ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №3, 2019 Механика

УДК 539.3 **Doi- http://doi.org/10.33018/72.3.2**

О СВЕРХЗВУКОВОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ СЖАТОЙ ПАНЕЛИ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, сжимающие усилия, дестабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание.

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

About a problem of the supersonic divergence of a compressed panel

Key words: stability, compressive forces, destabilizing effect, divergence of the panel, localized divergence, supersonic overrunning

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate with one free and clumped edges streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of compressed forces at the two hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the compressed forces leads to the destabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ կայունություն, սեղմող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր կոշտ ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին, բեռնված սեղմող ուժերով: Ցույց է տրված սալի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում լոկալիզացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և լոկալիզացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները: Ցույց է տրված, որ սեղմող ուժերը նպաստում են ապակայունացման:

В статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния на потерю статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия сжатой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающего на её свободный край, в предположении, что сжимающие силы направлены перпендикулярно к скорости потока газа.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» в линейной постановке. Установлена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая в пространстве «существенных» параметров системы выделить области устойчивости и неустойчивости: области дивергенции панели и локализованной дивергенции. Показано, что при обтекании первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

Введение. Как известно [1, 3], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, на много мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

В предлагаемой статье исследуется зависимость видов потери статической устойчивости панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, от характера первоначального напряжённого состояния. Исследованию этих задач посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1,3–6]. Однако здесь, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, к решению задачи статической устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа панели с двумя шарнирно закреплёнными краями, с одним свободным и противоположным ему жёстко защемлённым краями, равномерно сжатой по направлению скорости потока газа, набегающего на её свободный край, применён новый аналитический метод, подробно изложенный в работе [7], удобный для нахождения точного решения широкого класса подобных задач.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, край $x = a$ жёстко защемлён, а параллельные потенциальному потоку газа края $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. При этом полагаем, что шарниры идеальны.

Пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_y = 2h\sigma_y$ в срединной плоскости панели, являющимися результатом нагрева или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_y можно считать равномерно распределёнными по ширине пластинки a (сторона пластинки по потоку), постоянными во всей срединной поверхности и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1,5].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [2]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y)$ пластинки малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна смежная с ней искривлённая форма равновесия, которая сопровождается резким монотонным выпучиванием пластинки (дивергенция панели) либо выпучиванием малой окрестности свободного края пластинки (локализованная дивергенция), в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и сжимающими силами $N_y = 2h\sigma_y$ в срединной плоскости панели в предположении, что усилия σ_y малы по сравнению с критическими $(\sigma_y)_{cr.}$, которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной прямоугольной пластинки, сжатой в направлении, перпендикулярном к потоку газа, описывается соотношением [1, 3]:

$$D\Delta^2 w + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления краёв пластинки имеют вид [1, 3]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \ \text{ при } x = 0; \qquad (1.2)$$

$$w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{ при } x = a; \qquad (1.3)$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ \text{ при } y = 0, \ y = b; \qquad (1.4)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, подверженной действию сжимающих сил N_y в срединной поверхности панели, в предположении, что усилия σ_y малы по сравнению с критическими $(\sigma_y)_{cr.}$, которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания. Иными словами, анализ устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, сжатой усилиями $\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}$, сводится к нахождению минимального значения скорости потока газа V, при котором краевая задача (1.1)–(1.4) имеет решения, отличные от тривиального, соответствующие разветвлению форм равновесия.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка–поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде двойного ряда:

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\exp(\mu_n r_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n=\pi n b^{-1}\,, \tag{2.1}$$

C_{nk} – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки; r_k – корни характеристического уравнения

$$r^4-2\cdot r^2+\alpha_n^3\cdot r+(1-\beta_y^2)=0\,,\ \alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}\,,\ \beta_y^2=N_y D^{-1}\mu_n^{-2}\,, \tag{2.2}$$

которое в соответствии с решением Феррари можно представить в виде [12]:

$$\left(r^2+\sqrt{2(q+1)}r+q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\cdot\left(r^2-\sqrt{2(q+1)}r+q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)=0\,, \tag{2.3}$$

где q – параметр скорости потока газа, V – действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)-\alpha_n^6=0\,, \tag{2.4}$$

$$q\in\left(\left(-1+2\sqrt{(4-3\beta_y^2}\right)\Big/3\,,\infty\right) \text{ при } \beta_y^2\le 4/3 \text{ и } q\in(1,\infty) \text{ при } \beta_y^2>4/3\,; \tag{2.5}$$

α_n^3 и β_y^2 – параметры, характеризующие неконсервативную и консервативную составляющие нагрузки, соответственно.

Как показано в работе [12], в интервале (2.5) значений параметра q характеристическое уравнение (2.2) имеет два действительных корня: r_1, r_2 и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4}$ с положительной вещественной частью, которые легко находятся, будучи решением квадратных уравнений – сомножителей уравнения (2.3):

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)}\,, \tag{2.6}$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)}\,. \tag{2.7}$$

При этом имеем:

$$r_1<0\,,\ r_2<0\,, \text{ когда } \beta_y^2\in[0,1) \text{ и } q\in\left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right); \tag{2.8}$$

$$r_1<0\,,\ r_2>0\,, \text{ когда } \beta_y^2\in(1,4/3]\,,\ q\in\left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right) \text{ и } \tag{2.9}$$

$\beta_y^2\in(4/3\,,\infty)$, $q\in(1,\infty)$;

$$r_1<0\,,\ r_2=0\,, \text{ когда } \beta_y^2=1 \text{ и } q\in(1/3,\infty)\,. \tag{2.10}$$

Корни $\tilde r_k$ характеристического уравнения $\tilde r^4-2\cdot\tilde r^2+(1-\beta_y^2)=0$, соответствующего краевой задаче (1.1)-(1.4) при отсутствии обтекания ($V=0$), будут вида [1,12]:

$$\tilde r_1=-\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}\,,\ \tilde r_2=-\sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\,,\ \tilde r_3=\sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\,,\ \tilde r_4=\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}} \text{ при } \beta_y^2<1\,;$$

$$\tilde r_1=-\sqrt{2}\,,\ \tilde r_{2,3}=0\,,\ \tilde r_4=\sqrt{2} \text{ при } \beta_y^2=1\,; \tag{2.11}$$

$\tilde{r}_1 = -\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}$, $\tilde{r}_{2,3} = \pm\, i\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}$, $\tilde{r}_4 = \sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}$ при $\beta_y^2 > 1$.

В соответствии с необходимым условием потери устойчивости в виде локализованной неустойчивости [9,12]:

$$\operatorname{Re} r_1 < 0 \text{ и } \operatorname{Re} r_2 < 0, \tag{2.12}$$

из выражений (2.6)–(2.11) следует, что невозмущённое состояние равновесия достаточно широких прямоугольных пластин $(\gamma \ge \gamma_{gr.} \gg 1)$ может потерять статическую устойчивость в виде локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x = 0$ только лишь при значениях $\beta_y^2 < 1$. Здесь γ_{gr} – граничное значение параметра γ – отношения ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b :

$$\gamma = ab^{-1}, \tag{2.13}$$

начиная с которого поведение достаточно широких прямоугольных пластин ($\gamma \ge \gamma_{gr}$) можно считать аналогичным поведению полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$). А, соответственно, при значениях $\beta_y^2 \ge 1$ существует возможность потери статической устойчивости только лишь в виде дивергенции панели при обтекании, а в отсутствии обтекания – в виде неустойчивости панели. Этот результат качественно согласуется с результатом, полученным в [12], для другого случая закрепления краёв пластинки как при потенциальном обтекании, так и в отсутствии обтекания.

Общее решение (2.1), удовлетворяющее необходимому условию локализованной неустойчивости (2.12), в силу условия затухания колебаний на крае $x = a$ пластинки, при котором $C_{n3} = C_{n4} = 0$, представится в виде [6,9,12]:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} \exp(\mu_n r_1 x) + \mathrm{C}_{n2} \exp(\mu_n r_2 x) \right) \cdot \sin(\mu_n y). \tag{2.14}$$

Из соотношения (2.4), в соответствии с обозначением (2.2), получаем явный вид выражения зависимости скорости потока газа V от существенных параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1} \tag{2.15}$$

для прямоугольных пластинок умеренных размеров и достаточно длинных ($\gamma \ll 1$) и

$$V(q,n,\beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1} \tag{2.16}$$

для достаточно широких пластин ($\gamma \gg 1$).

3. Перейдём к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков статической неустойчивости прямоугольных пластин как при обтекании, так и в его отсутствии.

3.1. Подставляя общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.6) и (2.7), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель имеет вид:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2)=\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2\right\}B_1B_2+ \quad (3.1)$$

$$+\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2\right\}\cdot B_1B_2\cdot\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+$$

$$+2B_2\left\{\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot\left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\cdot\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$\left.+B_1(4q^2+2q-1+\beta_y^2+2q\nu+\nu^2)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}\exp\left(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma\right)\cdot$$

$$\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+\left\{2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)}\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$+\left(2q^2+3q-1-q\beta_y^2+\beta_y^2-2\left(3q(q+1)-2(1-\beta_y^2)\right)\nu+(3q+1)\nu^2\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot\exp\left(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma\right)\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)=0;$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)},\ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)}\ . \quad (3.2)$$

Очевидно, что $B_1>0$ и $B_2>0$ при всех допустимых значениях q и β_y^2, определяемых соотношениями (2.5); $\gamma\in(0,\infty)$ – параметр отношения сторон пластинки; ν – коэффициент Пуассона.

В соответствии с обозначением (2.13), значения $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости, соответственно, бесконечно удлинённой пластинке и полубесконечной пластине–полосе.

Подставляя общее решение рассматриваемой задачи устойчивости в виде (2.14), в котором корни r_1 и r_2 определены выражениями (2.6), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ достаточно широких прямоугольных пластин $(\gamma>\gamma_*\gg 1)$:

$$F_{locdiv}(q,\nu,\beta_y^2)=\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2=0,\ \beta_y^2<1. \quad (3.3)$$

Можно показать, что, начиная с некоторого значения параметра $\gamma=\gamma_*$ для всех n имеет место условие:

$$\lim_{\gamma\to\gamma_*}(F(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2))=F_{locdiv}(q,\nu,\beta_y^2)=0 \text{ при } \beta_y^2<1, \quad (3.4)$$

$\gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_y^2)$ – граничное значение параметра γ, разграничивающее области дивергенции панели и локализованной дивергенции, определяемое численными методами анализа дисперсионных уравнений (3.1) и (3.3).

Отметим, что уравнение (3.3) тождественно уравнению локализованной дивергенции, полученному в работе [12], при исследовании задачи устойчивости панели в случае, в котором край $x = a$ – шарнирно закреплён, в силу условия затухания колебаний на крае $x = a$ пластинки.

3.2. Аналогично, подставляя общее решение (2.1), в котором корни r_k определяются выражениями (2.11), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем три однородных системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}, соответственно, при $\beta_y^2 < 1$, $\beta_y^2 = 1$ и $\beta_y^2 > 1$. Приравненный нулю определитель каждой из этих систем уравнений – характеристический определитель $\Delta_k = \Delta_k(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = 0$, $k = \overline{1,3}$ приводит к соответствующему дисперсионному уравнению неустойчивости панели [1]:

$$\Delta_1 = 2\sqrt{1-\beta_y^2} \cdot \left(\beta_y^2 - (1-\nu)^2\right) + (1 - \sqrt{1-\beta_y^2}) \cdot \left(\left(1 + \sqrt{1-\beta_y^2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2\left(1 + \sqrt{1-\beta_y^2}\right)\nu - (1-\nu)^2\right) \cdot \mathrm{ch}\left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}} + \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\right)\right) -$$

$$-(1 + \sqrt{1-\beta_y^2})\left(\left(1 - \sqrt{1-\beta_y^2}\right)^2 - 2\left(1 - \sqrt{1-\beta_y^2}\right)\nu - \right.$$

$$\left. -(1-\nu)^2\right) \cdot \mathrm{ch}\left(\pi n \gamma \left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}} - \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\right)\right) = 0 \text{ при } \beta_y^2 < 1; \quad (3.5)$$

$$\Delta_2 = 4\left(1 - (1-\nu)^2\right) + 2\left(1 + (1-\nu)^2\right)\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}\pi n \gamma\right) -$$

$$-\sqrt{2}\pi n \gamma \cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{2}\pi n \gamma\right) \cdot \nu^2 = 0 \text{ при } \beta_y^2 = 1; \quad (3.6)$$

$$\Delta_3 = \sqrt{\beta_y^2 - 1}\left(\beta_y^2 - 1 - (\sqrt{\beta_y^2} - 1)\nu\right) + \sqrt{\beta_y^2 - 1} \cdot \left(\beta_y^2 + (1-\nu)^2\right) \cdot$$

$$\cdot \mathrm{ch}(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1}) \cdot \cos(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1}) + \left(\beta_y^2 - 2\beta_y^2 \nu - (1-\nu)^2\right) \cdot$$

$$\cdot \mathrm{sh}(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1}) \cdot \sin(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1}) = 0 \text{ при } \beta_y^2 > 1. \quad (3.7)$$

Соответственно, приравненный нулю определитель системы уравнений, полученной подстановкой общего решения в виде (2.14), в котором корни r_1 и r_2 определены выражениями (2.11) при значении $\beta_y^2 < 1$, в граничные условия (1.2), приводит к дисперсионному уравнению

$$\Delta_{loc.inst.}(\nu, \beta_y^2) = \left(1 + \sqrt{1-\beta_y^2}\right)^2 - 2\nu\left(1 + \sqrt{1-\beta_y^2}\right) - (1-\nu)^2 = 0, \; \beta_y^2 < 1, \quad (3.8)$$

соответствующему локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x=0$ не обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластин $\gamma > \gamma_{**} \gg 1$. Здесь, γ_{**} – граничное значение параметра γ, начиная с которого поведение прямоугольной пластинки аналогично поведению полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$) в смысле потери статической устойчивости. Иными словами, имеем:

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{**}} \Delta_1\left(\mathrm{n},\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = \Delta_{loc.inst}\left(\nu,\beta_y^2\right) \text{ при всех } n,\nu,\beta_y^2 < 1. \tag{3.9}$$

Заметим, что уравнение (3.8) тождественно уравнению локализованной неустойчивости, полученному в работах [6,8,11,12], при исследовании задачи устойчивости панели в случаях, в которых край $x=a$ – свободен или закреплён другими способами, что обусловлено условием затухания колебаний на крае $x=a$ пластинки.

3.3. Результаты численного анализа уравнений (3.5) – (3.8) показали следующее.

Уравнение (3.5) в интервале значений $\gamma < \gamma_{**} = 80$ решения не имеет, так как $\Delta_1 = \Delta_1(n,\gamma,\nu,\beta_y^2) > 0$. Это означает, что плоская форма равновесия необтекаемой пластинки умеренных размеров ($\gamma < \gamma_{**} = 80$) устойчива.

Начиная с значения $\gamma_{**} = 80$, уравнения (3.5) и (3.8) в интервале $\beta_y^2 \in (0,1)$ равносильны с точностью до порядка 10^{-5} и имеют единственное решение $\left(\beta_y^2\right)_{locinst}$ (табл.1) при всех $\gamma \geq \gamma_{**}$, n, ν. Это означает, что в интервале значений $\beta_y^2 \in \left(\left(\beta_y^2\right)_{locinst},1\right)$ достаточно широкие пластинки ($\gamma \geq \gamma_{**} = 80$) теряют статическую устойчивость в виде локализованной неустойчивости, при котором изгиб локализован в окрестности её свободного края $x=0$.

Таблица 1

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\left(\beta_y^2\right)_{locinst}$	0.9998	0.9983	0.9962	0.9889	0.9567

Решение $\gamma_{cr} = \gamma_{cr}(n,\nu)$ уравнения (3.6), соответствующего значению $\beta_y^2 = 1$, является монотонно убывающей функцией от n при фиксированном значении параметра ν, а также от ν при фиксированном значении параметра n. Ясно, что для всех значений параметра n и коэффициента Пуассона ν в случае, в котором $\beta_y^2 = 1$, при значениях $\gamma(n,\nu) \geq \gamma_{cr.}(n,\nu)$, плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет устойчивость в виде неустойчивости панели, при которой «выпучивается» вся срединная поверхность пластинки.

В таблице 2 приведены значения корня γ_{cr} уравнения (3.6) для различных значений ν, когда $n=1$.

В табл. 3 приведены значения критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{inst.}$ – первого корня уравнения (3.7) в интервале $\beta_y^2 > 1$ при различных значениях параметров γ, ν и при значении $n = 1$.

Таблица 2

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma_{cr.}$	50.82	11.20	7.51	4.45	2.24

Таблица 3

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.1	1348.0	1332.0	1325.0	1316.0	1300.0
0.3	25.00	23.40	22.70	21.82	20.0
0.5	5.99	5.45	5.21	4.90	4.23
0.8	2.40	2.22	2.15	2.03	1.77
1.0	1.78	1.69	1.65	1.55	1.40
1.2	1.52	1.45	1.39	1.35	1.22
1.5	1.29	1.26	1.23	1.19	1.11
2.0	1.15	1.13	1.11	1.09	1.02
2.5	1.09	1.07	1.06	1.04	1.01
5.0	1.02	1.012	1.008	1.00	1.00

При значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{inst} > 1$ плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет статическую устойчивость в виде неустойчивости панели, при котором срединная поверхность пластинки резко «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Как следует из данных табл.3, критический коэффициент напряжения $(\beta_y^2)_{unst}$ при умеренных значениях $\gamma \in [0.1;5]$ зависит от параметра γ и коэффициента Пуассона ν: убывает с возрастанием γ и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν. В случае достаточно длинных пластин ($\gamma \ll 1$) зависимость критического коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{unst}$ от параметра ν несущественна, поэтому можно принять, что $(\beta_y^2)_{unst}$ зависит только от параметра γ. В случае достаточно широких пластин ($\gamma \gg 1$), в отличие от пластинок умеренных размеров, зависимость $(\beta_y^2)_{unst}$ как от параметра γ, так и от параметра ν является несущественной: начиная с значения $\gamma = 10$ с точностью порядка 10^{-4} и менее $(\beta_y^2)_{unst} \approx 1$.

Легко показать, что среди множества $\left\{\gamma_{cr.}(n,\nu)\right\}$ решений уравнения (3.6) и первых корней $\left\{\left(\beta_y^2\right)_{unst}(n,\gamma,\nu)\right\}$ уравнения (3.7), полученных при различных n и при фиксированных значениях остальных параметров, наименьшему значению критического сжимающего усилия $\left(\sigma_y\right)_{cr.}$, в силу обозначения (2.2), соответствуют значения γ_{cr} и $\left(\beta_y^2\right)_{unst}$ при $n=1$, приведённых в табл. 2 и 3 соответственно.

Заметим, что устойчивость сжатых прямоугольных пластинок при различных граничных условиях и различных значениях отношения сторон $\gamma = ab^{-1}$ в отсутствии обтекания рассмотрена, в частности, в работах [1, 5,6,8,12]. В статьях [8, 12] и в монографии [6], в которых рассмотрена устойчивость сжатой пластинки, соответственно, с двумя свободными краями и с одним свободным и жёстко заделанным краями, получено при $\nu = 0.3$ и $\gamma = \infty$ то же значение $\left(\beta_y^2\right)_{locinst} = 0.9962$, что и в данной работе (табл. 1). Это совпадение связано с локализацией прогиба $w(x,y)$ в окрестности свободного края $x=0$ пластинки при достаточно больших значениях $\gamma \geq \gamma_{**} = 80$, в результате которой граничные условия на крае $x=a$ пластинки перестают оказывать влияние.

Таким образом, при всех значениях $\gamma \in (0,\infty)$, когда $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{cr} > 1$ (табл. 3), и при $\gamma \in [\gamma_{cr.},\infty)$ (табл. 2), когда $\beta_y^2 = 1$, сжатая прямоугольная пластинка теряет статическую устойчивость в виде неустойчивости панели, а при значениях $\gamma \in [\gamma_{**},\infty)$ и $\beta_y^2 \in \left(\left(\beta_y^2\right)_{locinst},1\right)$ – в виде локализованной неустойчивости.

4. Перейдём к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой сжатой прямоугольной пластинки при допустимых значениях параметра скорости потока

$$q \in (q_0,\infty) \subseteq (q(a_0M_0), q(a_0M_{2\cos m.})), \qquad (4.1)$$

где $M_0 = \sqrt{2}$ и $M_{2\cos m.} \approx 33.85$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1,14].

Исследуем численными методами дисперсионное уравнение (3.1), при значениях $\beta_y^2 \in [0,(\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1,(\beta_y^2)_{cr})$, $\gamma \in (0,\infty)$ и при всех ν, а также дисперсионное уравнение (3.3) при значениях $\beta_y^2 \in [0,(\beta_y^2)_{locinst})$ и при всех ν, являющиеся достаточными признаками неустойчивости плоской формы равновесия прямоугольных пластинок достаточно длинных и умеренных размеров, и, соответственно, достаточно широких. Критические значения $\left(\beta_y^2\right)_{locinst} < 1$ и $\left(\beta_y^2\right)_{cr} \geq 1$ коэффициента напряжения β_y^2 приведены в таблицах 1 и 3 соответственно. При этом, в соответствии с условиями (2.8) – (2.10), ясно, что

$q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3, \infty \right)$ при $\beta_y^2 \le 4/3$ и $q \in (1,\infty)$ при $\beta_y^2 > 4/3$. (4.2)

Введём в рассмотрение в пространстве «существенных» параметров исходной задачи $\Im = \left\{ q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2 \right\}$ область устойчивости $\Im_0$ и области статической неустойчивости $\Im_1$, $\Im_2$, соответствующие дивергенции панели и локализованной дивергенции соответственно.

Из способа разбиения пространства $\Im$ параметров системы «сжатая пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости следует, что область устойчивости $\Im_0 \in \Im$ невозмущённого состояния равновесия системы будет описываться соотношениями:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) > 0,\ F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu) > 0, \tag{4.3}$$

а области неустойчивости $\Im_1$ и $\Im_2$ – соответственно, соотношениями

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) < 0 \text{ и } F_{locdiv}(q,\nu,\beta_y^2) < 0. \tag{4.4}$$

Границами области устойчивости $\Im_0$ в пространстве её параметров $\Im$ являются гиперповерхности:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = 0, \tag{4.5}$$

$$F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu) = 0, \tag{4.6}$$

определяемые выражениями (3.1) и (3.3) соответственно.

Гиперповерхность (4.5) разграничивает область устойчивости $\Im_0$ и область дивергенции панели $\Im_1$ в пространстве «существенных» параметров системы «пластинка – поток» $\Im = \left\{ q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2 \right\}$.

Гиперповерхность (4.6) разграничивает область устойчивости $\Im_0$ и область локализованной дивергенции $\Im_2$ в пространстве $\Im = \left\{ q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2 \right\}$.

На границе (4.5) области устойчивости $\Im_0$ невозмущённое состояние равновесия сжатой пластинки теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели, а на границе (4.6) – в виде локализованной дивергенции.

Границей между областями статической неустойчивости $\Im_1$ и $\Im_2$ является гиперповерхность:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu) = 0 \text{ при условии } \gamma > \gamma_* \gg 1 \text{ для всех } n, \tag{4.6}$$

где $\gamma = \gamma_*$ – граничное значение параметра γ, разграничивающее области неустойчивости $\Im_1$ и $\Im_2$.

Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)$, получаемые подстановкой значений первых корней $q_{cr.div.}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)$ уравнения

(4.5) в выражение (2.15), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической неустойчивости в виде дивергенции панели $\Im_1$. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. В первоначально сжатой прямоугольной пластинке усилиями $\sigma_y < \left(\sigma_y\right)_{cr.}$ при обтекании возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её формы – поверхность пластинки резко «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Здесь, в соответствии с обозначением (2.2), $\left(\sigma_y\right)_{cr.} = \pi^2 n^2 \gamma^2 D\left(2ha^2\right)^{-1} \cdot (\beta_y^2)_{inst.}$ (табл.2 и 3).

Критические скорости $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_x^2)$, получаемые подстановкой значений корня $q_{loc.div.} = q_{loc.div}(\nu, \beta_x^2)$ уравнения (4.6) в выражение (2.16), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической неустойчивости $\Im_2$ в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ достаточно широкой пластинки при условии $\gamma \geq \gamma_*$. При скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к неустойчивости в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ первоначально сжатой достаточно широкой пластинки усилиями $\sigma_y < \left(\sigma_y\right)_{cr.}$, $\left(\sigma_y\right)_{cr.} = \pi^2 n^2 D\left(2hb^2\right)^{-1} \cdot (\beta_y^2)_{locinst.}$ (табл. 1). Аналогично, вследствие обтекания в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки вдоль её свободного края $x = 0$.

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ и $V_{loc.div.}(n, \nu, \beta_y^2)$ системы «пластинка-поток», соответствующие первым корням уравнения (3.1) и решению уравнения (3.3), определяются по формулам (2.15) и (2.16) с достаточной точностью.

5. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)\}$, параметризованных надлежащим образом. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)\}$ в многопараметрическом пространстве $\Im$.

Найдены множества $\left\{q^{(1)}_{\mathrm{cr.div}} = q^{(1)}_{\mathrm{cr.div}}(n, \gamma, \beta_y^2, \nu)\right\}$ и $\left\{q_{\mathrm{loc.div}} = q_{\mathrm{loc.div}}(\nu, \beta_y^2)\right\}$ значений первых корней уравнения (3.1) и единственного корня уравнения (3.3) при различных значениях параметров n, β_y^2, γ и ν системы «пластинка–поток» в интервале (4.2) допустимых значений параметра q соответственно. Далее, подставляя значения $q^{(1)}_{cr.div.}$ и $q_{loc.div.}$, соответственно, в выражения (2.15) и (2.16), находим приведённые критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\text{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$. При этом, как показал численный анализ, наименьшему значению приведённых критических скоростей $V_{cr.div} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $V_{\text{loc}.div} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ соответствует значение $n=1$ при фиксированных значениях остальных параметров.

В соответствии с значением цилиндрической жёсткости D, допустимые интервалы изменения значений приведённых скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (4.1) имеют вид [14]:

$$V_{cr.div} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (V_{cr.div}(q_0) D^{-1}(a_0\rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi_1) \subseteq \tag{5.1}$$

$$\subseteq (a_0 M_0 \Psi_1, a_0 M_{2\cos m.}\Psi_1),$$

$$V_{\text{loc}.div} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) \in (V_{\text{loc}.div}(q_0) D^{-1}(a_0\rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m.}\Psi_2) \subseteq \tag{5.2}$$

$$\subseteq (a_0 M_0 \Psi_2, a_0 M_{2\cos m.}\Psi_2),$$

$$\Psi_1 = 12(1-\nu^2) a_0\rho_0 E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ \Psi_2 = 12(1-\nu^2) a_0\rho_0 E^{-1}(2hb^{-1})^{-3},$$

$$M_0 = \sqrt{2},\ M_{2\cos m.} \approx 33.85;$$

Таблица 4

$\tilde{\beta}_y^2$ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00	324.761	173.371	149.854	120.741	77.398
$1 \cdot 10^{-4}$	315.780	169.907	143.878	114.922	76.865
$1 \cdot 10^{-2}$	289.523	168.325	142.374	113.390	75.732
0.10	267.024	160.853	131.075	106.909	72.643
0.20	249.954	146.091	125.277	95.056	71.283
0.30	229.367	132.122	117.723	86.243	57.706
0.40	207.652	115.081	99.107	78.311	47.424
0.50	183.146	103.084	87.564	67.196	43.956
0.60	152.743	86.676	71.532	53.324	34.241
0.70	124.604	68.526	57.471	41.562	27.147
0.80	95.948	53.077	42.506	30.817	15.352
0.85	82.261	37.475	33.923	24.164	–
0.90	60.942	32.161	–	–	–
0.95	41.193	–	–	–	–

В табл. 4 представлены приведённые критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ для некоторых значений ν и β_x^2 при $n=1$.

Из данных табл. 4 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, зависящая от параметров β_y^2 и

ν, уменьшается примерно в 4 – 5 раз с ростом коэффициента напряжения β_y^2 в интервале $(0, 0.95)$ и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν. Далее, из сопоставления данных таблиц 1 и 4, следует, что критические значения коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{locinst}$, найденные в отсутствии обтекания (табл.1), оказываются больше примерно на 14%, чем критические значения коэффициента напряжения (табл. 4), найдённых при обтекании. Иными словами, в случае достаточно широких пластин при обтекании происходит занижение порога критического значения коэффициента напряжения сжатия, примерно, на 14%. Отсюда следует, что первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации равновесного состояния обтекаемой сжатой достаточно широкой пластинки.

Таблица 5

γ \ β_y^2	0.0	0. 1	0.3	0.5	0.8	0.9
0.3	$\begin{Bmatrix}10.765\\9.946\\9.697\\9.202\\8.408\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}10.732\\9.919\\9.511\\9.120\\8.394\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}10.667\\9.806\\9.502\\9.081\\8.193\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}10.605\\9.757\\9.458\\9.045\\8.116\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}10.457\\9.689\\9.340\\8.823\\8.093\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}10.370\\9.610\\9.321\\8.810\\8.086\end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix}22.042\\19.357\\17.988\\16.613\\13.788\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}21.423\\18.786\\17.724\\16.115\\13.643\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}20.288\\18.028\\17.021\\15.502\\12.925\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}19.771\\17.278\\16.213\\14.792\\12.405\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}18.510\\16.151\\15.307\\13.844\\11.169\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}18.161\\15.690\\14.674\\13.494\\11.151\end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix}71.435\\58.835\\54.086\\47.945\\37.330\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}67.112\\55.885\\51.237\\45.221\\35.483\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}60.359\\49.695\\45.838\\40.140\\30.883\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}52.780\\42.803\\39.717\\34.406\\26.358\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}43.240\\35.706\\32.328\\27.163\\19.852\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}40.332\\32.703\\30.377\\25.116\\18.096\end{Bmatrix}$
1.0	$\begin{Bmatrix}193.506\\126.227\\112.615\\96.085\\72.910\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}165.073\\118.027\\104.641\\88.323\\67.944\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}132.125\\98.124\\88.437\\74.946\\55.022\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}105.004\\81.603\\73.480\\60.689\\43.954\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}74.655\\58.135\\53.053\\44.302\\-\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}65.353\\50.544\\44.561\\36.912\\-\end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix}729.920\\267.470\\225.828\\178.466\\130.726\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}703.051\\241.328\\203.951\\164.914\\117.407\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}583.17\\288.88\\222.77\\176.87\\122.07\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}546.92\\217.80\\178.67\\137.43\\95.07\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}123.345\\91.676\\79.644\\67.001\\-\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}119.398\\75.670\\63.785\\-\\-\end{Bmatrix}$

В табл. 5 и 6 приведены значения приведённой критической скорости дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$. Здесь значения критической скорости $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, взятые в фигурные скобки, соответствуют значениям коэффициента Пуассона ν, равным 0.125, 0.25, 0.3, 0.375, 0.5, соответственно.

Таблица 6

γ \ β_y^2	0.95	1. 00	1.21	1.44	2.25	5.0
0.3	$\begin{Bmatrix} 10.305 \\ 9.599 \\ 9.312 \\ 8.808 \\ 8.028 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.244 \\ 9.532 \\ 9.275 \\ 8.796 \\ 8.024 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.186 \\ 9.503 \\ 9.057 \\ 8.672 \\ 7.868 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.110 \\ 9.331 \\ 9.055 \\ 8.628 \\ 7.838 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 9.797 \\ 9.026 \\ 8.676 \\ 8.189 \\ 7.441 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 8.512 \\ 7.819 \\ 7.543 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 18.103 \\ 15.204 \\ 14.500 \\ 13.342 \\ 10.912 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 17.848 \\ 15.092 \\ 14.330 \\ 13.206 \\ 10.683 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 39.138 \\ 31.714 \\ 28.748 \\ 23.859 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 37.430 \\ 30.369 \\ 27.453 \\ 19.254 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.0	$\begin{Bmatrix} 60.281 \\ 46.600 \\ 42.123 \\ 34.361 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 56.767 \\ 43.822 \\ 38.852 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix} 89.913 \\ 66.454 \\ 59.375 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$

Как следует из данных таблиц 5 и 6, приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, зависящая от параметров γ, β_y^2 и ν, возрастает с ростом γ на интервале $(0.2, 2)$ примерно на два порядка при фиксированных значениях параметров β_y^2 и ν, падает в примерно $1.2-3.8$ раза с ростом $\beta_y^2 \in [0, 5)$ при фиксированных значениях γ, ν и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν. Это свидетельствует о существенной дестабилизации равновесного состояния сжатой прямоугольной пластинки умеренных размеров при обтекании, в сравнении с пластинкой с ненагруженными краями [7].

Наиболее ярко эффект дестабилизации проявляется при значениях $\gamma \in (0.8, 2)$ и $\beta_y^2 \in (0.95, 1)$, при которых обтекание приводит к «скачкообразному» увеличению коэффициента напряжения до значений, больших $(\beta_y^2)_{inst.}$ (табл. 3): происходит «мгновенная» потеря устойчивости плоской формы равновесия прямоугольной пластинки в виде дивергенции панели.

Несмотря на то, что граничное значение $\gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_y^2)$, однако, как показали результаты численных исследований, зависимость γ_* от коэффициента Пуассона ν является несущественной, в отличие от зависимости γ_* от коэффициента напряжения β_y^2: с увеличением коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0, 0.95)$ граничное значение γ_* растёт от 2 до 3, что также указывает на существенную дестабилизацию плоской формы равновесия обтекаемой пластинки при больших значениях коэффициента напряжения β_y^2, характеризующего первоначальное напряжённое состояние пластинки.

В случае достаточно длинных пластин $\gamma < 0.01$ приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ с точностью до порядка 10^{-6} одна и та же для всех значений параметров ν, β_y^2 и равна значению приведённой критической скорости дивергенции бесконечно удлинённой консольной пластинки: $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) = 6.33$, полученной А.А. Мовчаном в работе [13].

Далее, из оценки полученных численных результатов (табл. 4–6), применительно к допустимым интервалам (5.1) и (5.2) значений $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ соответственно, следует, что с ростом параметра относительной толщины, соответственно, $2ha^{-1}$ и $2hb^{-1}$, равновесное состояние сжатых прямоугольных пластин становится существенно устойчивым.

6. Основные результаты. В работе получено аналитическое решение задачи статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающего на её свободный край, в предположении, что первоначально в срединной поверхности пластинки имеются сжимающие силы, направленные перпендикулярно к скорости потока газа.

Найдено аналитическое решение задачи статической устойчивости сжатой пластинки при отсутствии обтекания, с целью получения строгой и полной оценки влияния первоначального напряжённого состояния на невозмущённое состояние равновесия пластинки при обтекании.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость, соответственно, как в виде дивергенции панели, так и в виде локализованной дивергенции. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости.

Как оказалось, в сравнении с обтекаемой панелью с ненагруженными краями [7], первоначальное напряжённое состояние сжатой панели при обтекании приводит к смещению границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении увеличения параметра отношения сторон панели – к расширению области дивергенции панели и сужению области локализованной дивергенции.

Найдены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия обтекаемой пластинки теряет статическую устойчивость, соответственно, или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от параметров системы, в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

Показано, что критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, соответствующие, соответственно, пластинкам умеренных размеров и достаточно широким, падают примерно на порядок с ростом коэффициента напряжения.

В случае достаточно длинных пластин первоначальное напряжённое состояние оказывает незначительное влияние на поведение системы «пластинка–поток»: критическая скорость дивергенции панели равна, примерно, значению критической скорости дивергенции бесконечно удлинённой консольной пластинки, полученной в работе [13].

Исследована зависимость видов потери статической устойчивости системы «пластинка–поток» от относительной толщины пластинки применительно к рассматриваемому интервалу сверхзвуковых скоростей потока газа. Показано, что с ростом параметра относительной толщины сжатых прямоугольных пластин их равновесное состояние становится существенно устойчивым при фиксированных значениях остальных параметров системы.

Таким образом, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими силами, направленными перпендикулярно к потоку газа, приводит, в целом, к существенной дестабилизации плоской формы равновесия обтекаемых прямоугольных пластинок – к «скачкообразному» падению значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции в сравнении с соответствующими значениями критических скоростей дивергенции и локализованной дивергенции обтекаемой панели с ненагруженными краями [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.– М.: Физматгиз, 1963. 880 с.Volmir A.S.The Stability of the elastic system. M.: Physmathgiz. 1963. 880p.(in Russian).
2. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. №6. С.733–755. Ilyushin A.A. Law of plane sections at high supersonic velocity // PMM. 1956. V.20. № 6. Pp. 733-755. (in Russian).

3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука, 1961. 329 с. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Science, 1961. 329p. (in Russian).
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. 247 с. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells. M.: Science, 2006. 247p. (in Russian)
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. //Справочник в 3-х том. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г.Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Strength. Stability. Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I.A. Birger and Ya.G. Panovko. – M.: Mechanical Engineering. 1968. (in Russian).
6. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995. 320с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods. // Moscow: Science. Physmathlit, 1995. 320 p. (in Russian).
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.12–42. M.V.Belubekyan, S.R.Martirosyan. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V.67. №2. P.12–42. (in Russian).
8. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т.95. № 3. С.38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V.95. № 3. Pp.38-46. (in Russian).
9. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С.124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave. // Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960, v.6, № 1, pp.124–126. (in Russian).
10. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29–34. Proceed. NAS of Armenia. Mechanics. 2012. V.65. №1. P. 29–34.
11. Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем // Известия НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.34–39. Belubekyan M.V., Chil–Akopyan E.O. Problems of localized instability of a plate with free edge // Proceed. NAS of Armenia. Mechanics. 2004. V.57. №2. P.34–39. (in Russian).
12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т.70. №4. С.12–34. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V.70. №4. P.12–34. (in Russian).
13. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С.231–243. Movchan A. A. Oscillations of a panel moving in a gas // Proceed. of USSR Academy of Sciences. PMM. 1956. V.20. № 2. Pp. 231-243. (in Russian).
14. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, растянутой по направлению потока газа, набегающего на её свободный край //

Изв. НАН Армении. Механика. 2019. Т.72. № 2. С.24-41. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On divergence of the panel, stretched on the direction of supersonic gas flow, an accumulating on its free edge // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2019. V.72. №2. P.24-41. (in Russian).

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 10.06.2019.