/ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №1, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.1.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбинян А.З.

Ключевые слова: волна Рэлея, поперечное и продольные волны, волновое число, частота, условия затухания, дисперсионное уравнение.

Propogation of Surface Waves in the Composite Half Plane

Amirjanyan H.A, Belubekyan M.V., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z.

Keywords: Rayleigh Wave, Transverse and Longitudinal Waves, Wavenumber, Frequency, Damping Conditions, Dispersion Equation

The problem of propagation of Rayleigh type surface waves in the halfplane-layer system along the line of their connection is considered. The dispersion equation of the problem is obtained and the conditions for the propagation of surface waves are obtained depending on the physical and geometric characteristics of the half-plane and layer.

Մակերևույթային ալիքների տարածումը բաղադրյալ կիսահարթությունում

Ամիրջանյան Հ.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ.

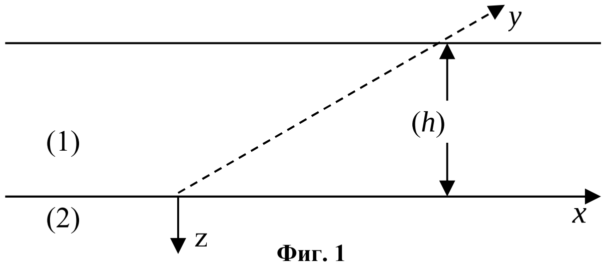
Հիմնաբառեր. Ռելեյի ալիքներ, երկայնական և լայնական ալիքներ, ալիքային թիվ, հաճախություն, մարման պայմաններ, դիսպերսիոն հավասարում:

Դիտարկված է Ռելեյի տիպի մակերևույթային ալիքների տարածումը կիսահարթություն-շերտ համակարգում միացման գծի երկայնքով: Ստացվել է խնդրի դիսպերսիոն հավասարումը և մակերևույթային ալիքների տարածման պայմանները՝ կախված ֆիզիկական և երկրաչափական բնութագրիչներից:

Рассмотрена задача распространения поверхностных волн типа Рэлея в системе полуплоскость-слой по линии их соединения. Получено дисперсионное уравнение задачи и получены условия распространения поверхностных волн в зависимости от физических и геометрических характеристик полуплоскости и слоя.

Введение. Распространение поверхностных волн типа Рэлея в составной полуплоскости было исследовано многими авторами. Обзор работ по этой тематике можно найти в [1-5]. В работах [6,7] исследовано существование упругих волн, локализованных у границы раздела двух упругих сред, которые экспоненциально затухают по мере удаления от границы. Здесь рассмотрена задача плоской деформации, когда упругие перемещения имеют место в этой плоскости и не зависят от нормального к данной плоскости направления.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача плоской деформации теории упругости для полупространства, контактирующего со слоем (фиг.1)



Фиг. 1

Для компонент упругих перемещений имеем:

$$u_1^{(i)} = u^{(i)}\ (x,z,t),\ u_3^{(i)} = w^{(i)}\ (x,z,t),\ u_2^{(i)} = 0 \quad (i = 1,2)$$

где $i = 1$ относится к слою, а $i = 2$ –к полуплоскости t –время.

Уравнения движения в перемещениях имеют вид [4]

$$c_{2i}^2 \Delta u^{(i)} + \left(c_{1i}^2 - c_{2i}^2\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2}$$

$$c_{2i}^2 \Delta w^{(2)} + \left(c_{1i}^2 - c_{2i}^2\right) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \tag{1}$$

где c_{1i}, c_{2i} – скорости распространения продольных и поперечных волн в соответствующих средах, λ_i, μ_i – коэффициенты Ламе слоя $(i = 1)$ и полупространства $(i = 2)$.

Граничные условия (скользящий контакт- анти-Навье) [5]

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0,\ w^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = -h \tag{2}$$

Условия Навье

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0,\ \sigma_{33}^{(2)} = 0,\ \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)},\ u^{(1)} = u^{(2)} \ \text{при } z = 0 \tag{3}$$

Решение задачи. Посредством скалярных потенциалов [4]

$$u^{(i)} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z},\ w^{(i)} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \tag{4}$$

уравнения (1) сводятся к

$$\Delta \Phi_i = \frac{1}{c_{1i}^2}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi_i = \frac{1}{c_{2i}^2}\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}, \tag{5}$$

При этом, для используемых в дальнейшем напряжений получаются следующие выражения:

$$\sigma_{33}^{(i)} = \lambda_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \left(\lambda_i + 2\mu_i\right)\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} - 2\mu_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z \partial x},$$

$$\sigma_{31}^{(i)} = \mu_i \left(2\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}\right) \tag{6}$$

Общие решения уравнений (5) для полуплоскости, удовлетворяющие условиям затухания [4]:

$$\lim_{z\to\infty} \Phi_2 = 0,\ \lim_{z\to\infty} \Psi_2 = 0 \tag{7}$$

имеют вид

$$\Phi_2 = A_1 e^{-k\nu_{21} z} \exp ik(x - ct),\ \Psi_2 = B_1 e^{-k\nu_{22} z} \exp ik(x - ct) \tag{8}$$

где

$$\nu_{21} = \sqrt{1 - \xi\eta_2},\ \nu_{22} = \sqrt{1 - \xi},\ 0 < \xi < 1,\ \xi = \frac{\omega^2}{k^2 c_{22}^2},\ \eta_2 = \frac{c_{22}^2}{c_{21}^2},\ \mathrm{c} = \frac{\omega}{k}$$

Для слоя

$$\Phi_1 = (C_1\,\mathrm{sh}(k\nu_{11}z) + D_1\,\mathrm{ch}(k\nu_{11}z))\exp ik(x-ct)$$
$$\Psi_1 = (E_1\mathrm{ch}(k\nu_{12}z) + F_1\,\mathrm{sh}(k\nu_{12}z))\exp ik(x-ct) \qquad (9)$$

где

$$\nu_{11} = \sqrt{1-\xi c_0\eta_1},\ \nu_{12} = \sqrt{1-\xi c_0},\ \eta_1 = \frac{c_{12}^2}{c_{11}^2},\ c_0 = \frac{{c_{22}}^2}{{c_{12}}^2}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) на внешней границе слоя, получим при $z = -h$:

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = 0,\ w^{(1)} = 0 \qquad (10)$$

отсюда

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \psi_1 = 0$$

Общие решения уравнений (9), удовлетворяющие условиям (10), имеют вид:

$$\Phi_1 = G_1 c\,\mathrm{h}(k\nu_{11}(h+z))\exp ik(x-ct)$$
$$\Psi_1 = G_2 s\,\mathrm{h}(k\nu_{12}(h+z))\exp ik(x-ct) \qquad (11)$$

где $G_1 = \dfrac{D_1}{c\,\mathrm{h}(k\nu_{11}h)},\ G_2 = \dfrac{F_1}{c\,\mathrm{h}(k\nu_{12}h)}$

Удовлетворяя условиям (3), получим систему алгебраических однородных уравнений относительно коэффициентов A_1, B_1, G_1, G_2:

$$G_1[-\lambda_1 + (\lambda_1 + 2\mu_1)\nu_{11}^2]\mathrm{sh}(k\nu_{11}h) - 2G_2\mu_2 i\nu_{12}\,\mathrm{sh}(k\nu_{12}h) = 0$$
$$A_1[-\lambda_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\nu_{21}^2] + 2B_1\mu_2 i\nu_{22} = 0$$
$$G_1 i\mathrm{ch}(k\nu_{11}h) + G_2\nu_{12}\mathrm{ch}(k\nu_{12}h) - A_1 i + B_1\nu_{22} = 0 \qquad (12)$$
$$2G_1 i\mu_1\nu_{11}\mathrm{sh}(k\nu_{11}h) + \mu_1 G_2(1+\nu_{12}^2)\mathrm{sh}(k\nu_{12}h) + 2A_1\mu_2 i\nu_{21} - \mu_2 B_1(1+\nu_{22}^2) = 0$$

Для существования ненулевого решения детерминант этой системы должен быть равен нулю. Отсюда получается дисперсионное уравнение относительно ξ

$$\mu\sqrt{1-\xi}\Big[(2-\xi c_0)^2\,\mathrm{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0}) -$$
$$-4\sqrt{(1-\xi c_0\eta_1)(1-\xi c_0)}\,\mathrm{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0\eta_1})\Big] + \qquad (13)$$
$$+c_0\Big[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)}\Big]\sqrt{1-\xi c_0} = 0$$

где $\mu = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$.

Рассмотрим частные случаи [6]

1. при $kh << 1$, заменяя $\operatorname{th} x \sim x$,

$$\sqrt{1-\xi c_0}\left\{c_0\left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)}\right] + \right.$$
$$\left. + k\,h\,\mu\sqrt{1-\xi}\left[(2-\xi c_0)^2 - 4\left(1-\xi c_0\eta_1\right)\right]\right\} = 0, \tag{14}$$

которое имеет корни $\xi = 0$, $\xi = 1/c_0 = \dfrac{c_{12}{}^2}{c_{22}{}^2}$; $\Rightarrow \mathrm{v}_\phi = c_{12}$.

Уравнение (13) можно представить в виде

$\xi\sqrt{1-\xi c_0}\,R(\xi) = 0,$ где

$$R(\xi) = c_0\left[\xi - 4(1-\xi)\frac{1-\eta_2}{\sqrt{1-\xi}+\sqrt{1-\xi\eta_2}}\right] + kh\mu\sqrt{1-\xi}\left[\xi - 4c_0\left(1-\eta_2\right)\right] \tag{15}$$

Так как $R(0) < 0,\ R(1) > 0,$ существует, по крайней мере, один корень при $0 < \xi < 1$. Расчёты показывают, что

$\xi = \dfrac{c_{R1}{}^2}{c_{22}{}^2} + O(k\,h);\quad \mathrm{v}_\phi = c_{R1} + O(k\,h)$ при этом $\mathrm{v}_\phi < c_{R1}$

2. $kh >> 1$

2.1 $\xi < 1$ $\quad \dfrac{1}{c_0} < \xi < \dfrac{1}{c_0\eta_1};\quad \left(\dfrac{c_{12}}{c_{22}}\right)^2 < \xi < \left(\dfrac{c_{11}}{c_{22}}\right)^2;$

$\operatorname{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0}) = i\operatorname{tg}(kh\sqrt{\xi c_0 - 1});\qquad \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0\eta_1}) \sim 1$

$$c_0\left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)}\right]\sqrt{\xi c_0 - 1} +$$
$$+\mu\sqrt{1-\xi}\left[(2-\xi c_0)^2\operatorname{tg}(kh\sqrt{\xi c_0 - 1}) - 4\sqrt{(1-\xi c_0\eta_1)(\xi c_0 - 1))}\right] = 0 \tag{16}$$

$$\operatorname{tg}(kh\sqrt{\xi c_0 - 1}) = \frac{4\sqrt{(1-\xi c_0\eta_1)(\xi c_0 - 1)}}{(2-\xi c_0)^2} - \frac{c_0\left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)}\right]\sqrt{\xi c_0 - 1}}{\mu\sqrt{1-\xi}(2-\xi c_0)^2} \tag{16}$$

Так как $\xi < 1,$ получим $c_0 > 1$.

Для любого ξ из заданного интервала существует бесконечное множество $k\,h$, удовлетворяющих уравнению (13). Т.е. для фазовой скорости $c_{12} < \mathrm{v}_\phi < \min\left(\mathrm{c}_{11}, c_{22}\right)$ по слою распространяются волны с разными $k\,h$.

2.2 $\xi < \dfrac{1}{c_0} < \dfrac{1}{c_0\eta_1};\qquad \xi < 1$ тогда $\operatorname{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0}) \sim \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0\eta_1}) \sim 1$

$$\mu\sqrt{1-\xi}\left[(2-\xi c_0)^2 - 4\sqrt{(1-\xi c_0\eta_1)(1-\xi c_0)}\right] +$$
$$+c_0\sqrt{1-\xi c_0}\left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)}\right] = 0 \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет тривиальный корень $\xi = 0$. Уравнение (9) можно представить в виде

$$\xi R_1(\xi) = 0$$

где $R_1(\xi) = \mu\sqrt{1-\xi}\left[\xi c_0{}^2 + 4\sqrt{1-\xi c_0}\,\frac{c_0(1-\eta_1)}{\sqrt{1-\xi c_0}+\sqrt{1-\xi c_0\eta_1}}\right] +$ (18)

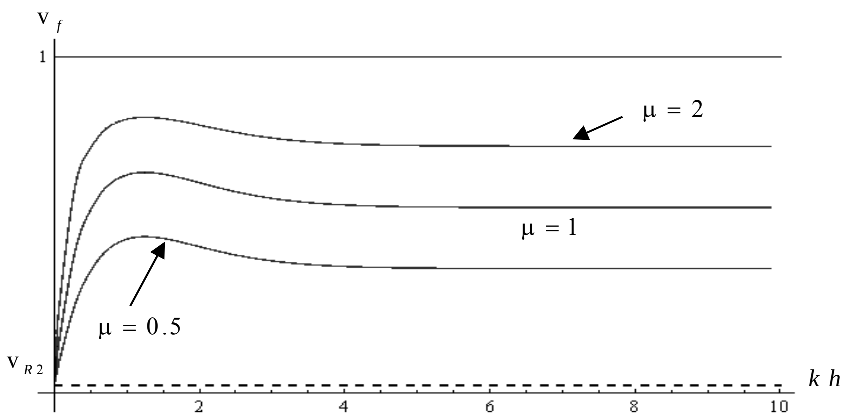
$$+c_0\sqrt{1-\xi c_0}\left[\xi + 4\sqrt{1-\xi}\,\frac{(1-\eta_2)}{\sqrt{1-\xi}+\sqrt{1-\xi\eta_2}}\right] = 0$$

$$R_1(0) = 2\big((1-\eta_2)+(1-\eta_1)\mu\big)c_0 > 0$$

При $c_0 < 1$ $\quad R_1(1) = -c_0\sqrt{1-c_0} < 0$.

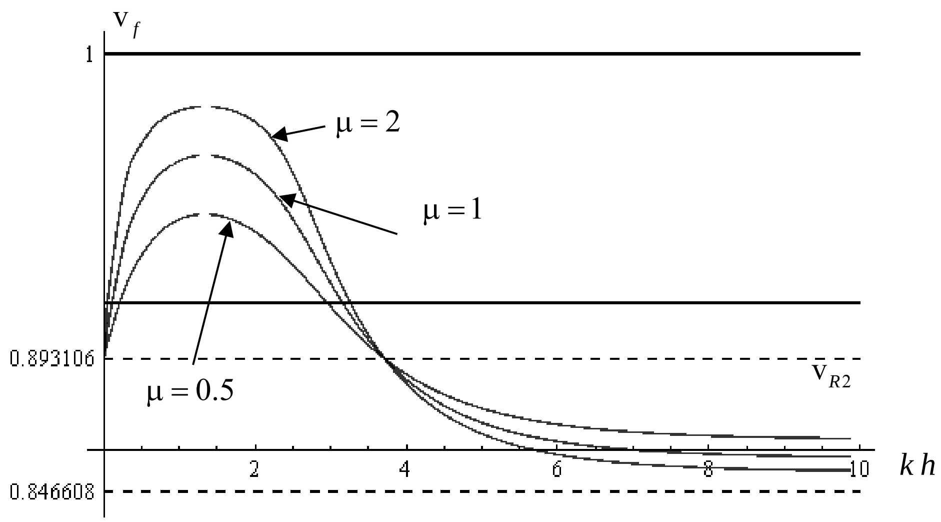
При $c_0 > 1$ $\quad R_1(1/c_0) = -\mu\sqrt{(c_0-1)c_0} < 0$.

То есть существует, по крайней мере, один корень при $0 < \xi < \min(1, 1/c_0)$ и всегда имеет решение $v_\phi < \min(c_{12}, c_{22})$



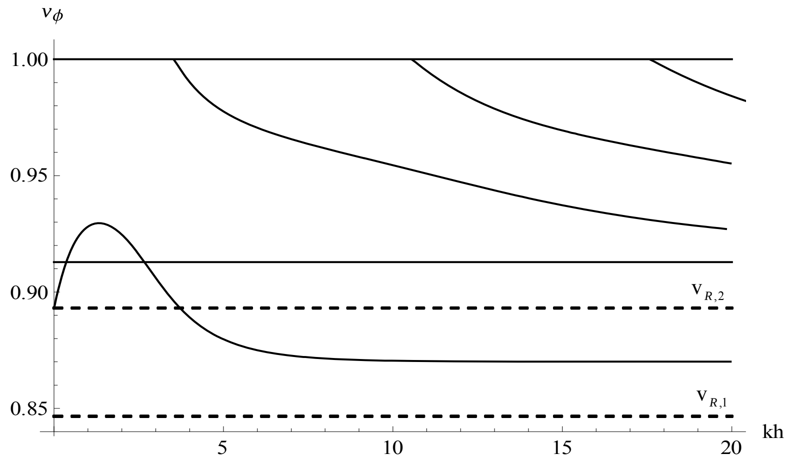
Фиг 2. Зависимость фазовой скорости от kh при

$$\mu = \{0.5, 1, 2\}\ c_0 = 0.5;\ \nu_1 = 0.3;\ \nu_2 = 0.1;$$



Фиг. 3 Зависимость фазовой скорости от kh

$\mu = \{0.5, 1, 2\}$ $c_0 = 1.2;$ $\nu_1 = 0.3;$ $\nu_2 = 0.1;$



Фиг. 4. Зависимость фазовой скорости от kh **при**

$\mu = 0.3;$ $c_0 = 0.5;$ $\nu_1 = 0.3;$ $\nu_2 = 0.1;$

Заключение. При $kh \ll 1$ (при длинных волнах) получим $v_\phi = c_{R1} + O(k\,h)$, которое означает, что фазовая скорость близка к скорости волн Рэлея в полуплоскости, оставаясь меньше. При $kh \gg 1$ и $c_0 > 1$ для любого ξ из $1/c_0 < \xi < 1$ существует бесконечное множество $k\,h$, удовлетворяющих дисперсионному уравнению. Расчёты показывают, что фазовая скорость достигает максимального значения при $kh \approx 1.2$ и практически не зависит от физических характеристик, хотя само максимальное значение увеличивается с увеличением μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chattarjee S.N. Propogation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space.// Pure and Applied Geophysics. 1971. V 86. №3. P 69-79.
2. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жёстко связанной с анизотропной полуплоскостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т 2. С 31-37.
3. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жёстком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказкий регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С.120-121.
4. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван: Изд-во НАН Армении. 1997. С.79-96.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. //Механика, 58, №2, 2005. С.9-15.
7. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с усиливающим тонким полубесконечным упругим слоем. /Тр. V международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 2-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, Ер.: НУАСА, 2017, с.69-70.

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович – К.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА. **Тел.:(**37410) 27-62-23. **E-mail:**amirjanyan@gmail.com

Белубекян Мелс Вагаршакович – К.ф.-м.н., гл.н.с. Института механики НАН РА

Геворкян Гнун Завенович – К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: gnungev@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович – К.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

Поступила в редакцию 10.01.2020