

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ
МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ ПО
ТЕОРИИ СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ**

Саркисян С.О., Хачатрян М.В.

Ключевые слова: микрополярный, стеснённое вращение, упругий, стержень, круговая ось, математическая модель, метод конечных элементов.

Sargsyan S.H., Khachatryan M.V.

Mathematical model of static deformation of micropolar elastic beam with a circular axis on the theory with constrained rotation and the finite element method

Key words: micropolar, constrained rotation, elastic, beam, circular axis, mathematical model, finite element method.

In present paper the applied (one-dimensional) model of micropolar elastic thin beam with a circular axis is constructed including the variation principles, on the basis of the two-dimensional equations of micropolar theory of elasticity with constrained rotation written in the polar coordinate system and previously developed hypotheses for thin bodies. Within the framework of this mathematical model, boundary problems with applied values are formulated, which are solved in the final form. Further, the scheme of application of finite element method (FEM) is developed for the boundary problems of micropolar elastic beam with a circular axis with constrained rotation. The boundary problems stated above are solved by using the FEM and on the basis of an analysis obtained through the numerical results, the specific property of micropolarity of the material is established, that it raises the rigidity of the beam as compared with the classical theory.

Սարգսյան Ս. Հ., Խաչատրյան Մ. Վ.

Շրջանային կորությամբ միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի ստատիկ դեֆորմացիայի մաթեմատիկական մոդելը ըստ կաշկանդված պտույտներով տեսության և վերջավոր տարրերի մեթոդը

Հիմնաբառեր: միկրոպոլյար, կաշկանդված պտույտներ, առաձգական, ձող, շրջանագծային առանցք, մաթեմատիկական մոդել, վերջավոր տարրերի մեթոդ

Աշխատանքում, հիմք ընդունելով կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար տեսության երկչափ հավասարումները գրված բևեռային կոորդինատական համակարգում և նախապես մշակված վարկածները բարակ մարմինների համար, կառուցվել է շրջանագծային կորությամբ առանցքով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի կիրառական (միաչափ) մոդելը՝ վարիացիոն սկզբունքներով հանդերձ: Մաթեմատիկական այս մոդելի շրջանակում ձևակերպվում են կիրառական նշանակության եզրային խնդիրներ, որոնք տեսականորեն լուծվում են բանաձևային տեսքերով: Այնուհետև, կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական շրջանագծային կորությամբ առանցքով կոր ձողերի կիրառական մոդելի եզրային խնդիրների լուծման համար մշակվում է վերջավոր տարրերի մեթոդի (ՎՏՄ) կիրարկման սխեման: ՎՏՄ մեթոդի կիրառմամբ լուծվում են վերևում դիտարկված եզրային խնդիրները և ստացված թվային արդյունքների անալիզի հիման վրա հաստատվում է նյութի միկրոպոլյարության հաշվառման այն յուրահատկությունը, որ այն բարձրացնում է ձողի կոշտությունը՝ համեմատած դասական տեսության հետ:

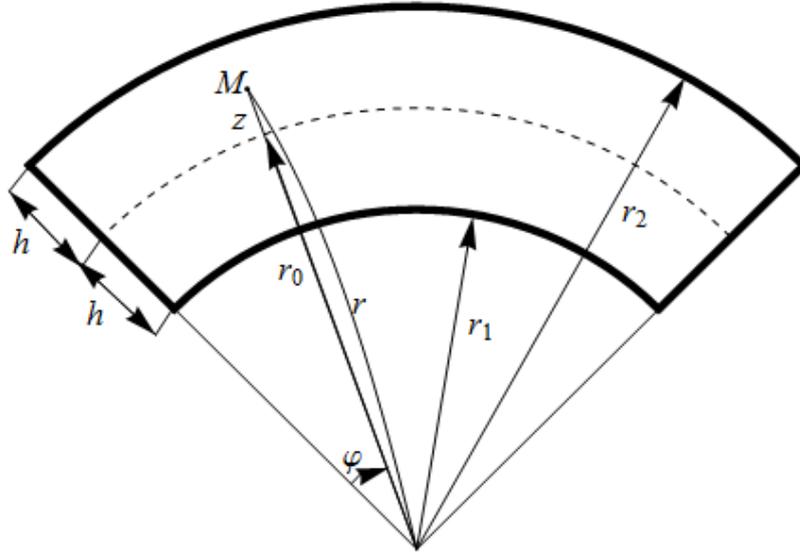
В работе на основании двумерных уравнений микрополярной теории упругости со стеснённым вращением, написанными в полярной системе координат и ранее разработанными гипотезами для тонких тел, построена (включая вариационные принципы) прикладная (одномерная) модель микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью. В рамках этой математической модели формулируются граничные задачи, имеющие прикладные значения, которые решаются в конечном виде. Далее, для граничных задач микрополярных со стеснённым вращением упругих кривых стержней с круговой осью разрабатывается схема применения метода конечных элементов (МКЭ). С применением МКЭ изучаются поставленные наверху граничные задачи и на основе анализа полученных численных результатов устанавливается то специфическое свойство учёта микрополярности материала, что она возвышает жёсткость стержня по сравнению с классическим случаем.

Введение. В строительной механике важное место занимает построение математических моделей и расчёт упругих тонких стержней с круговой осью [1-3]. В прикладной микрополярной теории упругости актуально построение моделей упругих тонких стержней с круговой осью как по теории с независимыми полями перемещений и вращений, так и по теории со стеснённым вращением.

В работах [4-7], на основе метода гипотез (которые были сформулированы адекватно со свойствами асимптотического решения соответствующих трёхмерных граничных задач в тонких областях [8]), построены прикладные теории микрополярных упругих тонких прямолинейных стержней, пластин и оболочек. В работах [9-11] развивается этот подход и в результате, построена модель микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью по теории с независимыми полями перемещений и вращений и разработан вариант метода конечных элементов (МКЭ) для решения соответствующих граничных задач. В работах [12,13] аналогичным подходом построена классическая модель тонкого стержня с круговой осью с учётом поперечных сдвиговых деформаций и разработан МКЭ для решения соответствующих краевых задач.

В данной работе аналогичным подходом построена прикладная модель микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью по теории со стеснённым вращением и разработан соответствующий вариант метода конечных элементов. Рассматриваются некоторые прикладные граничные задачи по указанной модели, для которых построены как теоретические решения, так и численные решения при помощи разработанного МКЭ. На основе анализа численных результатов устанавливается основное свойство учёта микрополярности материала о повышении жёсткости упругого стержня по сравнению с классическим случаем.

1. Вывод основной системы уравнений микрополярного упругого стержня с круговой осью со стеснённым вращением. Рассмотрим стержень с круговой осью (фиг. 1), имеющий постоянное поперечное сечение: высотой $2h = r_2 - r_1$ и шириной b . Ось стержня – дуга окружности радиуса r_0 ; материал стержня – изотропный, микрополярно-упругий. Ширина b этого стержня настолько мала, что её деформирование возможно рассматривать как задачу обобщённого плоского напряжённого состояния в его срединной плоскости.



Фиг. 1

Таким образом, в срединной плоскости стержня, в полярной системе координат (r, φ) $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, имеют место уравнения обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости со стеснённым вращением [14]:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}], \quad \gamma_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}], \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \\ \chi_{13} = \frac{1}{B} \mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{1}{B} \mu_{23} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V_2, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial r}, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{1}{r} V_1, \\ \chi_{13} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial r}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{1}{r} V_1 \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ – силовые (обычные) напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения; $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \tilde{\gamma}_{12}$ – деформации; χ_{13}, χ_{23} – изгиб-кручения; V_1, V_2 – перемещения; ω_3 – поворот точек срединной плоскости вокруг оси, перпендикулярной к срединной плоскости (этот поворот определяется по соответствующей формуле классической теории [15]); E, ν ($\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$), B – упругие постоянные микрополярного материала.

Будем считать, что на лицевых линиях $r=r_1, r=r_2$ заданы внешние усилия и моменты:

$$\sigma_{21} = q_1^-, \sigma_{22} = q_2^-; \mu_{23} = m^- \text{ на } r = r_1, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{21} = q_1^+, \sigma_{22} = q_2^+; \mu_{23} = m^+ \text{ на } r = r_2,$$

а на крайних сечениях области ($\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$) имеют место один из следующих вариантов граничных условий:

$$\text{а) } \sigma_{11} = \sigma_{11}', \sigma_{12} = \sigma_{12}', \mu_{13} = \mu_{13}' \text{ при } \varphi = 0; \quad (1.5)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}'', \sigma_{12} = \sigma_{12}'', \mu_{13} = \mu_{13}'' \text{ при } \varphi = \varphi_1,$$

$$\text{б) } V_1 = V_1', V_2 = V_2', \omega_3 = \omega_3' \text{ при } \varphi = 0; \quad (1.6)$$

$$V_1 = V_1'', V_2 = V_2'', \omega_3 = \omega_3'' \text{ при } \varphi = \varphi_1,$$

$$\text{в) } \sigma_{11} = \sigma_{11}', V_2 = V_2', \mu_{13} = \mu_{13}' \text{ при } \varphi = 0; \quad (1.7)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}'', V_2 = V_2'', \mu_{13} = \mu_{13}'' \text{ при } \varphi = \varphi_1.$$

Удельная потенциальная энергия деформации микрополярного упругого изотропного тела со стесненным вращением выражается следующей формулой:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \tilde{\gamma}_{12} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{23} \chi_{23} \right) \quad (1.8)$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{11} \gamma_{22} + \mu \tilde{\gamma}_{12}^2 + \frac{1}{B} (\chi_{13}^2 + \chi_{23}^2) \right\}. \quad (1.9)$$

Для построения прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью со стесненным вращением в основу будем принимать гипотезы, которые изложены в работах [7].

1. В качестве исходной кинематической гипотезы для перемещений, примем гипотезу прямой линии, т.е. гипотезу Тимошенко; это означает, что линейный элемент, первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости стержня до

деформации, остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и поворота по толщине срединной плоскости кругового стержня:

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi), \quad V_2 = w(\varphi), \quad (1.10)$$

где $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по её касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi)$ – это прогиб стержня); $\psi(\varphi)$ – угол поворота первоначально нормального элемента.

Для поворота точек срединной плоскости вокруг оси, перпендикулярной к срединной плоскости, используя формулу (1.3)₆ и (1.10), получим:

$$\omega_3 = \Omega_3(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \psi \right) \quad (1.11)$$

Формулы (1.10) и (1.11) выражают кинематическую картину деформаций упругого стержня с круговой осью по теории со стеснённым вращением.

2. Гипотеза о тонкостенности стержня, при которой будем принимать приближённое равенство:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0 \left(1 + \frac{z}{r_0} \right)} \approx \frac{1}{r_0}.$$

3. Предположения о малости в первом уравнении закона Гука ((1.2)₁) нормального напряжения σ_{22} относительно нормального напряжения σ_{11} .

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi). \quad (1.12)$$

После определения вышеуказанных величин, формулу для σ_{21} будем уточнять следующим образом. Проинтегрируем по z второе из (1.1) ((1.1)₂) уравнение равновесия и при определении постоянного интегрирования (вернее функции от φ) будем требовать равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. После указанного интегрирования полученное окончательное выражение прибавим к формуле (1.12).

Теперь переходим к определению деформаций и напряжений.

На основании формул (1.10), (1.13) и (1.3) для деформаций и изгибов-кручений будем иметь:

$$\gamma_{11} = \left(\frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w \right) + z \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad (1.13)$$

$$\chi_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (1.14)$$

Если принять обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \\ \mathbf{K}_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

то для деформаций, изгибов-кручений получим:

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + z\mathbf{K}_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \tilde{\Gamma}_{12}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (1.16)$$

Здесь Γ_{11} представляет собой продольную относительную деформацию средней линии; \mathbf{K}_{11} – изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); $\tilde{\Gamma}_{12}$ – сдвиговая деформация; k_{13} – изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Используя гипотезу 3) о малости нормального напряжения σ_{22} и формулу (1.16)₁, из формулы (1.2)₁ для напряжений σ_{11} будем иметь:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0(\varphi) + z \sigma_{11}^1(\varphi), \quad (1.17)$$

где

$$\sigma_{11}^0(\varphi) = E\Gamma_{11}, \quad \sigma_{11}^1(\varphi) = E\mathbf{K}_{11}. \quad (1.18)$$

Используя формулы (1.2)₃, (1.14)₃, (1.15)₂, получим также:

$$\sigma_{12} + \sigma_{21} = 2\mu\tilde{\Gamma}_{12}. \quad (1.19)$$

Рассмотрим второе уравнение равновесия ((1.1)₂), которое проинтегрируем по r с учётом тонкостенности области и граничных условий из (1.4) для σ_{22} , окончательно получим:

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(q_2^+ + q_2^-) - \frac{h^2}{2} \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 + z \left(\frac{1}{r_0} \sigma_{11}^0 - \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{12}^0}{d\varphi} \right) + \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 \frac{z^2}{2}. \quad (1.20)$$

Для моментного напряжения μ_{13} на основании формулы (1.2)₅ и с учётом формулы из (1.16) для χ_{13} , будем иметь:

$$\mu_{13} = Bk_{13}. \quad (1.21)$$

Значение для моментного напряжения μ_{23} получим из третьего уравнения равновесия ((1.1)₃) и соответствующих граничных условий из (1.4) :

$$\mu_{23} = \frac{1}{2}(m^+ + m^-) - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d\mu_{13}^0}{d\varphi} + \sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 \right). \quad (1.22)$$

В основу принимая гипотезу 4), в результате, окончательно для σ_{21} получим:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi) + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^1}{d\varphi} - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^0}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} \sigma_{12}^0 \right) - \frac{z^2}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^1}{d\varphi}. \quad (1.23)$$

В прикладной теории микрополярного упругого стержня с круговой осью со стеснённым вращением, вместо компонент силовых и моментных напряжений будем вводить статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия N , Q_{12} , Q_{21} и моменты: M_{11} , L_{13} , которые выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-h}^h \sigma_{11} dz, \quad Q_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, \quad Q_{21} = \int_{-h}^h \sigma_{21} dz, \\ M_{11} &= \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dz. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Теперь, на основе формулы для σ_{21} ((1.23)), σ_{22} ((1.20)) и μ_{23} ((1.22)), удовлетворяя граничным условиям (1.4), с учётом формул (1.24), приходим к следующей системе уравнений равновесия прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью со стеснённым вращением:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} N - \frac{1}{r_0} \frac{dQ_{12}}{d\varphi} &= q_2^+ - q_2^-, \quad \frac{1}{r_0} Q_{12} + \frac{1}{r_0} \frac{dN}{d\varphi} = -(q_1^+ - q_1^-) \\ Q_{21} - \frac{1}{r_0} \frac{dM_{11}}{d\varphi} &= h(q_1^+ + q_1^-), \quad Q_{21} - Q_{12} - \frac{1}{r_0} \frac{dL_{13}}{d\varphi} = m^+ - m^-. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Далее при помощи формул (1.17), (1.19), (1.21) получим соотношения упругости для указанной модели:

$$\begin{aligned} N &= 2Eh\Gamma_{11}, \quad Q_{12} + Q_{21} = 4h\mu\tilde{\Gamma}_{12}, \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Присоединим к уравнениям равновесия (1.25) и соотношениям упругости (1.26) ещё и геометрические уравнения (1.15):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \\ K_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \psi \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Уравнения равновесия (1.24), соотношения упругости (1.26) и геометрические соотношения (1.27) представляют собой основные уравнения прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью со стеснённым вращением. К этой системе уравнений следует присоединить соответствующие граничные условия.

W_0 – плотность потенциальной энергии деформации построенной прикладной модели плоского изгиба микрополярного упругого изотропного стержня с круговой осью по теории со стеснённым вращением получим на основе формулы (1.8) и полученные выше выражения:

$$W_0 = \frac{1}{2} \left[N\Gamma_{11} + M_{11}K_{11} + \frac{1}{2}(Q_{12} + Q_{21})\tilde{\Gamma}_{12} + L_{13}k_{13} \right] \quad (1.28)$$

или

$$W_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + E\frac{h^3}{3}K_{11}^2 + h\mu\tilde{\Gamma}_{12}^2 + Bhk_{13}^2. \quad (1.29)$$

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации (потенциальная энергия деформации стержня плюс потенциал внешних усилий) при прикладном плоском изгибе упругого стержня с круговой осью будет выражаться так:

$$U = \int_0^a (W_0 - 2hq_2\psi - 2qw - 2q_1u - 2m\Omega_3) ds - \left((Q_{12}w + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=a} - (Q_{12}w + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=0} \right), \quad (1.30)$$

где введены следующие обозначения: $q = \frac{1}{2}(q_2^+ - q_2^-)$, $q_1 = \frac{1}{2}(q_1^+ - q_1^-)$,

$$q_2 = \frac{1}{2}(q_1^+ + q_1^-).$$

Отметим, что система уравнений прикладной модели плоского изгиба упругого стержня по теории со стеснённым вращением (1.25)-(1.27) представляет собой систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которой складывается из общего решения однородной системы ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $m = 0$,) и частного решения неоднородной системы.

Подставляя (1.26) в (1.25), имея в виду (1.27), из уравнений равновесия получим следующую систему однородных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно функций u, w, ψ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(E + \frac{B}{4r_0^2} \right) \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{r_0} (E + \mu) \frac{dw}{ds} - \frac{B}{4r_0} \frac{d^3 w}{ds^3} + \frac{B}{4r_0} \frac{d^2 \psi}{ds^2} - \\
-\frac{\mu}{r_0^2} u + \frac{\mu}{r_0} \psi = 0 \\
\left(\frac{Eh^2}{3} + \frac{B}{4} \right) \frac{d^2 \psi}{ds^2} - \frac{B}{4} \frac{d^3 w}{ds^3} + \frac{B}{4r_0} \frac{d^2 u}{ds^2} - \mu \frac{dw}{ds} + \frac{\mu}{r_0} u - \mu \psi = 0 \\
\frac{1}{r_0} (E + \mu) \frac{du}{ds} + \frac{E}{r_0^2} w + \frac{B}{4} \frac{d^4 w}{ds^4} - \frac{B}{4r_0} \frac{d^3 u}{ds^3} - \frac{B}{4} \frac{d^3 \psi}{ds^3} - \\
-\mu \frac{d^2 w}{ds^2} - \mu \frac{d\psi}{ds} = 0, \quad s = r_0 \phi.
\end{array} \right. \quad (1.31)$$

Решение системы уравнений (1.31) можно привести к решению дифференциального уравнения шестого порядка относительно функции ψ :

$$\frac{d^6 \psi}{ds^6} - \frac{4\mu r_0^2 (Eh^2 + 3B) - BEh^2}{r_0^2 BEh^2} \frac{d^4 \psi}{ds^4} - \frac{4\mu (Eh^2 + 3B)}{r_0^2 BEh^2} \frac{d^2 \psi}{ds^2} = 0, \quad (1.32)$$

характеристическое уравнение которой, в итоге, представляет собой биквадратное уравнение.

Общее решение этого уравнения будет:

$$\psi = C_1 + C_2 s + C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s + C_5 e^{k_{5,6} s} + C_6 e^{-k_{5,6} s}, \quad (1.33)$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – постоянные интегрирования,

$$\beta = \frac{1}{r_0}; \quad k_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{4\mu (Eh^2 + 3B)}{BEh^2}}.$$

Из (1.31) после некоторых преобразований получим связь между ψ и w :

$$\begin{aligned}
\frac{2\mu}{E + 2\mu} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{r_0^2} w \right) &= - \frac{r_0^2 h^2 B}{3(4\mu r_0^2 - B)} \frac{d^5 \psi}{ds^5} - \\
- \frac{Eh^2 (-8\mu r_0^2 (E + \mu) + EB) - 12\mu r_0^2 B (E + 2\mu)}{3E(E + 2\mu)(4\mu r_0^2 - B)} \frac{d^3 \psi}{ds^3} - \frac{2\mu}{E + 2\mu} \frac{d\psi}{ds}.
\end{aligned} \quad (1.34)$$

Теперь, (1.33), подставляя в (1.34), для функции W получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{r_0^2} w = D_1 2\beta (C_3 \cos \beta s - C_4 \sin \beta s) + D_2 (k_5^2 + \beta^2) (C_5 k_5 e^{k_5 s} + C_6 k_6 e^{k_6 s}) - C_2, \quad (1.35)$$

где

$$D_1 = \frac{E + 2\mu}{4\mu} \left(-\frac{\beta^4 h^2 B}{3(4\mu - B\beta^2)} + \frac{h^2 \beta^2 (-8\mu(E + \mu) + EB\beta^2)}{3(E + 2\mu)(4\mu - B\beta^2)} - \frac{4\mu B}{E(4\mu - B\beta^2)} - \frac{2\mu}{E + 2\mu} \right),$$

$$D_2 = \frac{E + 2\mu}{4\mu} \left(-\frac{h^2 B}{3(4\mu - B\beta^2)} k_5^4 - \left(\frac{h^2 (-8\mu(E + \mu) + EB\beta^2)}{3(E + 2\mu)(4\mu - B\beta^2)} - \frac{4\mu B}{E(4\mu - B\beta^2)} \right) k_5^2 - \frac{2\mu}{E + 2\mu} \right)$$

Общее решение дифференциального уравнения (1.35) имеет вид:

$$w = C_7 \cos \beta s + C_8 \sin \beta s + D_1 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) s + D_2 (C_5 k_5 e^{k_5 s} + C_6 k_6 e^{k_6 s}) - r_0^2 C_2, \quad (1.36)$$

где C_7 и C_8 – новые постоянные интегрирования.

Далее, из систем дифференциальных уравнений (1.31), получим также следующую формулу для перемещения u через w и ψ :

$$u = -\frac{r_0^3 h^2 E^2}{6\mu(E + 2\mu)} \frac{d^4 \psi}{ds^4} + \frac{E r_0^3}{E + 2\mu} \frac{d^3 w}{ds^3} + \frac{6E\mu r_0^3 - Eh^2 r_0 (E + 2\mu)}{6\mu(E + 2\mu)} \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{2r_0(E + \mu)}{E + 2\mu} \frac{dw}{ds} + r_0 \psi \quad (1.37)$$

Подставляя (1.33) и (1.36) в (1.37), получим окончательное выражение для u :

$$u = D_3 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + D_1 (C_3 \cos \beta s - C_4 \sin \beta s) s + D_4 (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) + \frac{1}{\beta} C_1 + \frac{1}{\beta} C_2 s - C_7 \sin \beta s + C_8 \cos \beta s. \quad (1.38)$$

При помощи (1.33), (1.36) и (1.37), (1.11), получим выражения также для Ω_3 :

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & \left(\frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2r_0} D_3 \right) (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + \\ & + \left(\frac{1}{2} D_2 k_5^2 - \frac{1}{2r_0} D_4 - \frac{1}{2} \right) (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) - C_2 s - C_1, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где

$$\begin{aligned} D_3 = & \frac{1}{E+2\mu} \left(-\frac{E^2 h^2 \beta}{6\mu} - \frac{3E}{\beta} D_1 - \frac{6\mu E - E h^2 \beta^2 (E+2\mu)}{6\mu\beta} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\beta} (E+\mu) D_1 + \frac{1}{\beta} \right), \\ D_4 = & \frac{1}{E+2\mu} \left(-\frac{E^2 h^2}{6\mu\beta^3} k_5^4 - \frac{E}{\beta^3} k_5^4 D_2 + \frac{6\mu E - E h^2 \beta^2 (E+2\mu)}{6\mu\beta^3} k_5^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\beta} (E+\mu) k_5^2 D_2 + \frac{1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

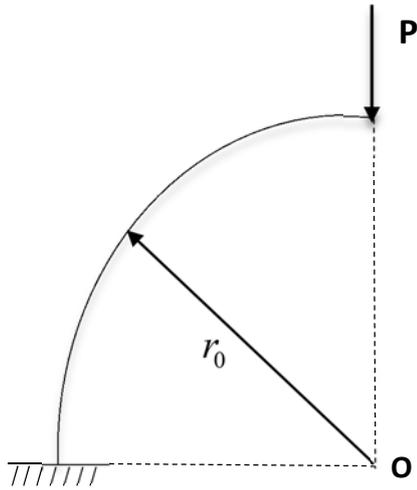
Таким образом, построено общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (1.31). Для определения частного решения неоднородной системы (1.25)-(1.27), в каждой частной задаче будем рассматривать отдельно.

Для определения постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ удовлетворим граничным условиям. Понятно, что в результате получим восемь линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно искомых постоянных интегрирования. После решения алгебраической системы уравнений получим все значения постоянных интегрирования и окончательно выражения для искомых основных функций w, u, ψ и Ω_3 .

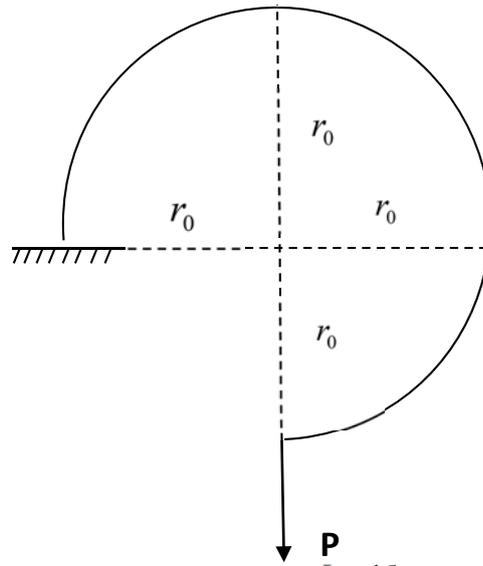
2. Постановка и решение некоторых прикладных граничных задач микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью по теории со стеснённым вращением.

Будем изучать задачи изгиба тонкого стержня с круговой осью при следующих нагружениях и граничных условиях: 1) когда один конец стержня жёстко закреплён, а на другом конце приложена вертикальная сосредоточенная сила, а $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (фиг.1а), 2) когда один конец жёстко закреплён, а на другом конце приложена вертикальная сосредоточенная сила, а $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ (фиг.1б), 3) когда один конец жёстко закреплён, а на другом конце приложена горизонтальная сосредоточенная сила, а $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (фиг.1в), 4) когда один конец жёстко закреплён, а другой конец –

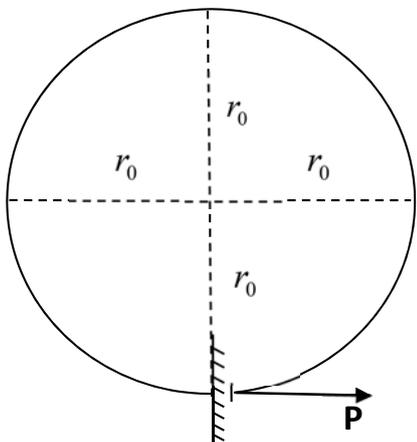
свободный: на стержень действует равномерно распределённая нормальная нагрузка, а $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (фиг.1г).



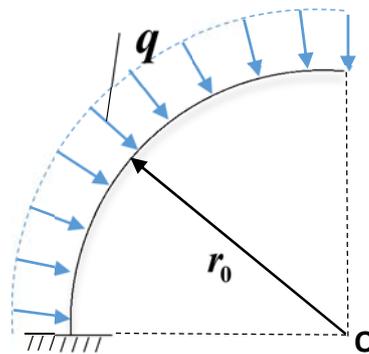
Фиг.1а



Фиг.1б



Фиг.1в



Фиг.1г

Для решения задач 1а-1в используем общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (1.31) (т.е. выражения (1.33), (1.36), (1.38), (1.39)) и для

определения постоянных интегрирования удовлетворим следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{Задача 1а,1б: } w = 0, u = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0 \text{ при } s = 0; \\ Q_1 = P, N = 0, M_{11} = 0, L_{13} = 0 \text{ при } s = a. \end{aligned} \quad (2.1_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Задача 1в: } w = 0, u = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0 \text{ при } s = 0; \\ Q_1 = 0, N = -P, M_{11} = 0, L_{13} = 0 \text{ при } s = a. \end{aligned} \quad (2.1_2)$$

Для решения задачи 1г, во-первых, необходимо к общему решению однородной системы ((1.33), (1.36), (1.38), (1.39)) прибавить частное решение неоднородной системы (1.25)-(1.27). Это частное решение для задачи 1г легко построить и тогда общее решение неоднородной задачи можем представить в виде:

$$\psi = C_1 + C_2 s + C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s + C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} w = C_7 \cos \beta s + C_8 \sin \beta s + D_1 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) s + \\ + D_2 (C_5 k_5 e^{k_5 s} + C_6 k_6 e^{k_6 s}) - r_0^2 C_2 + \frac{q}{Eh\beta^2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u = D_3 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + D_1 (C_3 \cos \beta s - C_4 \sin \beta s) s + \\ + D_4 (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) + \frac{1}{\beta} C_1 + \frac{1}{\beta} C_2 s - C_7 \sin \beta s + C_8 \cos \beta s. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 = \left(\frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2r_0} D_3 \right) (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + \\ + \left(\frac{1}{2} D_2 k_5^2 - \frac{1}{2r_0} D_4 - \frac{1}{2} \right) (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) - C_2 s - C_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Удовлетворим следующим граничным условиям для задачи 1г:

$$w = 0, u = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0 \text{ при } s = 0;$$

$$Q_1 = 0, N = 0, M_{11} = 0, L_{13} = 0 \text{ при } s = a.$$

3. Развитие метода конечных элементов для краевых задач микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью по модели со стеснённым вращением. Построение матрицы жёсткости конечного элемента.

Основными кинематическими параметрами в задаче изгиба микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью по модели со стеснённым вращением являются: прогиб - $w(s)$, осевое перемещение - $u(s)$ и угол поворота нормального элемента - $\psi(s)$. Распределение основных кинематических переменных вдоль элемента дуги оси стержня аппроксимируем полиномами:

$$\begin{aligned} w(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3, \quad u(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3, \\ \psi(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3, \quad s = r_0 \varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь a_i, b_i, c_i – коэффициенты, которые ниже будем выражать через узловые перемещения и повороты. Для узловых перемещений примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
w(0) &= \delta_1, & w'(0) &= \delta_2, & u(0) &= \delta_3, & u'(0) &= \delta_4, \\
\psi(0) &= \delta_5, & \psi'(0) &= \delta_6, & w(a) &= \delta_7, & w'(a) &= \delta_8, \\
u(a) &= \delta_9, & u'(a) &= \delta_{10}, & \psi(a) &= \delta_{11}, & \psi'(a) &= \delta_{12}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Как видим, данный конечный элемент имеет двенадцать степеней свободы.

Подставим разложения (3.1) в (3.2), выразим коэффициенты a_i, b_i, c_i через узловые перемещения и повороты δ_k . Подставив таким образом определённые a_i, b_i, c_i в (3.1), для перемещений и поворотов имеем аппроксимации:

$$w(s) = \sum_{i=1,2,7,8} \delta_i N_i(s), \quad u(s) = \sum_{i=3,4,9,10} \delta_i N_i(s), \quad \psi(s) = \sum_{i=5,6,11,12} \delta_i N_i(s), \tag{3.3}$$

где $N_i(s)$ – функции формы элемента, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
N_1 = N_3 = N_5 &= 1 - \frac{3}{a^2} s^2 + \frac{2}{a^3} s^3, & N_2 = N_4 = N_6 &= s - \frac{2}{a} s^2 + \frac{1}{a^2} s^3, \\
N_7 = N_9 = N_{11} &= \frac{3}{a^2} s^2 - \frac{2}{a^3} s^3, & N_8 = N_{10} = N_{12} &= -\frac{1}{a} s^2 + \frac{1}{a^2} s^3.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Подставив (3.3) в функционал (1.30), после выполнения интегрирования получим функцию от двенадцати независимых переменных $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{12}$. Минимизация функционала (1.30) приводит к нахождению минимума функции двенадцати независимых переменных. Вычислив соответствующие частные производные, обращая их в ноль, приходим к следующему матричному уравнению:

$$[K] \cdot \{\delta\} = [P]. \tag{3.5}$$

Здесь K – матрица жёсткости элемента размером 12×12 , представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов; $\{\delta\}^T = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{12})$ – вектор узловых перемещений и поворотов; а вектор узловых нагрузок выражается так: Задача 1а, 1б: $\{P\}^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, P, 0, 0, 0, 0, 0\}$,

$$\text{Задача 1в: } \{P\}^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -P, 0, 0, 0\},$$

$$\text{Задача 1г: } \{P\}^T = \left\{ aq, \frac{a^2 q}{6}, 0, 0, 0, 0, aq, -\frac{a^2 q}{6}, 0, 0, 0, 0 \right\}.$$

В результате, решение системы (3.5) с учётом соответствующих граничных условий даст величины узловых обобщённых перемещений. Для повышения точности решений, понятно, что необходимо разбивать стержень на несколько конечных элементов.

Результат вычислений приведём для случая, когда физические постоянные и геометрические размеры балки имеют значения:

$$\mu = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}, E = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}, r_0 = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$h = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}, B = 3 \cdot 10^4 \text{ Н}. P = 10^4 \text{ Н} \text{ (для задачи 1а,б,в)}, q = 10^5 \text{ Па} \text{ (для задач 1г)},$$

Приведём также результаты по классической теории упругого тонкого стержня с круговой осью при её изгибе с учётом поперечных сдвигов [12,13].

Таблица 1. Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1а).

Количество элементов	w (м) при $s = a = 15 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ($\times 10^4$)	Классическая ($\times 10^4$)
2	2,381	10,61
4	2,395	10,87
Точное решение	2,395	10,88

Таблица 2. Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1б).

Количество элементов	w (м) при $s = a = 45 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ($\times 10^4$)	Классическая ($\times 10^3$)
2	2,129	0,394
4	6,563	2,361
8	7,168	3,231
Точное решение	7,187	3,265

Таблица 3. Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1в).

Количество элементов	u (м) при $s = a = 60 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ($\times 10^3$)	Классическая ($\times 10^3$)
2	-2,086	-5,61
4	-2,712	-11,43
8	-2,888	-13,04
Точное решение	-2,896	-13,18

Таблица 4. Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1г).

Количество элементов	w (м) при $s = a = 15 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ($\times 10^5$)	Классическая ($\times 10^4$)
2	2,895	1,288
4	2,911	1,321
Точное решение	2,911	1,322

Как можно убедиться, учёт микрополярности материала приводит к повышению жёсткости стержня.

Заключение. Построена прикладная модель микрополярного тонкого стержня с круговой осью на основе теории со стеснённым вращением и для этой модели разработана расчётная схема метода конечных элементов. На основе анализа численных результатов установлено специфическое свойство учёта микрополярности материала о повышении жёсткости стержня по сравнению с классическим случаем.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 18RF-106 и 18-53-05022, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трёх томах. Под общей редакцией: И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т.1. М.: Изд-во «Машиностроение». 1968. 832с. Strength, stability, fluctuations. Handbook in three volumes. Under total editorship: Birger I.A., Panovka Ya.G. Vol.1. M.: Pub. of Mech. Eng.1968. 832p. (in Russian).
2. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. 341с. Kuzmin M.A, Lebedev D.L, Popov B.G. Strength calculations of the elements of multilayer composite structures. M.: Pub.of BMSTU after N.E. Bauman. 2012. 341p. (in Russian).
3. Лурье А. И. Теория упругости М.:Изд-во «Наука». 1970. 940с. Lurie A. I. Theory of Elasticity M.: Pub. of Science. 1970. 940p. (in Russian).
4. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
5. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып.2. С.148-155. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol.53. №2. P. 275-282. (in Russian).
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells // Journal of Physical Mezomechanics. 2012. Vol.15. №1-2. P.69-79. (in Russian).
7. Саркисян С.О. Общая теория тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости со стесненным вращением// Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённой 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва: 20-21 января 2011 года. С. 231-235. Sargsyan S.H. General theory of thin shells on the basis of asymmetric elasticity theory with constrained rotation// Elasticity and inelasticity. Proceedings of the International Scientific Symposium on the Problems of Mechanics of Deformable Bodies dedicated to the 100th anniversary of the birth of A. A. Ilyushin. Moscow. 20-21 January 2011. P. 231-235. (in Russian).

8. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells // *Advances in Pure Mathematics*. 2015. №5. P.629-642.
9. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Mathematical model of static deformation of micropolar elastic circular thin bar// *Proceedings of the XLIV Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics»*. St. Petersburg: Ins. for problems in mechanical engineering. 2016. P. 367-374.
10. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Вариационный принцип и энергетика деформаций прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня// *Изв. НАН Армении. Механика*. 2016. Т.69. №2. С.55-66. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Variation principle and energetics of deformation of applied model of micropolar elastic circular thin bar// *Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics*. 2016. V.69. №2. P. 55-66. (in Russian).
11. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов // *Актуальные проблемы прочности. Монография*. Витебск: НАН Беларуси. Т.1. Глава 14. 2018. С. 258-271. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Mathematical model of static deformation of micropolar elastic beam with a circular axis and the finite element method// *Actual problems of strength. Monograph*. Vitebsk: NAS of Belarus.V.1. Chapter 14. 2018. P.258-271. (in Russian).
12. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций// *Докл. НАН Армении*. 2016. Т.116. №1. С.34-42. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Mathematical model of elastic plane curve beam (circular) with consideration of shear deformations on the basis of the classical theory of elasticity// *Reports of NAS of Armenia*. 2016. Vol.116. №1. P.34-42. (in Russian).
13. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Классическая модель статики упругих тонких стержней с круговой осью с учетом поперечных сдвигов и метод конечных элементов// *В сб. науч. Тр. V международной конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды»*. Цахкадзор, окт.02-07. Армения. Изд-во НАН РА. 2017. С.125-126. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. The classical model of the statics of elastic thin beams with a circular axis with account of transverse shears and the finite element method// *The proceeding of V international conference. Topical problems of continuum mechanics*. Tsakhkadzor, oct.02-07.Armenia. Publishing of NAS of RA. 2017. P.125–126. (in Russian).
14. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевск. Ун-та. 1965. 162с. Savin G.N. Basics of the plane moment theory of elasticity. Kiev. Publishing of Kiev. University. 1965. 162p. (in Russian).
15. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с. Novatsky V. Theory of elasticity. M.: Mir, 1975. 862p. (in Russian).

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович – член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, (+374 93) 15 16 98. **E-mail:** s_sargsyan@yahoo.com

Хачатрян Мелине Вардановна – аспирант кафедры Математики, физики и информационных технологий Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна, (+374 94) 61 82 13. **E-mail:** khachatryanmeline@mail.ru

Поступила в редакцию 12.02.2019