ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.6

О ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ, КОГДА СЛОИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮТ ПО ЗАКОНУ СУХОГО ТРЕНИЯ

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, двухслойная анизотропная пластинка, смешанные условия, неполный контакт, кулоновое сухое трение, геометрическая нелинейность, внутренняя задача.

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M.

About two-dimensional equations of two-layer anisotropic plate when the layers interact by law dry friction

Key words: asymptotic method, two-layer anisotropic plate, mixed conditions, non full contact, dry friction law, geometrically nonlinear, interior problem.

Asymptotic method is applied and two dimension differential equations with partial derivatives from geometrically nonlinear equations of three dimension problem of elasticity theory for two-layer anisotropic plate are received. In the one surface of plate are given values of tensor of stress and in the other surface- mixed conditions of elasticity theory. Between the layers non full contacts conditions are given. Elastic layers interact according to the Coulomb dry friction law or the law of constant friction force.

Սարգսյան Ն.Ս., Խաչատրյան Ա.Մ.

Երկշերտ անիզոտրոպ սալի երկչափ հավասարումների մասին երբ շերտերը փոխազդում են չոր շփման օրենքով

Հիմնաբառեր: Ասիմպտոտիկ մեթոդ, երկշերտ անիզոտրոպ սալ, խառը եզրային պայմաններ, ոչ լրիվ կոնտակտ, կուլոնյան չոր շփում, երկրաչափորեն ոչ գծային, ներքին խնդիր:

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա՝ առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերը փոխազդում են չոր շփման օրենքով:

Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв заданы условия неполного контакта: упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона или по закону постоянной силы трения. Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний.

Введение. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [2,3]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-4]. Асимптотическая теория изотропных и анизотропных пластин и оболочек построена в [1,5]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой–

условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, изложены в [8]. Двумерные уравнения двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями приведены в [9]. В работе [10] асимптотическим методом построено решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной анизотропной термоупругой пластинки в нелинейной постановке. Двумерные уравнения двухслойной анизотропной пластинки при полном контакте слоёв приведены в [11], а при заданных тангенциальных напряжениях на плоскости раздела слоёв – в [12]. Задачи деформирования упругого тела, на границе которого поставлены условия сухого трения, рассмотрены в [13].

В настоящей работе на основе геометрически нелинейных уравнений теории упругости асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче двухслойной пластинки, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. Предполагается, что упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона или по закону постоянной силы трения. Рассмотрены конкретные примеры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega=\{(x,y,z):0\le x\le a, 0\le y\le b,\ -h_2\le z\le h_1\}$, где a – длина, b – ширина, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя. Здесь и последующем индекс k принимает значения $k=1,2$. Общая толщина полосы – $2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Условия на лицевых плоскостях $z=h_k$ задаются формулами

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{xz}^{+}(x,y),\ \sigma_{yz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{yz}^{+}(x,y),\ \sigma_{z}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{z}^{+}(x,y),\quad z=h_1\\
&w=\left(\frac{h}{l}\right)^3 w^{-}(x,y),\ \sigma_{xz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{xz}^{-}(x,y),\ \sigma_{yz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{yz}^{-}(x,y),\quad z=-h_2
\end{aligned}\tag{1.1}$$

На плоскости раздела $z=0$ заданы условия неполного контакта

$$\sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)},\ w^{(1)}=w^{(2)},\ \sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{xz}^{(2)}=f_1(x,y),\quad \sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(2)}=f_2(x,y)\tag{1.2}$$

В зависимости от выбранной модели контакта, функции $f_k(x,y)$ считаются заданными. В частности, случаю $f_k(x,y)\equiv 0$ соответствует отсутствие силы трения между слоями.

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта слоёв (1.2) и условиях на боковой поверхности пластинки. Краевые условия на торцах $x=0,a$ и $y=0,b$ – пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [3,6,7]

В уравнения теории упругости введём безразмерные переменные $\xi=x/l$, $\eta=y/l$, $\zeta=z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)}=u^{(k)}/l$,

$V^{(k)}=v^{(k)}/l$, $W^{(k)}=w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки $(h<<l)$.

Решение внутренней задачи ищется в виде [1,5,8-10]

$$Q^{(k)}=\varepsilon^{q_k}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(k,s)}, \tag{1.3}$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – номер приближения, k – номер слоя $(k=1,2)$, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$:

$$q_k=3 \text{ для } \sigma_x^{(k)},\sigma_y^{(k)},\sigma_z^{(k)},\sigma_{xy}^{(k)},U^{(k)},V^{(k)},W^{(k)},\ q_k=4 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)},\sigma_{yz}^{(k)} \tag{1.4}$$

Эта асимптотика, по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [8]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.4) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [9-10]. Поэтому, было принято $q=q_0+4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3) в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела, с учётом (1.4), получим систему для определения $Q^{(s)}$.

Асимптотическое решение этой системы получено в работах [11].

$$\sigma_z^{(k,s)}=\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_z^{*(k,s)},\ U^{(k,s)}=u^{(k,s)}+u^{*(k,s)},\ (U,V,W),$$

$$\sigma_x^{(k,s)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+a_3^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_x^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=B_{16}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+c_3^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{xy}^{*(k,s)},$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(k,s)}=&-\left[L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}\right]\zeta-\\&-\left(a_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\xi}+c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\eta}\right)\zeta+\sigma_{xz0}^{(k,s)}+\sigma_{xz}^{*(k,s)},\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$(x,y;\,1,2;\,a,b)$$

Величины со звездочками, входящие в формулы (1.5), как обычно, известны для каждого приближения s, поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Они были выведены в работе [11] и определяются по формулам

$$\sigma_z^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(k,)} \right) d\zeta\,,$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} +$$
$$+ a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - U_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} - V_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} - W_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} \Big) d\zeta$$

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} +$$
$$+ a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - U_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - V_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - W_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} \Big) d\zeta$$

$$w^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)}$$
$$+ a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - U_{\zeta}^{(s-2)} - V_{\zeta}^{(s-2)} - W_{\zeta}^{(s-2)} \Big) d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{*(k,s)}$$
$$+ a_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + a_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)} +$$
$$+ c_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + c_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + c_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta\,, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi}^{(k,s-3)} + V_{\xi}^{(k,s-3)} + W_{\xi}^{(k,s-3)}, \quad \left(1,2;\ x,y;\ \xi,\eta; a,b\right)$$

$$\omega^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-m)} \equiv 0$, если $s < m,\ m \in N$.

Члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, в свою очередь, определяются по формулам

$$\sigma_1^{*(k,s)}=\sigma_{11}^{(k,s-3)}+\sigma_{12}^{(k,s-2)},\ \sigma_2^{*(k,s)}=\sigma_{22}^{(k,s-3)}+\sigma_{21}^{(k,s-2)},\ \sigma_3^{*(k,s)}=\sigma_{33}^{(k,s-4)}+\sigma_{13}^{(k,s-2)}$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\left[\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\sigma_y^{(k,s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi^2}\sigma_x^{(k,s-i)}+$$
$$\left.+\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\eta^2}\sigma_y^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi\partial\eta}\sigma_{xy}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi\partial\zeta}\sigma_{xz}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\eta\partial\zeta}\sigma_{yz}^{(k,s-i)}\right]$$

$$\sigma_{12}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\zeta^2}\sigma_z^{(k,s-i)}+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\right]\quad\left(1,2,3;U,V,W;\xi,\eta,\zeta\right)\tag{1.7}$$

$$U_\xi^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\xi},\quad U_{\xi\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad\left(U,V,W\right)$$
$$U_\eta^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad U_{\zeta\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad\left(U,V,W\right)$$
$$U_\zeta^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta},\quad U_{\xi\zeta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta},\quad\left(U,V,W\right).$$

Представив функции $f_k(x,y)$ в виде рядов по степенам малого параметра ε и удовлетворив условиям неполного контакта (1.2), получим

$$\begin{aligned}&w^{(1,s)}=w^{(2,s)}=w^{(s)},\ \sigma_{z0}^{(1,s)}=\sigma_{z0}^{(2,s)},\\&\sigma_{xz0}^{(1,s)}=\sigma_{xz0}^{(2,s)}=f_1^{(s)}(\xi,\eta),\ \sigma_{yz0}^{(1,s)}=\sigma_{yz0}^{(2,s)}=f_2^{(s)}(\xi,\eta),\\&f_k^{(0)}(\xi,\eta)=f_k(x/l,y/l),\ f_k^{(s)}(\xi,\eta)=0,\ s>0,\ k=1,2;\end{aligned}\tag{1.8}$$

С учётом (1.8) удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующие формулы для определения неизвестных функций интегрирования $\sigma_{z0}^{(k,s)}$, $w^{(k,s)}$

$$w^{(s)}=w^{-(s)}-w^{*(2,s)}(\xi,\eta,\zeta_2),\ \sigma_{z0}^{(k,s)}=\sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\tag{1.9}$$

а также систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(k.s)},v^{(k,s)}$

$$\begin{aligned}&L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}-f_1^{(s)}(\xi,\eta)=p_1^{(k,s)}\\&L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{22}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}-f_2^{(s)}(\xi,\eta)=p_2^{(k,s)}\end{aligned}\tag{1.10}$$

Обобщённые нагрузки $p_1^{(k,s)}$ и $p_2^{(k,s)}$ определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
p_1^{(k,s)} &= -\sigma_{xz}^{\pm(s)}(\xi,\eta) - \sigma_{xz}^{*(k,s)}(\xi,\eta,\zeta_k) - \left(a_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi} + c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta}\right)\zeta_k \\
p_2^{(k,s)} &= -\sigma_{yz}^{\pm(s)}(\xi,\eta) - \sigma_{yz}^{*(k,s)}(\xi,\eta,\zeta_k) - \left(b_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta} + c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi}\right)\zeta_k
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)},\sigma_{yz}^{\pm(0)},\sigma_z^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^{\pm},\sigma_{yz}^{\pm},\sigma_z^{+};\ w^{-(0)} = w^{-};\ w^{-(s)},\sigma_{xz}^{\pm(s)},\sigma_{yz}^{\pm(s)},\sigma_z^{+(s)} = 0,\ s>0$$

$$\zeta_1 = h_1/h,\ \zeta_2 = -h_2/h,\ h = (h_1+h_2)/2$$

Операторы $L_{ij}\left(C_{ij}^{(k)}\right)$определяются по известным формулам [3,5].

Система уравнений (1.7) при $s=0$ распадается на две системы относительно $u^{(1,0)},v^{(1,0)}$ и $u^{(2,0)},v^{(2,0)}$, которые совпадают с уравнениями обобщюнной плоской задачи, теории упругости, когда имеется плоскость упругой симметрии [2,3]. Однако, вместо двух уравнений, здесь имеем систему из четырёх уравнений. Для приближений $s>0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

2. Взаимодействие слоёв по закону сухого трения.

Закон сухого трения (трение без смазки) означает, что на контактной поверхности поставлены такие условия, при которых величина касательных напряжений определяется только величиной нормальных напряжений, то есть касательная и нормальная составляющие вектора внешних сил связаны соотношением [13,14]

$$|\tau| = \tau\left(|\sigma_n|,\gamma_i\right),\quad i=\overline{1,N} \tag{2.1}$$

Здесь τ – некоторая положительная функция, γ_i – набор параметров, характеризующих шероховатость поверхности контакта, прочностные свойства контактирующих тел и т.п. Функция $\tau\left(|\sigma_n|,\gamma_i\right)$ в (2.1) определяет конкретный закон сухого трения на поверхности контакта.

К простейшим вариантам математического моделирования процесса трения следует отнести однопараметрические ($N=1$) законы

$$\tau\left(|\sigma_n|,\tau_s\right) = \tau_s \tag{2.2}$$

$$\tau\left(|\sigma_n|,\chi\right) = \chi|\sigma_n| \tag{2.3}$$

Первое соотношение – закон постоянной силы трения, второе – закон трения Амонтона–Кулона. Указанные законы трения исследованы теоретически и широко применяются в расчётах [13,14].

а) *Взаимодействие слоёв по закону постоянной силы трения.*

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону постоянной силы трения. Закон постоянной силы трения предполагает, что на контактной поверхности величина касательных напряжений постоянная, т.е. имеется

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \tau_{1s} = \text{const}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \tau_{2s} = \text{const} \tag{2.4}$$

Параметры τ_{1s}, τ_{2s} можно интерпретировать как предел текучести контактного слоя [15].

Из (1.6), как следствие, получим

$$f_k^{(s)}(\xi, \eta) = \tau_{ks}^{(s)}, \ k = 1, 2, \tag{2.5}$$

где

$$\tau_{ks}^{(0)} = \tau_{ks}, \ \tau_{ks}^{(s)} = 0 \ (k = 1, 2) \text{ при } s > 0 \tag{2.6}$$

Подставив значения $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$ из (2.2), (2.3) в (1.7), получим новую систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)} + L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)} &= \overline{p}_1^{(k,s)} \\ L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)} + L_{22}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)} &= \overline{p}_2^{(k,s)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\overline{p}_1^{(k,s)} = p_1^{(k,s)} + \tau_{1s}^{(s)}, \ \overline{p}_2^{(k,s)} = p_2^{(k,s)} + \tau_{2s}^{(s)} \tag{2.8}$$

б) *Взаимодействие слоёв по закону трения Амонтона – Кулона.*

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Амонтона –Кулона. Тогда

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_z(x, y, 0), \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_z(x, y, 0) \tag{2.9}$$

и, как следствие, получим

$$f_k^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_k f^{(s)}(\xi, \eta), \ k = 1, 2, \tag{2.10}$$

где

$$f^{(s)}(\xi, \eta) = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \tag{2.11}$$

Коэффициенты χ_k – постоянные величины. В частности, если χ_1 или χ_2 равны нулю, то это означает, что отсутствует сила трения между слоями по направлению Ox или Oy. Если одновременно χ_1, χ_2 равны нулю, то силы трения отсутствуют по всей плоскости контакта.

Подставив значения $f_k^{(s)}(\xi, \eta)$ из (2.10), (2.11) в (1.7), снова получим систему уравнений (2.7), где

$$\begin{aligned} \overline{p}_1^{(k,s)} &= p_1^{(k,s)} + \chi_k\left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)\right) \\ \overline{p}_2^{(k,s)} &= p_2^{(k,s)} + \chi_k\left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Заметим, что когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона, то при условиях на лицевых плоскостях (1.1), в отличие первой краевой задачи теории упругости [10], не происходит повышение порядка разрешающих дифференциальных уравнений. В случае, когда коэффициенты $\chi_1 = \chi_2 = 0$, в системе уравнений (2.7) меняются лишь правые части, куда не входят внешние нагрузки $\sigma_z^{+(s)}$ и $\sigma_z^{-(s)}$. Значения произвольных постоянных, появившихся при интегрировании системы (2.7), могут быть определены из граничных условий при $x = 0, a$ и $y = 0, b$ с привлечением решения пограничного слоя.

Отметим, что при $s = 0$ правые части системы уравнений (2.7), т.е. обобщённые нагрузки $\overline{p}_1^{(s)}$ и $\overline{p}_2^{(s)}$ не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений. Как видно из формул (1.6), нелинейность проявляется, начиная с приближения $s \geq 2$. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

Если внешние нагрузки $\sigma_{xz}^{\pm}(x, y), \sigma_{yz}^{\pm}(x, y)$, $\sigma_z^{+}(x, y)$, а так же $w^{-}(x, y)$ как функции двух переменных, удовлетворяют условиям разложения в двойные ряды Фурье, то систему уравнений (2.7) можно решать методом разложения искомых функций в ряды Фурье. Покажем это на примере.

3. Частные решения. Рассмотрим частные решения задачи для пластин из ортотропных материалов.

Пример 1. Пусть пластина нагружена только нормальной нагрузкой $\sigma_z^{+}(x, y)$, меняющейся по синусоидальному закону, а упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона (2.9). Имеем

$$\sigma_z^{+} = q_0 \sin \lambda\xi, \ \xi = \frac{\pi l}{a}, \ \sigma_{xz}^{\pm} = \sigma_{yz}^{\pm} = 0, \ w^{-} = 0 \tag{3.1}$$

Тогда, по формулам (1.6) получим

$$\sigma_{z0}^{(0)} = \sigma_z^{+} = q_0 \sin \lambda\xi, \ w^{(0)} = 0, \tag{3.2}$$

а из (2.9)–(2.11)

$$\sigma_{xz0}^{(k,0)} = \chi_1 q_0 \sin \lambda\xi, \ \sigma_{yz0}^{(k,0)} = \chi_2 q_0 \sin \lambda\xi \ . \tag{3.3}$$

Из (1.8) и (2.12) получим

$$\overline{p}_1^{(k,0)} = -a_3^{(k)} \lambda q_0 \cos \lambda\xi + \chi_1 q_0 \sin \lambda\xi, \ \overline{p}_2^{(k,0)} = \chi_2 q_0 \sin \lambda\xi \, . \tag{3.4}$$

Решение системы (2.7) ищем в виде функций

$$u^{(k,0)} = u_{01}^{(k,0)} \sin \lambda\xi + u_{02}^{(k,0)} \cos \lambda\xi, \ v^{(k,0)} = v_0^{(k,0)} \sin \lambda\xi \tag{3.5}$$

где $u_{01}^{(k,0)}, u_{02}^{(k,0)}, v_0^{(k,0)}$ – неизвестные коэффициенты.

Подставив (3.4) и (3.5) в систему (2.7) и приравнивая коэффициенты при $\sin \lambda\xi$ и $\cos \lambda\xi$, получим

$$u_{01}^{(k)} = -\frac{\chi_1 q_0}{C_{11}^{(k)} \lambda^2}, \ u_{02}^{(k)} = \frac{a_3^{(k)} q_0}{C_{11}^{(k)} \lambda}, \ v_0^{(k)} = -\frac{\chi_2 q_0}{C_{66}^{(k)} \lambda^2} \tag{3.6}$$

Учитывая, что $Q^{*(k,0)}=0$, в нулевом приближении получим решение

$$U^{(k,0)}=\frac{q_0}{C_{11}^{(k)}\lambda^2}\left(\chi_1\sin\lambda\xi+a_3^{(k)}\lambda\cos\lambda\xi\right),$$

$$V^{(k,0)}=-\frac{\chi_2 q_0}{C_{66}^{(k)}\lambda^2}\sin\lambda\xi,\ W^{(k,0)}=0 \tag{3.7}$$

$$\sigma_x^{(k,0)}=q_0\frac{\chi_1}{\lambda}\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\cos\lambda\xi+a_3^{(k)}q_0\left(1-\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\right)\sin\lambda\xi$$

$$\sigma_y^{(k,0)}=-q_0\frac{\chi_1}{\lambda}\frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\cos\lambda\xi+q_0\left(b_3^{(k)}-\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}a_3^{(k)}\right)\sin\lambda\xi \tag{3.8}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,0)}=-q_0\frac{\chi_2}{\lambda}\frac{B_{66}^{(k)}}{C_{66}^{(k)}}\sin\lambda\xi$$

$$\sigma_{xz}^{(k,0)}=q_0\left(1-\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\zeta\right)\left(\chi_1\sin\lambda\xi-a_3^{(k)}\lambda\cos\lambda\xi\right)$$

$$\sigma_{yz}^{(k,0)}=\chi_2 q_0\left(1-\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\zeta\right)\sin\lambda\xi \tag{3.9}$$

Найденное решение удовлетворяет граничным условиям $u=0,\ w=0$ на торцах $x=0,\ x=a$. Чтобы удовлетворить граничным условиям на торцах $y=0,\ y=a$, необходимо иметь также решение типа пограничного слоя.

Так как $Q^{*(k,1)}=0$, то $\overline{p}_1^{(k,1)}=p_2^{(k,1)}=0$, следовательно, и $Q^{(k,1)}=0$.

Как уже отмечалась, нелинейность проявляется, начиная с приближения $s\geq 2$. Следующие приближения вычисляются аналогичным образом.

Пример 2. Рассмотрим двухслойную пластину из ортотропных материалов. Предполагаем, что отсутствуют силы трения по всей плоскости контакта, то есть, одновременно χ_1,χ_2 равны нулю, а на лицевых поверхностях пластинки заданы только касательные усилия:

$$\sigma_{xz}^{\pm}=\tau_1\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},\ \sigma_{yz}^{\pm}=\tau_2\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\sigma_z^{+}=0,\quad w^{-}=0 \tag{3.10}$$

Пусть пластина заделана по краям, то есть имеем следующие граничные условия:

$$u=0,\ w=0\qquad \text{при}\ x=0,\ x=a$$

$$v=0,\ w=0\qquad \text{при}\ y=0,\ y=b \tag{3.11}$$

Тогда обобщённые нагрузки $\overline{p}_1^{(s)}$ и $\overline{p}_2^{(s)}$ в нулевом приближении равны

$$\overline{p}_1^{(0)} = \tau_1 \sin \pi\xi \cos m\eta,\ \overline{p}_2^{(0)} = \tau_2 \cos \pi\xi \sin m\eta,\ m = \frac{a}{b}, \tag{3.12}$$

где τ_1 и τ_2 – постоянные величины.

Решение системы (2.4) в нулевом приближении будем искать в виде

$$\begin{aligned} u^{(k,0)} &= f_u^{(k)} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} = f_u^{(k)} \sin \pi\xi \cos m\eta \\ v^{(k,0)} &= f_v^{(k)} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} = f_v^{(k)} \cos \pi\xi \sin m\eta,\ m = \frac{a}{b} \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $f_u^{(k)}$ и $f_v^{(k)}$ – неизвестные постоянные.

Подставив (3.12) и (3.13) в систему (2.7), приравнивая коэффициенты при $\sin \pi\xi \cos m\eta$ и $\cos \pi\xi \sin m\eta$, получим систему алгебраических уравнений относительно $f_u^{(k)}$ и $f_v^{(k)}$, решив которую, получим:

$$f_u^{(k)} = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ f_v^{(k)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(C_{11} + m^2 C_{66}\right)\left(m^2 C_{22} + C_{66}\right) - m^2 \left(C_{12} + C_{66}\right)^2 \\ \Delta_1 &= \left(m^2 C_{12} + C_{66}\right)\tau_1 - m\left(C_{12} + C_{66}\right)\tau_2, \\ \Delta_2 &= \left(C_{11} + m^2 C_{66}\right)\tau_2 - m\left(C_{12} + C_{66}\right)\tau_1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставив значения перемещений из (3.4) в формулы (1.5) для остальных величин, получим

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(k,0)} = 0,\ W^{(k,0)} = 0, \\ &\sigma_x^{(k,s)} = \left(f_u^{(k)} B_{11}^{(k)} + m f_v^{(k)} B_{12}^{(k)}\right) \cos \pi\xi \cos m\eta, \\ &\sigma_y^{(k,0)} = \left(m f_v^{(k)} B_{22}^{(k)} + f_u^{(k)} B_{12}^{(k)}\right) \cos \pi\xi \cos m\eta, \\ &\sigma_{xy}^{(k,0)} = B_{66}^{(k)} \left(m f_u^{(k)} + f_v^{(k)}\right) \sin \pi\xi \sin m\eta \\ &\sigma_{xz}^{(k,0)} = -\left[\left(B_{11}^{(k)} + m^2 B_{66}^{(k)}\right) f_u^{(k)} + m\left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}\right) f_v^{(k)}\right] \zeta \sin \pi\xi \cos m\eta \\ &\sigma_{yz}^{(k,0)} = -\left[\left(B_{12}^{(k)} + m^2 B_{22}^{(k)}\right) f_v^{(k)} + m\left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}\right) f_u^{(k)}\right] \zeta \cos \pi\xi \sin m\eta \end{aligned} \tag{3.16}$$

Найденное решение удовлетворяет граничным условиям (3.11).

Как в первом примере $Q^{*(k,1)} = 0$, $\overline{p}_1^{(k,1)} = p_2^{(k,1)} = 0$, следовательно, и $Q^{(k,1)} = 0$.

Нелинейность проявляется, начиная с приближения $s \geq 2$. Следующие приближения вычисляются аналогичным образом.

Заключение. В работе из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, а на плоскости раздела слоёв – закон сухого трения Кулона или закон постоянной силы трения.

Построено решение внутренней задачи и показано, что когда на плоскости раздела слоёв задан закон сухого трения Кулона, то, в отличие от первой краевой задачи, это не приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений. Также показано, что члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, проявляются в последующих приближениях и будут существенными особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. Vol. 26. Issue 4, pp 668-686 (in Russian).
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. M.: Gostekhizdat. 1957. 463 p. (in Russian).
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360 p. (in Russian).
4. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ. 1972. Т.8. Вып. 6. С.3-17. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. The present state of the theory of multilayer shells. //PM. 1972. Vol.8. Issue 6, pp.3-17 (in Russian).
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London. World Scientific Publ. 2015. 376 p. (in Russian).
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 211с. Novozhilov V.V. The foundations of non-linear theory of elasticity. L.-M. OGIZ, 1948. 211p. (in Russian).
7. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988. Chernykh K.F., Litvenenkova Z.N. The theory of large elastic deformations. L.-M: Publishing. LSU, 1988 (in Russian).
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Erevan. 2005. 468p. (in Russian).
9. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями// В сб. «Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела». Ереван.1999. С.23-29. Aghalovian L.A., Khachatryan A.M. On two-dimensional equations two-layer anisotropic plate, with non full contact between the layers //«The

Contact and Mixed Boundary Problems of Mechanics of a deformable media». Yerevan.1999. pp.23-29 (in Russian).
10. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение трехмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 42-49. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asymptotic solution of three-dimensional interior problem of anisotropic termoelasticity plate on basis of geometrical non-linear theory of elasticity. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2010. Vol. 66. № 1. pp. 42-49 (in Russian).
11. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости// Изв. АН Армении. Механика. 2017. Т.70. №1. С.64-73. Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimentional equations two-layer anisotropic plate with full contact between the layers. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. Vol.70. №1. pp.64-73 (in Russian).
12. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при заданных тангенциальных напряжениях на плоскости раздела слоёв. /Тр. IX Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис. 01-06 октября 2018. Ереван–2018. С.268-272. Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimensional equations of a two-layer anisotropic plate for given tangential stresses on the plane of separation of layers//. Proceedings of IX International Conference «The problems of interaction of deformable media» dedicated to the 75-th anniversary of NAS RA. October 1-6, 2018, Goris, Armenia**,** p. 268-272 (in Russian).
13. Алексеев А.Е. Нелинейные законы сухого трения в контактных задачах линейной теории упругости. ПМиТФ. 2002. Т.43. №4. С.161-169. Alekseev A.E. Nonlinear laws of dry friction in contact problems of the linear theory of elasticity. Applied Mathematics and Theoretical Physics. 2002. Vol.43. №4. pp.161-169 (in Russian).
14. Дюво Г. Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М: Наука, 1980. 384с. G. Duvaud, J.-L. Lions. Les inèquation en mècanique et en physique. Dunod. Paris. 1972. 384 p.
15. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. Kachanov L.M. Fundamentals of the theory of plasticity. M.: Nauka, 1969. 420 p. (in Russian).

Сведения об авторах:
Хачатрян Александр Мовсесович – д. ф.-м. н., проф., вед. науч. сотрудник Института механики НАН РА. **Тел.:** (+37499) 21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru
Саркисян Нарине Суреновна – преподаватель каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 21-00-78. **E-mail:** narine_sargsyan_2012@mail.ru

Поступила 04.04.2019