frac{l}{h}\right)^4 \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{a_0}{c_t}\right)^2, \quad c_t^2 = \frac{B_{11}^0}{\rho}, \quad \rho - \text{плотность материала оболочки, } \rho_0 - \text{плотность газа.}$$

Таблица 1

$\varphi \backslash \gamma$	0.5	0.8	1	2	3
0	15 / 6	13 / 3	12 / 3	8 / 1	7 / 1
$\pi/6$	15 / 10	13 / 7	12 / 5	8 / 3	6 / 2
$\pi/4$	16 / 10	13 / 6	11 / 6	7 / 2	5 / 2
$\pi/3$	16 / 7	12 / 4	11 / 3	7 / 2	5 / 1
$\pi/2$	17 / 3	13 / 2	12 / 1	8 / 1	6 / 1



Фиг.1.



Фиг.2.

Приведённые фигуры показывают, что а) максимальные значения минимальной критической скорости получаются при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, т.е., когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа, б) минимальные значения минимальной (по n) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$, расположение которых существенно зависит от отношений типа B_{ik}^0/B_{11}^0 . Таким образом, варьируя физико-механические параметры композиционной аэроупругой системы, особенно угол армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-2C149.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёт многослойных пластинок и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials. M.: Mechanical Engineering, 1984. (in Russian).
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. Л.: Машиностроение, 1985. Vasiliev V.V. Mechanics of structures made of composite materials. L.: Engineering, 1985. (in Russian).
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука 1974. Ambartsumyan S.A. The general theory of anisotropic shells. M.: Science 1974. (in Russian).
4. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.:Физматгиз, 1961. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Fizmatgiz, 1961. (in Russian).
6. Багдасарян Г.Е. Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки в потоке газа. Труды IV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Ереван, 1962. Baghdasaryan G.E. Stability of an orthotropic cylindrical shell in a gas stream. Proceedings of the IV All-Union Conference on the Theory of Plates and Shells. Yerevan, 1962. (in Russian).
7. Швейко Ю. Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Мех. и машиностр., 1960. № 6. С. 74-79.
8. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетере Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига:Зинатне, 1980. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Tetere G.A. Resistance of polymer and composite materials. Riga: Zinatne, 1980. (in Russian).
9. Jones R.M. Mechanics of composite materials. New York, Mc. Craw-Hill Book Co., 1975.

Сведенияобавторе:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (010) 355308; **E-mail:** gevorg.baghdasaryan@rau.am

Поступила в редакцию 20.01.2020