ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №3, 2019 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.3.1

О РЕШЕНИЯХ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Баласанян Е.С., Гулгазарян Л.Г., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропная двухслойная пластинка, полный контакт, смешанные граничные условия, решение типа пограничного слоя.

Balasanyan E.S., Ghulghazaryan L.G., Khachatryan A.M.

On solutions of the boundary layer type one mixed boundary problem of anisotropic two-layeredplate

Keywords: asymptotic method, anisotropic two-layered plate,full contact, mixed boundary conditions, boundary layertype solution.

The question of constructing a solution of the boundary layer type for a rectangular orthotropic double-layer plate is discussed, on the face planes of which mixed homogeneous conditions are specified. Using the asymptotic method, solutions of the boundary layer type are constructed, a transcendental equation is derived to determine the eigenvalues, which characterize the decay rates of the found solution. It is shown that for orthotropic materials the solution of the type of the boundary layer disintegrated into flat and anti-flat boundary layers

Բալասանյան Ե.Ս., Ղուլղազարյան Լ.Գ., Խաչատրյան Ա.Մ.

Անիզոտրոպ երկշերտ սալի մի խառը եզրային խնդրում սահմանային շերտի տիպի լուծումների մասին

Հիմնաբառեր. ասիմպտոտիկ մեթոդ, անիզոտրոպ երկշերտ սալ, լրիվ կոնտակտ, խառը եզրային պայմաններ, սահմանային շերտի տիպի լուծում:

Աշխատանքը նվիրված է երկշերտ անիզոտրոպ սալի սահմանային շերտի տիպի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի նկարագրմանն ու վերլուծությանը: Ենթադրվում է, որ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են համասեռ խառը եզրային պայմաններ, իսկ մյուս հարթությունների վրա կարող են տրված լինել առաձգականության տեսության տարբեր եզրային պայմաններ: Այդ լուծումները բերվում են սեփական արժեքներին սեփական ֆունկցիաների որոշման խնդրի: Դրական իրական մաս ունեցող սեփական թվերից ամենափոքրն էլ հենց որոշում է սահմանային շերտի լուծման մարման արագությունը:

Օրթոտրոպ նյութերի դեպքում սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակի հավասարումները տրոհվում են երկու հավասարումների համակարգերի, որոնք նկարագրում են հարթ և հակահարթ սահմանային շերտի տիպիլ արվածային վիճակները:

Обсуждается вопрос построения решения типа пограничного слоя для прямоугольной ортотропной двухслойной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные однородные условия. С помощью асимптотического метода построены решения типа пограничного слоя, выведено трансцендентное уравнение для определения собственных чисел, характеризующих скорости затухания найденного решения. Показано, что для ортотропных материалов решение типа пограничного слоя распадётся на плоский и антиплоский пограничные слои.

Введение. Классические краевые задачи для изотропных пластин и оболочек асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Классические и неклассические краевые задачи для анизотропных однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек асимптотическим методом рассмотрены в [3,4]. Напряжённо-деформированное состояние пластин с общей анизотропией в первой краевой задаче теории упругости исследовано в [5]. Решение для анизотропной термоупругой пластинки построено в [6]. Внутреннее решение в смешанной краевой задаче для анизотропной однослойной пластинки асимптотическим методом построено в [7]. Асимптотические решения смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки при полном и неполном контакте между слоями приведены в [10,11].

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega = \left\{ \left(x, y, z \right) : 0 \le x \le a, \;\; 0 \le y \le b, -h_2 \le z \le h_1 \right\}$, где a – длина, b – ширина, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя и $k = 1,2$. Общая толщина полосы $-2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки.

Обсуждается вопрос решения задачи типа пограничного слоя в одной смешанной краевой задаче для анизотропной прямоугольной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы следующие однородные условия:

$$
\begin{aligned}
&u^{(1)} = 0, \quad v^{(1)} = 0, \quad \sigma_z^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = h_1, \\
&\sigma_{xz}^{(2)} = 0, \;\; \sigma_{yz}^{(2)} = 0, \;\; w^{(2)} = 0 \quad \text{при } z = -h_2
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ – пока произвольные, а между слоями выполняется полный контакт, то есть:

$$
\sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{xz}^{(2)}, \; \sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(2)}, \; \sigma_{z}^{(1)}=\sigma_{z}^{(2)}, \; w^{(1)}=w^{(2)}, \; u^{(1)}=u^{(2)}, \; v^{(1)}=v^{(2)} \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{1.2}
$$

Для построения решения типа пограничного слоя вблизи края $x = 0$ в трёхмерных уравнениях теории упругости анизотропного тела [3,8,9] вводятся безразмерные координаты $t = x / h, \; \eta = y / l, \; \zeta = z / h$ и безразмерные перемещения $U = u/l$, $V = v/l$, $W = w/l$, в результате чего получаем сингулярно-возмущённую систему уравнений относительно малого геометрического параметра $\varepsilon = h/l$, где $l = \min\left(a,b\right)$, $2h = h_1 + h_2$. Эту систему уравнений удобно решать методом асимптотического интегрирования [3-6].

Решение полученных уравнений отыскивается в виде функций типа пограничного слоя [3,4]

$$
R_p^{(k)} = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{\chi_p + s} R_p^{(k,s)} \left(\eta, \zeta\right) \exp\left(-\lambda t\right), \tag{1.3}
$$

где $R_p^{(k)}$ – любая из компонент напряжений и перемещений k-ого слоя $\left(k = 1,2\right)$, при этом, $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Непротиворечивые значения для χ_p подбираются следующим образом:

$$\chi_{\sigma_i} = \chi, \ \chi_{u_i} = \chi + 1$$

, (1.4)

где χ – произвольное число, которое определится из условия взаимодействия пограничного слоя с внутренним напряжённым состоянием, λ характеризует изменяемость напряжений и перемещений пограничного слоя.

Подставляя (1.3), с учётом (1.4), в преобразованные уравнения теории упругости и выразив все неизвестные величины пограничного слоя через напряжения $\sigma_{yzp}^{(k,s)}$ и $\sigma_{zp}^{(k,s)}$, получим известные формулы [3-6]:

$$\sigma_{xp}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + R_x^{(k,s-1)}, \ \sigma_{xyp}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + R_{xy}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xzp}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + R_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{yp}^{(k,s)} = -\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{a_{12}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a_{25}^{(k)}}{\lambda}\frac{\partial \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{a_{26}^{(k)}}{\lambda}\frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \right.$$

$$\left. + a_{23}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,s)} + a_{24}^{(k)}\sigma_{yzp}^{(k,s)} \right) + R_y^{(k,s-1)},$$

$$u_p^{(k,s)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{15}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} -$$

$$- \frac{A_{13}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)} - \frac{A_{14}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_u^{(k,s-1)}, \qquad (1.5)$$

$$v_p^{(k,s)} = -\frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{56}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{66}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} -$$

$$- \frac{A_{36}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)} - \frac{A_{46}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_v^{(k,s-1)},$$

$$w_p^{(k,s)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^4}\frac{\partial^3 \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^3} - \frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\lambda^2}\left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)} \right)\frac{\partial \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} -$$

$$-\frac{2A_{15}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\lambda^2}\left(A_{14}^{(k)} + A_{56}^{(k)} \right)\frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{35}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)} - \frac{A_{45}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_w^{(k,s-1)},$$

где использованы следующие обозначения [3,5]:

$$A_{ij}^{(k)} = \left(a_{22}^{(k)}a_{ij}^{(k)} - a_{2i}^{(k)}a_{2j}^{(k)} \right)\left(a_{22}^{(k)} \right)^{-1}, \ \left(i, j = 1,3,4,5,6 \right). \qquad (1.6)$$

Величины $R_k^{(k,s)}$ известны и определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$R_x^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\eta\partial\zeta} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{xyp}^{(k,s)}}{\partial\eta}, \quad R_{xy}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yp}^{(k,s)}}{\partial\eta}, \quad R_{xz}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\eta},$$

$$R_y^{(k,s)} = \frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(a_{12}^{(k)}R_x^{(k,s)} + a_{25}^{(k)}R_{xz}^{(k,s)} + a_{26}^{(k)}R_{xy}^{(k,s)} - \frac{\partial v_p^{(k,s)}}{\partial\eta}\right),$$

$$R_u^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\left(a_{11}^{(k)}R_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)}R_y^{(k,s)} + a_{15}^{(k)}R_{xz}^{(k,s)} + a_{16}^{(k)}R_{xy}^{(k,s)}\right), \tag{1.7}$$

$$R_v^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\left(a_{16}^{(k)}R_x^{(k,s)} + a_{26}^{(k)}R_y^{(k,s)} + a_{56}^{(k)}R_{xz}^{(k,s)} + a_{66}^{(k)}R_{xy}^{(k,s)} - \frac{\partial u_p^{(k,s)}}{\partial\eta}\right),$$

$$R_w^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\left(a_{15}^{(k)}R_x^{(k,s)} + a_{25}^{(k)}R_y^{(k,s)} + a_{55}^{(k)}R_{xz}^{(k,s)} + a_{56}^{(k)}R_{xy}^{(k,s)} + \frac{\partial R_u^{(k,s)}}{\partial\zeta}\right).$$

Для определения же неизвестных функций $\sigma_{yzp}^{(k,s)}$ и $\sigma_{zp}^{(k,s)}$ получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{11}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,s)} + L_{12}^{(k)}\sigma_{yzp}^{(k,s)} &= R_1^{(k,s-1)}, \\ L_{12}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,s)} + L_{22}^{(k)}\sigma_{yzp}^{(k,s)} &= R_2^{(k,s-1)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Дифференциальные операторы $L_{ij}^{(k)}$ и обобщённые нагрузки $R_1^{(k,s-1)}$, $R_2^{(k,s-1)}$ имеют вид:

$$L_{11}^{(k)} = A_{11}^{(k)}\frac{\partial^4}{\partial\zeta^4} + 2A_{15}^{(k)}\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + \left(2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}\right)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{35}^{(k)}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{33}^{(k)}\lambda^4,$$

$$L_{12}^{(k)} = A_{16}^{(k)}\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + \left(A_{14}^{(k)} + A_{56}^{(k)}\right)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \left(A_{36}^{(k)} + A_{45}^{(k)}\right)\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{34}^{(k)}\lambda^4, \tag{1.9}$$

$$L_{22}^{(k)} = A_{66}^{(k)}\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{46}^{(k)}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{44}^{(k)}\lambda^4,$$

$$R_1^{(k,s-1)} = -\left(\frac{\partial R_w^{(k,s-1)}}{\partial\zeta} + a_{13}^{(k)}R_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)}R_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)}R_{xz}^{(k,s-1)} + a_{36}^{(k)}R_{xy}^{(k,s-1)}\right)\lambda^4,$$

$$R_2^{(k,s-1)} = -\left(\frac{\partial R_v^{(k,s-1)}}{\partial\zeta} - \frac{\partial w_p^{(k,s-1)}}{\partial\eta} + a_{14}^{(k)}R_x^{(k,s-1)} + \right.$$
$$\left. + a_{24}^{(k)}R_y^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)}R_{xz}^{(k,s-1)} + a_{46}^{(k)}R_{xy}^{(k,s-1)}\right)\lambda^4.$$

Нужно учесть, что $R_i^{(k,s-m)} \equiv 0$ при $s < m$.

При $s = 0$ уравнения (1.8) становятся однородными.

В дальнейшем подробно рассмотрена задача для ортотропных материалов.

2. Пограничный слой двухслойной ортотропной пластинки. Если слои пластинки состоят из ортотропных материалов, то $a_{ij}^{(k)} = 0, \left(i = 1,2,3,4,5; j = 4,5,6\right)$, а коэффициенты $A_{ij}^{(k)}$ определяются по формулам:

$$A_{14}^{(k)} = A_{15}^{(k)} = A_{16}^{(k)} = A_{34}^{(k)} = A_{35}^{(k)} = A_{36}^{(k)} = A_{45}^{(k)} = A_{46}^{(k)} = A_{56}^{(k)} = 0$$

$$A_{44}^{(k)} = a_{44}^{(k)},\ A_{55}^{(k)} = a_{55}^{(k)},\ A_{66}^{(k)} = a_{66}^{(k)},$$

$$A_{11}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)}\right)^2\right)\Big/a_{22}^{(k)},\ \ A_{13}^{(k)} = \left(a_{13}^{(k)}a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)}a_{23}^{(k)}\right)\Big/a_{22}^{(k)}.$$

В результате, формулы для напряжений и перемещений (1.5) упрощаются и делятся на две группы:

$$\sigma_{xp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2},\quad \sigma_{xzp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta},$$

$$\sigma_{yp}^{(k,0)} = -\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{a_{12}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2} + a_{23}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,0)}\right),$$

$$w_p^{(k,0)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^4}\frac{\partial^3\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^3} - \frac{1}{\lambda^2}\left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}\right)\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta}, \tag{2.1}$$

$$u_p^{(k,s)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} - \frac{A_{13}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)}$$

и

$$\sigma_{xyp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial\zeta},\ v_p^{(k,0)} = -\frac{a_{66}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial\zeta}. \tag{2.2}$$

Оператор $L_{12}^{(k)}$ тождественно превращается в нуль, а система уравнений (1.8) распадается на два самостоятельных уравнения, которым соответствуют решения типа *плоского* и *антиплоского пограничных слоёв* [3–5]. При этом, поверхностные условия (1.1) и условия контакта (1.2) также распадаются на две группы.

При $s = 0$ будем иметь:

а) *плоский пограничный слой*

$$L_{11}\sigma_{zp}^{(k,0)} = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{xz}^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right) = 0,\quad w^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right) = 0,\\ u^{(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right) = 0,\quad \sigma_z^{(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right) = 0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

б) *антиплоский пограничный слой*

$$L_{22}\sigma_{yzp}^{(k,0)}=0 \tag{2.5}$$

$$\sigma_{yz}^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)=0,\quad v^{(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right)=0. \tag{2.6}$$

Посредством формул (2.1), (2.2) и (1.9) задачу (2.3) – (2.4) представим в виде

$$A_{11}^{(k)}\frac{\partial^4\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^4}+\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)\lambda^2\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2}+A_{33}^{(k)}\lambda^4\sigma_{zp}^{(k,0)}=0\,, \tag{2.7}$$

$$\sigma_{zp}^{(1,0)}\Big|_{\zeta=\zeta_1}=0,\ \frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(1,0)}}{\partial\zeta^2}\Bigg|_{\zeta=\zeta_1}=0,\ \frac{\partial\sigma_{zp}^{(2,0)}}{\partial\zeta}\Bigg|_{\zeta=\zeta_2}=0,\ \frac{\partial^3\sigma_{zp}^{(2,0)}}{\partial\zeta^3}\Bigg|_{\zeta=\zeta_2}=0, \tag{2.8}$$

а задачу (2.5)-(2.6) – в виде

$$A_{66}^{(k)}\lambda^2\frac{\partial^2\sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2}+A_{44}^{(k)}\lambda^4\sigma_{yzp}^{(k,0)}=0\,, \tag{2.9}$$

$$\sigma_{yzp}^{(2,0)}\Big|_{\zeta=\zeta_2}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{yzp}^{(1,0)}}{\partial\zeta}\Bigg|_{\zeta=\zeta_1}=0. \tag{2.10}$$

Краевые задачи (2.7)–(2.8) и (2.9)–(2.10) являются задачами на собственные значения и собственные функции. После того, как будут найдены собственные значения λ_n, соответствующие собственные функции можно будет определить с помощью формул (2.1) или (2.2).

3. Плоский пограничный слой двухслойной ортотропной пластинки.

Уравнению однородного плоского пограничного слоя (2.5) соответствует характеристическое уравнение

$$A_{11}^{(k)}r^4+\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)\lambda^2r^2+A_{33}^{(k)}\lambda^4=0\,. \tag{3.1}$$

Это уравнение может иметь корни трёх типов в зависимости от значения $D^{(k)}=\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)^2-4A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)}$ [3,9].

а) Пусть $D^{(k)}>0$. Тогда, корни характеристического уравнения (3.1), что чаще имеет место для реальных ортотропных материалов – мнимые и отличны друг от друга

$$r_{1,2}^{(k)}=\pm iq_1^{(k)}\lambda,r_{3,4}^{(k)}=\pm iq_2^{(k)}\lambda,\left(q_{1,2}^{(k)}\right)^2=\frac{\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)\mp\sqrt{D^{(k)}}}{2A_{11}^{(k)}}<0 \tag{3.2}$$

Корням (3.2) соответствует следующее решение уравнения (2.7):

$$\begin{aligned}\sigma_{zp}^{(k,0)}&=C_1^{(k,0)}\cos q_1^{(k)}\lambda\zeta+C_2^{(k,0)}\sin q_1^{(k)}\lambda\zeta+\\&+C_3^{(k,0)}\cos q_2^{(k)}\lambda\zeta+C_4^{(k,0)}\sin q_2^{(k)}\lambda\zeta\end{aligned},$$

где $C_i^{(k,0)}$ $\left(i=1,2,3,4\right)$ – неизвестные постоянные интегрирования.

Тогда, из формул (2.1) для остальных величин получим:

$$\sigma_{xp}^{(k,0)} = -C_1^{(k,0)}\left(q_1^{(k)}\right)^2 \cos q_1^{(k)}\lambda\zeta - C_2^{(k,0)}\left(q_1^{(k)}\right)^2 \sin q_1^{(k)}\lambda\zeta -$$
$$- C_3^{(k,0)}\left(q_2^{(k)}\right)^2 \cos q_2^{(k)}\lambda\zeta - C_4^{(k,0)}\left(q_2^{(k)}\right)^2 \sin q_2^{(k)}\lambda\zeta$$
$$\sigma_{xzp}^{(k,0)} = -C_1^{(k,0)} q_1^{(k)} \sin q_1^{(k)}\lambda\zeta + C_2^{(k,0)} q_1^{(k)} \cos q_1^{(k)}\lambda\zeta -$$
$$- C_3^{(k,0)} q_2^{(k)} \sin q_2^{(k)}\lambda\zeta + C_4^{(k,0)} q_2^{(k)} \cos q_2^{(k)}\lambda\zeta,$$
$$\sigma_{yp}^{(k,0)} = \frac{1}{a_{22}^{(k)}}\Bigg[C_1^{(k,0)}\left(a_{12}^{(k)}\left(q_1^{(k)}\right)^2 - a_{23}^{(k)}\right)\cos q_1^{(k)}\lambda\zeta +$$
$$+ C_2^{(k,0)}\left(a_{12}^{(k)}\left(q_1^{(k)}\right)^2 - a_{23}^{(k)}\right)\sin q_1^{(k)}\lambda\zeta + \tag{3.3}$$
$$+ C_3^{(k,0)}\left(a_{12}^{(k)}\left(q_2^{(k)}\right)^2 - a_{23}^{(k)}\right)\cos q_2^{(k)}\lambda\zeta +$$
$$+ C_4^{(k,0)}\left(a_{12}^{(k)}\left(q_2^{(k)}\right)^2 - a_{23}^{(k)}\right)\sin q_2^{(k)}\lambda\zeta \Bigg],$$
$$u_p^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda}\Big(m_1^{(k)}\left(C_1^{(k,0)} \cos q_1^{(k)}\lambda\zeta + C_2^{(k,0)} \sin q_1^{(k)}\lambda\zeta\right) +$$
$$+ m_2^{(k)}\left(C_3^{(k,0)} \cos q_2^{(k)}\lambda\zeta + C_4^{(k,0)} \sin q_2^{(k)}\lambda\zeta\right)\Big),$$
$$w_p^{(k,0)} = -\frac{1}{\lambda}\Big(m_3^{(k)}\left(C_1^{(k,0)} \sin q_1^{(k)}\lambda\zeta - C_2^{(k,0)} \cos q_1^{(k)}\lambda\zeta\right) +$$
$$+ m_4^{(k)}\left(C_3^{(k,0)} \sin q_1^{(k)}\lambda\zeta - C_4^{(k,0)} \cos q_1^{(k)}\lambda\zeta\right)\Big),$$

где

$$m_1^{(k)} = A_{11}^{(k)}\left(q_1^{(k)}\right)^2 - A_{13}^{(k)},\; m_3^{(k)} = \left(A_{11}^{(k)}\left(q_1^{(k)}\right)^2 - \left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}\right)\right) q_1^{(k)},$$
$$m_2^{(k)} = A_{11}^{(k)}\left(q_2^{(k)}\right)^2 - A_{13}^{(k)},\; m_4^{(k)} = \left(A_{11}^{(k)}\left(q_2^{(k)}\right)^2 - \left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}\right)\right) q_2^{(k)}.$$

Удовлетворим условиям полного контакта (1.2) и неизвестные величины с верхним индексом «2» выразим через величины с индексом «1»:

$$C_1^{(2,0)} = k_5 C_1^{(1,0)} + k_6 C_3^{(1,0)},\;\; C_2^{(2,0)} = k_3 C_2^{(1,0)} + k_4 C_4^{(1,0)}$$
$$C_3^{(2,0)} = (1-k_5) C_1^{(1,0)} + (1-k_6) C_3^{(1,0)},\; C_4^{(2,0)} = k_1 C_2^{(1,0)} + k_2 C_4^{(1,0)},$$

где

$$k_1 = \frac{m_3^{(1)} q_1^{(2)} - m_3^{(2)} q_1^{(1)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}},\; k_2 = \frac{m_4^{(1)} q_1^{(2)} + m_3^{(2)} q_2^{(1)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}},\; k_5 = \frac{m_1^{(1)} - m_2^{(2)}}{m_1^{(2)} - m_2^{(2)}},$$

$$k_3 = \frac{m_4^{(2)} q_1^{(1)} + m_3^{(1)} q_2^{(2)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}},\; k_4 = \frac{m_4^{(1)} q_2^{(2)} - m_4^{(2)} q_2^{(1)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}},\; k_6 = \frac{m_2^{(1)} - m_2^{(2)}}{m_1^{(2)} - m_2^{(2)}}.$$

Удовлетворив однородным условиям (2.4), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $C_1^{(1,0)}, C_2^{(1,0)}, C_3^{(1,0)}, C_4^{(1,0)}$:

$$\begin{aligned}
&C_1^{(1,0)}\varphi_1 + C_2^{(1,0)}\varphi_2 + C_3^{(1,0)}\varphi_3 + C_4^{(1,0)}\varphi_4 = 0,\\
&C_1^{(1,0)}\left(q_1^{(1)}\right)^2\varphi_1 + C_2^{(1,0)}\left(q_1^{(1)}\right)^2\varphi_2 + C_3^{(1,0)}\left(q_2^{(1)}\right)^2\varphi_3 + C_4^{(1,0)}\left(q_2^{(1)}\right)^2\varphi_4 = 0,\\
&C_1^{(1,0)}\left[k_5 q_1^{(2)}\varphi_6 + \left(1-k_5\right)q_2^{(2)}\varphi_8\right] - C_2^{(1,0)}\left[k_3 q_1^{(2)}\varphi_5 + k_1 q_2^{(2)}\varphi_7\right] +\\
&+C_3^{(1,0)}\left[k_6 q_1^{(2)}\varphi_6 + \left(1-k_6\right)q_2^{(2)}\varphi_8\right] - C_4^{(1,0)}\left[k_4 q_1^{(2)}\varphi_5 + k_2 q_2^{(2)}\varphi_7\right] = 0,\\
&C_1^{(1,0)}\left[k_5 q_1^{(2)}\varphi_6 + \left(1-k_5\right)q_2^{(2)}\varphi_8\right] - C_2^{(1,0)}\left[k_3 q_1^{(2)}\varphi_5 + k_1 q_2^{(2)}\varphi_7\right] +\\
&+C_3^{(1,0)}\left[k_6 q_1^{(2)}\varphi_6 + \left(1-k_6\right)q_2^{(2)}\varphi_8\right] - C_4^{(1,0)}\left[k_4 q_1^{(2)}\varphi_5 + k_2 q_2^{(2)}\varphi_7\right] = 0,
\end{aligned}\tag{3.4}$$

где для упрощения записи введены обозначения:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \cos q_1^{(1)}\lambda\zeta_1,\; \varphi_2 = \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1,\; \varphi_3 = \cos q_2^{(1)}\lambda\zeta_1, \varphi_4 = \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1,\\
&\varphi_5 = \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2, \varphi_6 = \sin q_1^{(2)}\lambda\zeta_2, \varphi_7 = \cos q_2^{(2)}\lambda\zeta_2, \varphi_8 = \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Однородная система уравнений (3.4) будет иметь нетривиальное решение только в том случае, когда её определитель $\Delta(\lambda)$ равен нулю.

Элементы определителя $\Delta(\lambda)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
&d_{11} = \varphi_1,\; d_{12} = \varphi_2,\; d_{13} = \varphi_3,\; d_{14} = \varphi_4,\\
&d_{21} = \left(q_1^{(1)}\right)^2\varphi_1,\; d_{22} = \left(q_1^{(1)}\right)^2\varphi_2,\; d_{23} = \left(q_2^{(1)}\right)^2\varphi_3,\; d_{24} = \left(q_2^{(1)}\right)^2\varphi_4,\\
&d_{31} = k_5 q_1^{(2)}\varphi_6 + \left(1-k_5\right)q_2^{(2)}\varphi_8,\; d_{32} = -k_3 q_1^{(2)}\varphi_5 - k_1 q_2^{(2)}\varphi_7,\\
&d_{33} = k_6 q_1^{(2)}\varphi_6 + \left(1-k_6\right)q_2^{(2)}\varphi_8,\; d_{34} = -k_4 q_1^{(2)}\varphi_5 - k_2 q_2^{(2)}\varphi_7,\\
&d_{41} = k_5\left(q_1^{(1)}\right)^3\varphi_6 + \left(1-k_5\right)\left(q_2^{(1)}\right)^3\varphi_8,\; d_{42} = -k_3\left(q_1^{(1)}\right)^3\varphi_5 - k_1\left(q_2^{(1)}\right)^3\varphi_7,\\
&d_{43} = k_6\left(q_1^{(1)}\right)^3\varphi_6 + \left(1-k_6\right)\left(q_2^{(1)}\right)^3\varphi_8,\; d_{44} = -k_4\left(q_1^{(1)}\right)^3\varphi_5 - k_2\left(q_2^{(1)}\right)^3\varphi_7
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Приравнивая определитель системы (3.4) нулю

$$\Delta(\lambda) = \det\left\|d_{ij}\right\| = 0,$$

получим следующее трансцендентное уравнение для определения λ.

$$
\begin{aligned}
&a_1 \cos q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \cos q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_2 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_3 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \cos q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_4 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_5 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_6 \cos q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_7 \cos q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \cos q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 = 0,
\end{aligned}
\qquad (3.7)
$$

где коэффициенты a_i определяются по формулам:

$$
a_1 = k_2 k_3 - k_1 k_4,\ a_2 = -k_4(1-k_5), a_3 = k_2 k_5,
$$

$$
a_4 = k_3(1-k_6),\ a_5 = (k_5 - k_6),\ a_6 = k_1(1-k_5),\ a_7 = -k_1 k_6. \qquad (3.8)
$$

Трансцендентное уравнение (3.7) имеет бесконечное множество корней [1,3]. Их можно решать численными или асимптотическими методами. Из комплексных корней нас интересуют только корни, удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Отметим, что для однослойной пластинки

$$
\zeta_1 = -\zeta_2 = 1,\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)},\ q_i^{(1)} = q_i^{(2)} = q_i,\ k_1 = k_4 = k_6 = 0,\ k_2 = k_3 = k_5 = 1,
$$

$$
a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 1,\ a_3 = a_6 = a_7 = 0
$$

трансцендентное уравнение (3.7) упрощается и примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 q_1^{(1)}\lambda \cos^2 q_2^{(1)}\lambda - \sin^2 q_2^{(1)}\lambda \cos^2 q_1^{(1)}\lambda + \\
&+\sin^2 q_1^{(1)}\lambda \sin q_2^{(1)}\lambda - \sin^2 q_1^{(1)}\lambda \cos^2 q_2^{(1)}\lambda = 0.
\end{aligned}
$$

После несложных преобразований получим [7]:

$$
\cos 2q_1\lambda \cdot \cos 2q_2\lambda = 0. \qquad (3.9)
$$

Пусть λ_n – корень уравнения (3.7).

Поскольку определитель $\Delta(\lambda)$ равен нулю, то между её строками существует линейная зависимость. Отбросив последнее уравнение системы (3.4), получим систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными. Она позволяет первые три константы выразить через четвёртую по формулам:

$$
C_1^{(1,0)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} D_n^{(0)},\ C_2^{(1,0)} = \frac{\Delta_2}{\Delta} D_n^{(0)},\ C_3^{(1,0)} = \frac{\Delta_3}{\Delta} D_n^{(0)}, \qquad (3.10)
$$

где Δ – основной, а Δ_i – вспомогательные определители следующей матрицы:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\
d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\
d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34}
\end{array}\right)
$$

а $D_n^{(0)}$ – новая неизвестная постоянная, соответствующая собственному значению λ_n и будет определяться из боковых условий.

Тогда, для первого слоя напряжения и перемещения плоского пограничного слоя будут определяться по формулам (им припишем дополнительный нижний индекс « p »):

$$
\begin{gathered}
\sigma_{zpp}^{(1,0)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\Delta}\Big\{\Delta_1\cos q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+\Delta_2\sin q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+ \\
+\Delta_3\cos q_2^{(1)}\lambda\zeta+\Delta\sin q_2^{(1)}\lambda\zeta\Big\}D_n^{(0)}, \\
\sigma_{xpp}^{(1,0)}=-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\Delta}\Big\{\Delta_1\left(q_1^{(1)}\right)^2\cos q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+\Delta_2\left(q_1^{(1)}\right)^2\sin q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+ \\
+\Delta_3\left(q_2^{(1)}\right)^2\cos q_2^{(1)}\lambda_n\zeta+\Delta\left(q_2^{(1)}\right)^2\sin q_2^{(1)}\lambda_n\zeta\Big\}D_n^{(0)}, \\
\sigma_{xzpp}^{(1,0)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\Delta}\Big\{-\Delta_1 q_1^{(1)}\sin q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+\Delta_2 q_1^{(1)}\cos q_1^{(1)}\lambda_n\zeta- \\
-\Delta_3 q_2^{(1)}\sin q_2^{(1)}\lambda_n\zeta+\Delta\, q_2^{(1)}\cos q_2^{(k)}\lambda_n\zeta\Big\}D_n^{(0)}, \\
\sigma_{ypp}^{(1,0)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_{22}^{(1)}}\Big\{\frac{\Delta_1}{\Delta}\left(a_{12}^{(1)}\left(q_1^{(1)}\right)^2-a_{23}^{(1)}\right)\cos q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+ \\
+\frac{\Delta_2}{\Delta}\left(a_{12}^{(1)}\left(q_1^{(1)}\right)^2-a_{23}^{(1)}\right)\sin q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+ \\
+\frac{\Delta_3}{\Delta}\left(a_{12}^{(1)}\left(q_2^{(1)}\right)^2-a_{23}^{(1)}\right)\cos q_2^{(1)}\lambda_n\zeta+ \\
+\left(a_{12}^{(1)}\left(q_2^{(1)}\right)^2-a_{23}^{(1)}\right)\sin q_2^{(1)}\lambda_n\zeta\Big\}D_n^{(0)}, \\
u_{pp}^{(1,0)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}\Big\{\frac{\Delta_1}{\Delta}m_1^{(1)}\cos q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+\frac{\Delta_2}{\Delta}m_1^{(1)}\sin q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+ \\
+\frac{\Delta_3}{\Delta}m_2^{(1)}\cos q_2^{(1)}\lambda_n\zeta+m_2^{(1)}\sin q_2^{(1)}\lambda_n\zeta\Big\}D_n^{(0)}, \\
w_{pp}^{(1,0)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}\Big\{-\frac{\Delta_1}{\Delta}m_3^{(1)}\sin q_1^{(1)}\lambda_n\zeta+\frac{\Delta_2}{\Delta}m_3^{(1)}\cos q_1^{(1)}\lambda_n\zeta- \\
-\frac{\Delta_3}{\Delta}m_4^{(1)}q_2^{(1)}\sin q_2^{(1)}\lambda_n\zeta+m_4^{(1)}\cos q_2^{(1)}\lambda_n\zeta\Big\}D_n^{(0)}.
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

Напряжения и перемещения плоского погранслоя второго слоя запишутся аналогичным образом.

Если λ_n – корень уравнения (3.7), то из (2.9) и (2.10) следует $\sigma_{xzpp}^{(k,0)} = \sigma_{xypp}^{(k,0)} = v_{pp}^{(k,0)} \equiv 0$.

б) Пусть $D^{(k)} = \left(2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}\right)^2 - 4A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)} = 0$.

Тогда, корни характеристического уравнения (2.11) – мнимые и кратные:

$$r_{1,2}^{(k)} = \pm iq^{(k)}\lambda, \quad r_{3,4}^{(k)} = \pm iq^{(k)}\lambda, \ \left(q^{(k)}\right)^2 = \frac{A_{55}^{(k)} + 2A_{13}^{(k)}}{2A_{11}^{(k)}} = \sqrt{\frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}}. \tag{3.12}$$

Решение задачи (2.7)–(2.8) представится в виде:

$$\sigma_{zp}^{(k,0)} = \left(C_1^{(k,0)} + \zeta C_2^{(k,0)}\right)\cos q^{(k)}\lambda\zeta + \left(C_3^{(k,0)} + \zeta C_4^{(k,0)}\right)\sin q^{(k)}\lambda\zeta. \tag{3.13}$$

в) Пусть $D^{(k)} < 0$. Тогда корни характеристического уравнения (2.11) – комплексно-сопряжённые:

$$r_{1,2}^{(k)} = \left(p^{(k)} \pm iq^{(k)}\right)\lambda, \quad r_{3,4}^{(k)} = \left(= -p^{(k)} \pm iq^{(k)}\right)\lambda$$

$$\left(p^{(k)}\right)^2 = \frac{2\sqrt{A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)}} - A_{55}^{(k)} + 2A_{13}^{(k)}}{2A_{11}^{(k)}}, \left(q^{(k)}\right)^2 = \frac{2\sqrt{A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)}} - A_{55}^{(k)} - 2A_{13}^{(k)}}{2A_{11}^{(k)}}. \tag{3.14}$$

Решение задачи (2.7)–(2.8) представится в виде:

$$\sigma_{zp}^{(k,0)} = \mathrm{C}_1^{(k,0)}\varphi_1^{(k,0)} + \mathrm{C}_2^{(k,0)}\varphi_2^{(k,0)} + \mathrm{C}_4^{(k,0)}\varphi_3^{(k,0)} + \mathrm{C}_4^{(k,0)}\varphi_4^{(k,0)}, \tag{3.15}$$

где

$$\varphi_1^{(k,0)} = \mathrm{ch}p^{(k)}\lambda\zeta\cos q^{(k)}\lambda\zeta, \ \varphi_2^{(k,0)} = \mathrm{sh}p^{(k)}\lambda\zeta\sin q^{(k)}\lambda\zeta,$$

$$\varphi_3^{(k,0)} = \mathrm{ch}\, p^{(k)}\lambda\zeta\sin q^{(k)}\lambda\zeta, \ \varphi_4^{(k,0)} = \mathrm{sh}p^{(k)}\lambda\zeta\cos q^{(k)}\lambda\zeta$$

Собственные числа λ_n в (3.13) и (3.15) определяются из соответствующих трансцендентных уравнений. Общий интеграл плоского погранслоя для случаев б) и в) запишется аналогичным образом. Они здесь не рассматриваются.

Отметим, что соответствующие трансцендентные уравнения, а также общие интегралы плоского погранслоя для однослойной ортотропной пластинки приведены в [7].

Численные расчёты. В общем случае трансцендентное уравнение (3.7) имеет счётное множество как комплексно-сопряжённых, так и действительных корней, которые возрастают достаточно быстро. Приведём значения нескольких корней, расположенных в возрастающем порядке $\mathrm{Re}\lambda > 0$, для некоторых ортотропных материалов. Упругие характеристики этих материалов приведены в табл.1 [3].

Таблица 1

Упругие	**Наименование материалов**

характеристики	Стеклопластик АСТТ (б) –C_2-О и ПН-3	СВАМ 10:1	СВАМ 2:1	Графито-эпоксидный материал (ГЭМ)
$E_1 \cdot 10^{-9}$ Па	17,6	38,26	36,0	7,26
$E_2 \cdot 10^{-9}$ Па	12,9	17,65	26,3	7,26
$E_3 \cdot 10^{-9}$ Па	4,2	8,61	10,8	84,66
$G_{12} \cdot 10^{-9}$ Па	2,7	5,2	4,9	2,75
$G_{23} \cdot 10^{-9}$ Па	2,4	3,14	4,0	4,21
$G_{13} \cdot 10^{-9}$ Па	2,4	3,83	4,4	4,21
ν_{12}	0,15	0,22	0,105	0,323
ν_{23}	0,31	0,31	0,431	0,0257
ν_{13}	0,08	0,07	0,405	0,3002

С помощью программного пакета Wolfram Mathematica вычислены значения первых восьми корней уравнения (3.7) для некоторых материалов. Они приведены в табл. 2.

Таблица 2

Корни уравнения	**Наименование материалов I слой – СВАМ 2:1; II слой –ГЭМ**				
	Толщины слоёв в метрах				
	$h_1 = 0{,}1$ $h_2 = 0{,}1$	$h_1 = 0{,}1$ $h_2 = 0{,}5$	$h_1 = 0{,}1$ $h_2 = 1$	$h_1 = 0{,}1$ $h_2 = 10$	$h_1 = 0{,}1$ $h_2 = 100$
λ_1	0.993475 +0.046941i	0.696414	0.6397	0.589155	0.584122
λ_2	2.139626 +0.207307i	2.15426	1.92793	1.76755	1.75237
λ_3	3.461697	3.10981 +0.511703 i	3.27566	2.94671	2.92062
λ_4	3.757270	4.14044 +0.464828 i	3.99713 +0.979963i	3.47207	3.42575
λ_5	5.385286 +0.819447 i	5.12115	4.64684	4.12277	4.08884
λ_6	5.785335	6.42381	5.79124	5.3019	5.2571
λ_7	5.958607	7.20376	7.01281	6.4807	6.42534
λ_8	6.984753	7.76791	8.28427	7.65981	7.5936
	I слой – Стеклопластик АСТТ (б) –C_2-О и ПН-3; II слой – СВАМ 10:1				
	$h_2 = 0{,}1$ $h_1 = 0{,}1$	$h_2 = 0{,}1$ $h_1 = 0{,}5$	$h_2 = 0{,}1$ $h_1 = 1$	$h_2 = 0{,}1$ $h_1 = 10$	$h_2 = 0{,}1$ $h_1 = 100$
λ_1	0.552327	0.664174	0.595621	0.539892	0.53453
λ_2	1.20738	1.1829 +0.273232 i	1.1232	0.958029	0.947397
λ_3	1.25807 +0.485119 i	1.57878	1.21233	1.18468	1.17661
λ_4	1.9309	2.18521	1.99342	1.83545	1.81924
λ_5	2.56509	2.99793	2.76475 +0.418209 i	2.48721	2.46196
λ_6	2.81385	3.54196 +0.399207 i	2.857	2.87409	2.84207

λ_7	3.66728 +0.0320142 i	4.3653	3.47546	3.12497	3.10345
λ_8	4.82472 +0.0426689 i	4.60452 +0.20938 i	4.11947	3.77996	3.74642

Отметим, что для однослойной пластинки соответствующее трансцендентное уравнение (3.8) имеет только действительные корни.

4. Антиплоский пограничный слой двухслойной ортотропной пластинки.

В краевой задаче (2.9) и (2.10) корни характеристического уравнения:

$$A_{66}^{(k)}\lambda^2 r^2 + A_{44}^{(k)}\lambda^4 = 0 \tag{4.1}$$

– мнимые и им соответствует следующее решение (им припишем дополнительный нижний индекс « a »):

$$\sigma_{yzpa}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)}\cos\mu^{(k)}\lambda\zeta + C_2^{(k,0)}\sin\mu^{(k)}\lambda\zeta$$

$$\sigma_{xypa}^{(k,0)} = -C_1^{(k,0)}\mu^{(k)}\sin\mu^{(k)}\lambda\zeta + C_2^{(k,0)}\mu^{(k)}\cos\mu^{(k)}\lambda\zeta$$

$$v_{pa}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)}\frac{a_{66}^{(k)}\mu^{(k)}}{\lambda}\sin\mu^{(k)}\lambda\zeta - C_2^{(k,0)}\frac{a_{66}^{(k)}\mu^{(k)}}{\lambda}\cos\mu^{(k)}\lambda\zeta,$$

где

$$\mu^{(k)} = \sqrt{\frac{A_{44}^{(k)}}{A_{66}^{(k)}}} = \sqrt{\frac{a_{44}^{(k)}}{a_{66}^{(k)}}}\,. \tag{4.2}$$

Из условий контакта (1.2) вытекает

$$C_1^{(2,0)} = C_1^{(1,0)},\ C_2^{(2,0)} = \mu C_2^{(1,0)},$$

где

$$\mu = \frac{a_{66}^{(1)}\mu^{(1)}}{a_{66}^{(2)}\mu^{(2)}} = \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}a_{66}^{(1)}}{a_{44}^{(2)}a_{66}^{(2)}}}\,. \tag{4.3}$$

Удовлетворив однородным условиям (2.6), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $C_1^{(1,0)}, C_2^{(1,0)}$:

$$\begin{gathered} C_1^{(1,0)}\cos\mu^{(2)}\lambda\zeta_2 + \mu\, C_2^{(1,0)}\sin\mu^{(2)}\lambda\zeta_2 = 0 \\ -C_1^{(1,0)}\frac{a_{66}^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda}\sin\mu^{(1)}\lambda\zeta_1 + C_2^{(1,0)}\frac{a_{66}^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda}\cos\mu^{(1)}\lambda\zeta_1 = 0 \end{gathered}\,. \tag{4.4}$$

Приравнивая определитель системы (4.4) к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение для определения λ:

$$\mu\,\mathrm{tg}\mu^{(1)}\lambda\zeta_1\,\mathrm{tg}\mu^{(2)}\lambda\zeta_2 + 1 = 0\,. \tag{4.5}$$

Отметим, что для однослойной пластинки

$$\zeta_1=-\zeta_2=1,\ a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(2)}=a_{ij},\ \mu=1,\ \mu^{(k)}=\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}},$$

трансцендентное уравнение (4.5) упрощается и примет вид:

$$\mathrm{tg}^2\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}\lambda-1=0, \tag{4.6}$$

которое имеет только вещественные корни [7]

$$\lambda_n=\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}\frac{\pi}{4}\left(1+2n\right),\ n=0,1,2,...$$

Отбросив второе уравнение системы (4.4) и выразив $C_1^{(1,0)}$ через $C_2^{(1,0)}$, получим:

$$C_1^{(1,0)}=-\mu\,\mathrm{tg}\mu^{(2)}\lambda\zeta_2\cdot C_2^{(1,0)}. \tag{4.7}$$

Поскольку каждому значению $\lambda=\lambda_n$ соответствует одна неизвестная постоянная $C_n^{(1,0)}$, то с учётом (4.7) для величин антиплоского пограничного слоя пластинки получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{yzpa}^{(1,0)}&=\sum_{n=1}^{N}\left\{-\mu\,\mathrm{tg}\,\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\cos\mu^{(1)}\lambda_n\zeta+\sin\mu^{(1)}\lambda_n\zeta\right\}C_n^{(1,0)}\\
\sigma_{yzpa}^{(2,0)}&=\sum_{n=1}^{N}\left\{-\mu\,\mathrm{tg}\,\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\cos\mu^{(2)}\lambda_n\zeta+\mu\sin\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\right\}C_n^{(1,0)}\\
\sigma_{xypa}^{(1,0)}&=\sum_{n=1}^{N}\left\{\mu\mu^{(1)}\,\mathrm{tg}\,\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\sin\mu^{(1)}\lambda_n\zeta+\mu^{(1)}\cos\mu^{(1)}\lambda_n\zeta\right\}C_n^{(1,0)}\\
\sigma_{xypa}^{(2,0)}&=\sum_{n=1}^{N}\mu\mu^{(2)}\left\{\mathrm{tg}\,\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\sin\mu^{(2)}\lambda_n\zeta+\cos\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\right\}C_n^{(1,0)}\\
v_{pa}^{(1,0)}&=-\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{66}^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda_n}\left\{\mu\,\mathrm{tg}\,\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\sin\mu^{(1)}\lambda_n\zeta+\cos\mu^{(1)}\lambda_n\zeta\right\}C_n^{(1,0)}\\
v_{pa}^{(2,0)}&=-\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{66}^{(2)}\mu^{(2)}}{\lambda_n}\left\{\mathrm{tg}\,\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\sin\mu^{(2)}\lambda_n\zeta+\cos\mu^{(2)}\lambda_n\zeta\right\}C_n^{(1,0)}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\sigma_{zpa}^{(k,0)}=\sigma_{xpa}^{(k,0)}=\sigma_{xzpa}^{(k,0)}=\sigma_{ypa}^{(k,0)}=u_{pa}^{(k,0)}=w_{pa}^{(k,0)}=0.$$

При решении задачи (2.7) – (2.8), которое соответствует антиплоскому пограничному слою, будем также иметь:

$$\sigma_{zpa}^{(k,0)}=\sigma_{xpa}^{(k,0)}=\sigma_{xzpa}^{(k,0)}=\sigma_{ypa}^{(k,0)}=u_{pa}^{(k,0)}=w_{pa}^{(k,0)}=0.$$

Уравнения (2.7) и (2.9) при $s\geq 1$ становятся неоднородными и они должны быть решены при двух различных вариантах. В первом варианте λ есть корень трансцендентного уравнения (3.7), а во втором варианте – корень трансцендентного уравнения – (4.5). Решения уравнений (2.7) и (2.9) в каждом варианте запишутся в виде [3]:

$$Q_p^{(s)} = Q_{0p}^{(s)} + Q_{*p}^{(s)}, \quad (p, a) \tag{4.9}$$

где $Q_{0p}^{(s)}$ является решением однородного уравнения, а $Q_{*p}^{(s)}$ – частное решение неоднородного уравнения. Решения однородных систем плоского погранслоя первого варианта и антиплоского погранслоя второго варианта будут тождественно удовлетворять граничным условиям (1.1) в силу неизменности структуры решения однородной задачи для каждого s и удовлетворения этих условий при $s = 0$.

Аналогичным образом можно построить решения типа пограничного слоя вблизи торцов $x = a$ и $y = 0, b$.

Решение пространственной краевой задачи есть сумма внутренней задачи и пограничных слоёв:

$$J = Q_{вн} + Q_p + Q_a\,, \tag{4.10}$$

где $Q_{вн}$,Q_p,Q_a – соответственно, решение внутренней задачи, интегралы плоского и антиплоского пограничных слоёв.

Представление (4.9) содержит достаточное количество неизвестных констант, позволяющие удовлетворить торцевым условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с. Goldenveizer A.L.Theory of elastic thin shells. M.: Nauka, 1976. 510p. (in Russian).
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С. 668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. Vol.26. Issue 4, pp. 668-686 (in Russian).
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука,1997. 415с. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London.World Scientific Publ. 2015. 376p. (in Russian).
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Agalovyan L.A., Gevorkyan R.S. Non-classical boundary value problems for anisotropic layered beams, plates and shells. Er: Publishing house «Gitutiun» NAS RA. 2005. 468c. (in Russian).
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией //В сб.: XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин¦. Тезисы докладов. М.: 1977, с.5. Aghalovyan L.A., Khachatryan A.M. To the question of determining the stress-strain state of plates with a common anisotropy // In Proc.: XI All-Union conf. on the theory of shells and plates. Theses of reports. M.: 1977, p. 5. (in Russian).
6. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки// Изв. АН Армении. Механика. 1993. №3-4. С.3-11.

Aghalovyan LA, Tovmasyan A. B. Asymptotic solution of a mixed three-dimensional internal problem for an anisotropic thermoelastic plate // Proceedings Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. 1993. №3-4. Pp. 3-11. (in Russian).

7. Петросян Г.А., Хачатрян А. М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.65-72.
Petrosyan G.A., Khachatryan A.M. Asymptotic Solution of a Mixed Boundary Value Problem of an Anisotropic Plate. Proceedings of NAS RA. Mechanics. 2009. T.62. №4. P.65-72. (in Russian).
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.
Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic shells. M.: Science. 1967. 268p. (in Russian).
9. Лехницкий С.Г. Теории упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с. Lekhnitsky S.G. Theories of elasticity of anisotropic body. M.: Science, 1977. 416 p. (in Russian).
10. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки. /Труды межд. школы-конф. молодых учёных «Механика-2013», посвящённой 70-летию НАН РА. Ереван–2013. С.88-92. Balasanyan E.S., Petrosyan G.A. Asymptotic solution of one mixed boundary value problem of an anisotropic two-layer plate. Works inter. school conf. young scientists «Mechanics–2013», dedicated to the 70th anniversary of the National Academy of Sciences of Armenia. Yerevan, 2013. pp. 88-92. (in Russian).
11. Баласанян Е.С. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки при неполном контакте между слоями //Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. №1. С.47–60. Balasanyan E.S. Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate, with not full contact between the layers. // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2018. Vol.71. Issue 1, pp. 47-60 (in Russian).

Сведения об авторах:

Баласанян Евгения Самвеловна – преподаватель кафедры математики АрГУ, Арцах, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. **Тел.:** (37497) 170620,
E- mail: majvazjan@mail.ru

Гулгазарян Лусине Гургеновна – д.ф.-м.н., проф. кафедры математики и методики её преподавания АГПУ, вед. науч. сотр. Института механики НАН Армении. **Тел.:** (37491) 302554, **E- mail:** iusina@mail.ru

Хачатрян Александр Мовсесович – д.ф.м.-н., проф., вед. науч. сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.:** (37499) 211949,
E-mail: alexkhach49@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.04.2019