ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.2

О СВЕРХЗВУКОВОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ ПАНЕЛИ, РАСТЯНУТОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОТОКА ГАЗА, НАБЕГАЮЩЕГО НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, растягивающие усилия, стабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On divergence of the panel, stretched on the direction of supersonic gas flow, an accumulating on its free edge

Key words: stability, the stretching forces, stabilizing effect, divergence of a panel, localized divergence, supersonic overrunning

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of stretced forces at the free und hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the stretced forces leads to the stabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ ձգված առաձգական ուղղանկյուն սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ կայունություն, ձգող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում մեկ ազատ եզրով ձգված առաձգական ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը, որոնք բեռնված են ձգող ուժերով, զուգահեռ մյուս երկու նույնպես հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տրված սալի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում տեղայնացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և տեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները:

В статье в линейной постановке исследуется зависимость видов потери статической устойчивости от характера первоначального напряжённого состояния на примере обтекаемой сверхзвуковым потоком газа тонкой упругой прямоугольной пластинки со свободным краем, растянутой по направлению потока, набегающего на её свободный край.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток». Произведено разбиение многопараметрического пространства системы на области устойчивости и статической неустойчивости в виде дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края панели. Исследована граница области устойчивости. Определён явный вид зависимостей критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции от параметров системы.

Установлено, что при обтекании пластинки умеренными и большими сверхзвуковыми скоростями первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной стабилизации её невозмущённого состояния равновесия.

Введение. Как известно [1, 2], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих, как и растягивающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, намного мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии или растяжении является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

В работе исследуется зависимость видов потери статической устойчивости панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, от характера первоначального напряжённого состояния.

Исследованию зависимости видов потери устойчивости от характера первоначального напряжённого состояния пластин и оболочек как необтекаемых, так и обтекаемых, посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1-4]. Однако, здесь, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, к решению задачи статической устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа панели с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, равномерно растянутой по направлению скорости потока газа, набегающим на её свободный край, применён новый аналитический метод, подробно изложенный в работе [7], удобный для нахождения точного решения широкого класса подобных задач.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V.

Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. Предполагается, что шарниры идеальны.

Будем полагать, что пластинка растянута в своей срединной плоскости силами $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределёнными по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1(с. 285), 2 (с. 245)]. Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [5]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать также, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными растягиваающими силами $N_x = 2h\sigma_x$ вдоль краев $x = 0$ и $x = a$ пластинки.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба растянутой тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [2 (с. 245)]

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2(с. 27,101)]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - N_x D^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \qquad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \qquad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \ y = b; \qquad (1.4)$$

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагруженными краями $x = 0$ и $x = a$ в предположении, что напряжения σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести: при $V \geq V_{cr}$ устойчивое невозмущённое состояние равновесия пластинки становится статически неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4). При этом, предполагается, что

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \ M_0 = \sqrt{2}, \ M_{2\cos m.} \approx 33.85, \qquad (1.5)$$

где M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1].

Заметим, что в работе [9] исследована задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки с нагруженными шарнирно закреплёнными краями в нелинейной постановке.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка–поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(\mu_n rx)\cdot\sin(\mu_n y),\ \mu_n=\pi nb^{-1};\tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Подставляя решение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени:

$$r^4-2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2+\alpha_n^3\cdot r+1=0,\tag{2.2}$$

где

$$\alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\tag{2.3}$$

– параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки;

$$\beta_x^2=1/2\cdot N_x\,D^{-1}\mu_n^{-2}=h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2},\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr.}\tag{2.4}$$

– коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки; $(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2, соответствующее предельному значению напряжения $(\sigma_x)_{pr.}$.

Ясно, что

$$\alpha_н^3\in(a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.}D^{-1}\mu_n^{-3}),\tag{2.5}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Исследуем характеристическое уравнение (2.2).

В соответствии с решением Феррари уравнение (2.2), как алгебраическое уравнение четвёртой степени, можно свести к следующим двум квадратным уравнениям:

$$r^2+\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1}=0,\tag{2.6}$$

$$r^2-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1}=0,\tag{2.7}$$

где q – действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)-\alpha_n^6=0,\ q\in\left(q_0,\,\infty\right).\tag{2.8}$$

Отсюда, в силу обозначения (2.3), очевидно, что параметр q характеризует скорость потока газа V: $q=q(V)\in\left(q_0,\,\infty\right)$ при фиксированных значениях остальных параметров системы.

Корни $r_k=r_k(q,\beta_x^2)$ характеристического уравнения (2.2), в соответствии с выражениями (2.6) и (2.7), могут быть как действительными, так и комплексно сопряжёнными числами.

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в эквивалентной форме (2.6) – (2.8), найден «допустимый» интервал значений параметра скорости q, определяющий границу области устойчивости в пространстве «существенных параметров» исходной системы «пластинка–поток» при фиксированных значениях остальных параметров:

$$q \in (q_0,\, \infty),\, q_0 = \left(-(\beta_x^2+1) + 2\sqrt{(\beta_x^2+1)^2+3}\right)\Big/3, \text{ для всех } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}\,. \qquad (2.9)$$

Из условия (1.5) следует, что

$$V(q,n,\gamma,\beta_x^2) \subseteq (V(q_0,n,\gamma,\beta_x^2),\, a_0 M_{2\cos m.}) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\,. \qquad (2.10)$$

Как оказалось, при значениях (2.9) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных и пару комплексно-сопряжённых корней, которые легко находятся, являясь решением квадратных уравнений (2.6) и (2.7):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\;\; r_1<0\,,\;\; r_2<0\,; \qquad (2.11)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\;\; q \in (q_0,\, \infty)\,. \qquad (2.12)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.11) и (2.12), общее решение (2.1) уравнения (1.1) представится двойным рядом вида:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot \exp(\mu_n r_k x)\cdot \sin(\mu_n y)\,. \qquad (2.13)$$

Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.8), после простых преобразований получаем явный вид выражения зависимости скорости потока газа V от существенных параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q,n,\gamma,\beta_x^2) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\cdot(q^2-1)}\cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1} \qquad (2.14)$$

для прямоугольных пластинок умеренных размеров и достаточно длинных ($a \ll b$) и

$$V(q,n,\beta_x^2) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\cdot(q^2-1)}\cdot \pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1} \qquad (2.15)$$

для достаточно широких пластинок ($a \gg b$).

Здесь через γ обозначено отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma = ab^{-1}\,. \qquad (2.16)$$

Общее решение (2.13) исходной задачи, удовлетворяющее необходимому условию существования локализованной неустойчивости [6, 8]

$$\operatorname{Re} r_1 < 0\,,\;\; \operatorname{Re} r_2 < 0\,, \qquad (2.17)$$

представится в виде

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2}\exp(\mu_n r_2 x)\right)\cdot \sin(\mu_n y)\,, \qquad (2.18)$$

где r_1 и r_2 определены выражениями (2.11).

В согласии с необходимым условием (2.17) из выражений (2.11) следует, что невозмущённое состояние равновесия как обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(\gamma \gg 1)$, так и полубесконечной пластины–полосы $(\gamma = \infty)$, может потерять статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$.

Обозначим через γ_* граничное значение параметра отношения сторон γ прямоугольной пластинки, начиная с которого при всех

$$\gamma \geq \gamma_* \gg 1 \tag{2.19}$$

можно считать поведение достаточно широких прямоугольных пластин ($\gamma \geq \gamma_*$) аналогичным поведению полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) при обтекании сверхзвуковым потоком газа.

Следует отметить, что граничное значение $\gamma = \gamma_*$ определяется на основе анализа численных результатов исследования соответствующих дисперсионных уравнений дивергенции панели и локализованной дивергенции.

2.1. При отсутствии обтекания $V = 0$ ($\alpha_n^3 = 0$) характеристическое уравнение (2.2) запишется в виде

$$r^4 - 2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2 + 1 = 0 \tag{2.20}$$

или

$$(r^2 + \sqrt{2\cdot(2+\beta_x^2)}\cdot r + 1)\cdot(r^2 - \sqrt{2\cdot(2+\beta_x^2)}\cdot r + 1) = 0\,. \tag{2.21}$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей соотношения (2.21), находим корни r_k характеристического уравнения (2.18), определяемые следующими выражениями:

$$r_{1,2} = -\sqrt{1+0.5\beta_x^2} \pm \sqrt{0.5\beta_x^2}\,,\ r_{3,4} = \sqrt{1+0.5\beta_x^2} \pm \sqrt{0.5\beta_x^2}\,. \tag{2.22}$$

В силу необходимого условия (2.17), отсюда следует, что невозмущённое состояние равновесия необтекаемых достаточно широких растянутых прямоугольных пластинок ($\gamma \gg 1$), а также необтекаемой полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$), при всех значениях $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$ может потерять статическую устойчивость в виде локализованной неустойчивости, при которой «выпучивается» узкая полоса вдоль края $x = 0$ пластинки.

Таким образом, при всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}$ необтекаемые и обтекаемые достаточно широкие пластинки могут потерять статическую устойчивость, соответственно, в виде локализованной неустойчивости и в виде локализованной дивергенции, в отличие от необтекаемых и обтекаемых пластин достаточно удлинённых или умеренных размеров, которым присуще потеря статической устойчивости в виде неустойчивости панели и в виде дивергенции панели, соответственно.

3. Перейдём к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков статической неустойчивости как обтекаемых, так и необтекаемых пластинок.

3.1. Подставляя общее решение (2.13) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.11) и (2.12), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель имеет вид

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot \tag{3.1}$$

$$\cdot\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2-$$

$$-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot B_1B_2\cdot\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma)+\ 2\cdot\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(q+1)\ +(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$\left.-2((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu+(q+1+\sqrt{q^2-1}+\beta_x^2)\,\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}(q+1+\beta_x^2)\sqrt{q^2-1}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma)+2\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\cdot\sqrt{q^2-1}+\right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$\left.+2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu-(q+1-\sqrt{q^2-1}+\beta_x^2)\,\nu^2\right]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-$$

$$\left.-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot(3(q^2-1)-2q\beta_x^2-\beta_x^4)\sqrt{q^2-1}\cdot\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)=0\,,$$

где

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}\ . \qquad (3.2)$$

Очевидно, что $B_1>0$ и $B_2>0$ при всех допустимых значениях q и β_x^2.

В уравнении (3.1) предполагается, что $\gamma\in(0,\infty)$. В соответствии с обозначением (2.16), значения $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки: условие $\gamma=0$ соответствует бесконечно удлинённой пластинке, а условие $\gamma=\infty$ – полубесконечной пластине–полосе.

3.2. Подставляя общее решение рассматриваемой задачи устойчивости в виде (2.17), в котором корни r_1 и r_2 определены выражениями (2.11), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2}.

Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(\gamma>\gamma_*\gg 1)$:

$$F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)=\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)=0 \quad (3.3)$$

Можно показать, что

$$\lim_{\gamma\to\infty}(F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0)=F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)=0 \text{ для всех } n. \quad (3.4)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_x^2=0$ в уравнения (3.1) и (3.3) можно убедиться в их тождественности соответствующим дисперсионным уравнениям, полученных в работе [7] при исследовании задачи устойчивости, соответственно, обтекаемых полубесконечной пластины–полосы и прямоугольной пластинки с ненагруженными краями.

3.3. Численные исследования дисперсионного уравнения (3.1) показали, что его решения, начиная с значения $\gamma=\gamma_{**}=10^{-2}$, удовлетворяют условию

$$q\gg 1 \text{ при всех } \gamma\le\gamma_{**}\ll 1. \quad (3.5)$$

Можно показать, что дисперсионное уравнение, соответствующее системе «достаточно удлинённая прямоугольная пластинка–поток», описывается соотношением

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{**}}F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=FU(q,n,\gamma_{**},\beta_x^2)= \quad (3.6)$$

$$=\left(-\exp(-1.5\sqrt{2(q+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**})+\cos(\sqrt{0.5(3q-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**})\right)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(3q-\beta_x^2)\cdot(q+\beta_x^2)^3}-(3q^2-\beta_x^4)\cdot\sin(\sqrt{0,5(3q-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**})=0,$$

в силу условия (3.5).

Отсюда следует, что значение параметра отношения сторон панели

$$\gamma=\gamma_{**}=10^{-2} \quad (3.7)$$

определяет границу, начиная с которого поведение невозмущённого состояния растянутых достаточно удлинённых прямоугольных пластинок ($\gamma\le\gamma_{**}\ll 1$), обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, в смысле потери статической устойчивости можно изучить, исследуя дисперсионное уравнение (3.6).

В соответствии с условием (3.5) выражение (2.14) для всех $\gamma\le\gamma_{**}\ll 1$ перепишется в виде

$$V=2\sqrt{2(q+\beta_x^2)}\cdot q\cdot\pi^3n^3\gamma^3\cdot D(a_0\rho_0a^3)^{-1}. \quad (3.8)$$

В соответствии с выражениями (3.6) и (3.8) можно сказать, что для всех $\gamma\le\gamma_{**}\ll 1$ приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div}D^{-1}(a_0\rho_0a^3)$ достаточно удлинённой панели с точностью до порядка высокой степени малости не зависит от коэффициента Пуассона ν.

3.4. Особо рассмотрим случай обтекаемой растянутой бесконечно удлинённой пластинки.

Нетрудно показать, что дисперсионное уравнение, соответствующее системе «растянутая бесконечно удлинённая пластинка – поток», описывается соотношением:

$$FU(\tilde q,\tilde\beta_x^2)=\left(-\exp(-1.5\sqrt{2(\tilde q+\tilde\beta_x^2)})+\cos\sqrt{0.5(3\tilde q-\tilde\beta_x^2)}\right)\cdot \quad (3.9)$$

$$\cdot\sqrt{(3\tilde q-\tilde\beta_x^2)\cdot(\tilde q+\tilde\beta_x^2)^3}-(3\tilde q^2-\tilde\beta_x^4)\cdot\sin(\sqrt{0,5(3\tilde q-\tilde\beta_x^2)})=0;\ \tilde q>\frac{\beta_x^2}{\sqrt{3}}.$$

Здесь $\tilde{q}$ – параметр скорости потока газа V, являющийся действительным корнем кубического уравнения

$$8\cdot\tilde{q}^2\cdot(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)-S^6=0\,,\tilde{\beta}_x^2=h\sigma_x D^{-1}a^2\,,\ S^3=a_0\rho_0 VD^{-1}a^3\,,\ \tilde{q}>\frac{\beta_x^2}{\sqrt{3}}\,. \qquad (3.10)$$

В самом деле, дифференциальное уравнение изгиба обтекаемой растянутой по потоку газа бесконечно удлинённой пластинки и граничные условия при принятых способах закрепления краёв, соответственно, описываются соотношениями [1, 2]:

$$D\frac{d^4w}{dx^4}-N_x\frac{d^2w}{dx^2}+a_0\rho_0 V\frac{dw}{dx}=0\,, \qquad (3.11)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=0\,,\ D\cdot\frac{d^3w}{dx^3}-N_x\frac{dw}{dx}=0 \text{ при } x=0 \text{ и } w=0\,,\ \frac{d^2w}{dx^2}=0 \text{ при } x=a\,. \qquad (3.12)$$

Подставляя общее решение в виде $w(x)=C\cdot\exp(rx/a)$, где C – произвольная постоянная, в дифференциальное уравнение (3.11), получаем характеристическое уравнение системы «бесконечно удлинённая пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4-2\tilde{\beta}_x^2r^2+S^3r=0\,,\ \tilde{\beta}_x^2=h\sigma_x D^{-1}a^2\,,\ S^3=a_0\rho_0 VD^{-1}a^3\,. \qquad (3.13)$$

Уравнение (3.13) в соответствии с решением Феррари можно свести к следующим двум квадратным уравнениям:

$$r^2+\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\cdot r=0 \text{ и } r^2-\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\cdot r+2\tilde{q}=0 \qquad (3.14)$$

при условии, что $\tilde{q}$ – действительный корень кубического уравнения (3.10).

С помощью графоаналитических методов анализа можно показать, что из четырёх корней r_k характеристического уравнения (3.13) двое – $r_{3,4}$ являются комплексно сопряжёнными числами при условии

$$\tilde{q}>\tilde{\beta}_x^2\big/\sqrt{3}\,. \qquad (3.15)$$

Тем самым, корни r_k характеристического уравнения (3.13), являясь решениями квадратных уравнений (3.14), будут определяться, соответственно, выражениями:

$$r_1=-\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\,,\ r_2=0\,,\ r_{3,4}=0.5\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\pm i\cdot\sqrt{0.5\cdot(3\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)}\,. \qquad (3.16)$$

Тогда, подставляя общее решение дифференциального уравнения (3.11) в виде $w(x)=\sum_{k=1}^{4}C_k\exp(r_kx)$, в котором r_k определены выражениями (3.16), в граничные условия (3.12), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_k. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению (3.9).

Из соотношений (3.10) находим явный вид зависимости скорости потока газа от параметров системы «бесконечно удлинённая пластинка–поток»

$$V=2\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\cdot\tilde{q}\cdot D(a_0\rho_0a^3)^{-1},\quad \tilde{q}>\tilde{\beta}_x^2\big/\sqrt{3}\,. \qquad (3.17)$$

В силу ограничения (1.5) следует, что

$$\tilde q \in \left(\tilde q_0, \tilde q(a_0 M_{2\cos m.})\right) \subseteq \left(\tilde q(a_0 M_0), \tilde q(a_0 M_{2\cos m.})\right),\ \tilde q_0 = \frac{\tilde\beta_x^2}{\sqrt{3}}. \qquad (3.18)$$

Результаты численного анализа уравнения (3.9) показали, что влияние первоначального напряжённого состояния на плоскую форму равновесия бесконечно удлинённой пластинки весьма незначительно. Можно принять, что нули функции (3.9) и её интервалы монотонности одни и те же при всех $\tilde\beta_x^2$:

$$FU(\tilde q, \tilde\beta_x^2) < 0,\ \tilde q \in (\tilde q_0, \tilde q_1) \cup (\tilde q_{cr.}^{(1)}, \tilde q(a_0 M_{2\cos m.})); \qquad (3.19)$$

$$FU(\tilde q, \tilde\beta_x^2) > 0,\ \tilde q \in (\tilde q_1, \tilde q_{cr.}^{(1)}), \qquad (3.20)$$

откуда следует, что

$$FU(\tilde q_1, \tilde\beta_x^2) = 0,\ FU(\tilde q_{cr.}^{(1)}, \tilde\beta_x^2) = 0. \qquad (3.21)$$

Здесь

$$\tilde q_1 \approx 9.1,\ \tilde q_{cr.}^{(1)} \approx 31.01 \text{ при всех } \tilde\beta_x^2. \qquad (3.22)$$

Подставляя значения (3.22) в выражение (3.17), находим

$$V(\tilde q_1) \approx 76.37 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1},\ V(\tilde q_{\text{cr.}}^{(1)}) \approx 488.42 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \qquad (3.23)$$

При этом, $V(\tilde q_1) > a_0 M_0$, примерно, в $1.5 - 7$ раз для стальной пластинки с $2ha^{-1} = 0.006 - 0.015$ при всех $\tilde\beta_x^2$.

Из соотношений (3.19)–(3.23) следует, что равновесное состояние системы «бесконечно удлинённая растянутая пластинка–поток», являясь при малых сверхзвуковых скоростях потока газа $V(\tilde q_0) \ge a_0 M_0$ статически неустойчивым в виде дивергенции панели, при скоростях $V \ge V(\tilde q_1)$ становится устойчивым, которую вновь теряет при $V \ge V(\tilde q_{cr.}^{(1)})$.

3.5. Получим дисперсионные уравнения, описывающие достаточные признаки статической неустойчивости необтекаемых растянутых прямоугольных пластинок, для последующего анализа решения задачи (1.1)–(1.4).

Подставляя общее решение (2.12) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k определяются выражениями (2.20), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$F_{unst.}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}} \left(4 + 2\beta_x^2 - (1+\nu)^2\right) \cdot \mathrm{sh}\left(2\pi n \gamma \sqrt{1 + \frac{\beta_x^2}{2}}\right) + \qquad (3.24)$$

$$+ \sqrt{1 + \frac{\beta_x^2}{2}} \cdot \left(2\beta_x^2 + (1-\nu)^2\right) \cdot \mathrm{sh}\left(2\pi n \gamma \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\right) = 0.$$

Переходя к пределу в соотношении (3.24) при условии $\gamma \to \infty$, получаем дисперсионное уравнение локализованной неустойчивости необтекаемой полубесконечной пластины-полосы:

$$\lim_{\gamma\to\infty}(F_{unst.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0)=F_{loc.unst}(\nu,\beta_x^2)=4+2\beta_x^2-(1+\nu)^2=0\,. \qquad (3.25)$$

Из выражений (3.24) и (3.25) очевидно, что $F_{unst.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)>0$ и $F_{loc.unst}(\nu,\beta_x^2)>0$ при всех значениях параметров n, $\gamma\in(0,\infty]$, $0<\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr}$ и коэффициента Пуассона ν; и $F_{unst.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0$ при $\beta_ь^2=0$. Это означает, что невозмущённая форма равновесия необтекаемой растянутой пластинки устойчива при всех допустимых значениях параметров задачи, в отличие от необтекаемой пластинки с ненагруженными краями.

Нетрудно показать, что дисперсионное уравнение необтекаемой бесконечно удлинённой растянутой пластинки имеет вид:

$$F_\infty(\tilde\beta_x^2)=\operatorname{sh}\sqrt{2\tilde\beta_x^2}=0 \text{ при всех } \tilde\beta_x^2<(\tilde\beta_x^2)_{pr}\,. \qquad (3.26)$$

Так как $\operatorname{sh}\sqrt{2\tilde\beta_x^2}>0$, то необтекаемая бесконечно удлинённая растянутая пластинка устойчива.

4. Перейдем теперь к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки при допустимых значениях параметра скорости потока газа

$$q\in(q_0,\infty)\subseteq(q(a_0M_0),q(a_0M_{2\cos m.}))\,. \qquad (4.1)$$

Исследуем численными методами уравнения (3.1), (3.3), (3.6) и (3.9).

В пространстве «существенных» параметров рассматриваемой задачи $\Im=\{q(V),n,\gamma,\beta_x^2,\nu\}$ введём в рассмотрение область устойчивости $\Im_0$ и области статической неустойчивости $\Im_1$, $\Im_2$, соответствующие дивергенции растянутой панели и локализованной дивергенции соответственно.

Из способа разбиения пространства параметров $\Im$ системы на области устойчивости и статической неустойчивости следует, что область устойчивости $\Im_0\in\Im$ невозмущённого состояния равновесия системы «растянутая пластинка–поток» будет определяться неравенствами:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)>0\,,\ F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)\ >0\,, \qquad (4.2)$$

а области неустойчивости $\Im_1$, $\Im_2$ определяются, соответственно, соотношениями:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)<0\,,\ F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)<0\,. \qquad (4.3)$$

Границами области устойчивости $\Im_0$ в пространстве её параметров $\Im$ являются гиперповерхности:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0\,, \qquad (4.4)$$

$$F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)=0\,. \qquad (4.5)$$

На границе (4.4) области устойчивости $\Im_0$ невозмущённое состояние равновесия растянутой пластинки теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели, а на границе (4.5) – в виде локализованной дивергенции.

Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2)$, полученные подстановкой значений первых корней $q_{cr.div.}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2)$ уравнения (4.4) в выражение (2.14), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической неустойчивости в виде дивергенции панели $\Im_1$. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. В растянутой прямоугольной пластинке при обтекании возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её формы – поверхность пластинки «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_x^2)$, полученные подстановкой значений корня $q_{loc.div.} = q_{loc.div}(\nu, \beta_x^2)$ уравнения (4.5) в выражение (2.15), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической неустойчивости $\Im_2$ в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ достаточно широкой пластинки и полубесконечной пластины–полосы. При скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к неустойчивости в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ растянутой достаточно широкой пластинки. Вследствие обтекания в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки вдоль её свободного края $x = 0$.

Границей между областями статической неустойчивости $\Im_1$ и $\Im_2$ является гиперповерхность

$$\lim_{\gamma \to \gamma_*} F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = F_{locdiv}(q, \nu, \beta_x^2) = 0, \ \gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_x^2) \gg 1, \tag{4.6}$$

$\gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_x^2)$ – значение параметра $\gamma \in (0, \infty)$, разграничивающее области неустойчивости $\Im_1$ и $\Im_2$: при значениях $\gamma < \gamma_*$ возможна потеря статической устойчивости только в виде дивергенции панели, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ – в виде локализованной дивергенции. При этом, в силу условия (4.6) уравнение (3.1) имеет один действительный корень $q_{crdiv} = q_{cr.div}(\nu, \beta_x^2)$, равный корню $q_{loc.div}(\nu, \beta_x^2)$ уравнения (3.3). Тем самым, плоская форма равновесия растянутых достаточно широких прямоугольных пластинок ($\gamma \geq \gamma_*$) при значениях скорости потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенци в окрестности свободного края $x = 0$.

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$ и $V_{loc.div.}(n,\nu,\beta_x^2)$ системы «пластинка-поток», соответствующие первым корням уравнения (3.1) и решению уравнения (3.3), определяются по формулам (2.14) и (2.15) с достаточной точностью.

5. В данной работе с помощью методов графоаналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)\}$, параметризованных надлежащим образом. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)\}$ в многопараметрическом пространстве $\Im$.

Найдены множества $\left\{q^{(1)}_{\mathrm{cr.div}} = q^{(1)}_{\mathrm{cr.div}}(n,\gamma,\beta_x^2,\nu)\right\}$ и $\left\{q_{\mathrm{loc.div}} = q_{\mathrm{loc.div}}(\beta_x^2,\nu)\right\}$ значений первых корней уравнения (3.1) и единственного корня уравнения (3.3) при различных значениях параметров n, β_x^2, γ и ν системы «пластинка–поток» в интервале допустимых значений параметра q (4.1), подставляя которые в выражения (2.14) и (2.15) находим соответствующие значения приведённых критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div.}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

Ясно, что

$$V_{cr.div}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(V_{cr.div}(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3),a_0M_{2\cos m}\Psi_1)\subseteq \tag{5.1}$$

$$\subseteq(a_0M_0\Psi_1,a_0M_{2\cos m.}\Psi_1),$$

$$V_{\mathrm{loc}.div}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)\in(V_{\mathrm{loc}.div}(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3),a_0M_{2\cos m.}\Psi_2)\subseteq \tag{5.2}$$

$$\subseteq(a_0M_0\Psi_2,a_0M_{2\cos m.}\Psi_2),$$

$$\Psi_1=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ \Psi_2=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2hb^{-1})^{-3},$$

$$M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m.}\approx 33.85;$$

в соответствии с значением цилиндрической жёсткости и ограничений (1.5), (4.1). При этом, как показал численный анализ, наименьшему значению приведённых критических скоростей $V_{cr.div}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $V_{\mathrm{loc}.div}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ соответствует значение $n=1$ при фиксированных значениях остальных параметров.

Далее, в соответствии с условием (4.6), находим границу перехода из области дивергенции панели $\Im_1$ в область локализованной дивергенции $\Im_2:\gamma_*=\gamma_*(\nu,\beta_x^2)$, которую с точностью порядка малости 10^{-4} можно принять зависящей только от коэффициента напряжения: $\gamma_*=\gamma_*(\beta_x^2)$ (табл.1). При значениях $\gamma<\gamma_*$ растянутая прямоугольная пластинка теряет устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока газа $V\geq V^{(1)}_{cr.div.}$, а при значениях $\gamma\geq\gamma_*$ – в виде локализованной дивергенции при скоростях потока газа $V\geq V_{loc.div.}$.

Таблица 1

β_x^2	0	1.5	1.8	3.6
γ_*	2.0	2.0	1.8	1.2

Из данных, приведённых в табл.1, следует, что пластинкам с большим коэффициентом напряжения β_x^2 соответствует меньшее граничное значение γ_*: область дивергенции панели $\Im_1$ сужается, а область локализованной дивергенции $\Im_2$, наоборот, расширяется. Иными словами, напряжённое состояние при больших значениях β_x^2 приводит к существенной стабилизации состояния невозмущённого равновесия системы «растянутая пластинка–поток», в сравнении с системой с пластинкой с ненагруженными краями [7].

В табл. 2 представлены значения приведённых критических скоростей локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ для некоторых значений ν и β_x^2 при $n = 1$.

Из данных табл.2 следует, что при фиксированных значениях коэффициента напряжения β_x^2 приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а при фиксированных значениях коэффициента Пуассона ν возрастает примерно в 8 – 15 раз с ростом коэффициента напряжения β_x^2 в промежутке [0, 10]. При этом, привёденная критическая скорость локализованной дивергенции возрастает в большее число раз при больших значениях ν, что также указывает на существенную стабилизацию равновесного состояния растянутой достаточно широкой пластинки при обтекании, в сравнении с достаточно широкой обтекаемой панели с ненагруженными краями $(\beta_x^2 = 0)$ [7].

Таблица 2

β_x^2 \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0	295.777	169.893	143.905	114.913	79.668
0.1	320.066	185.137	157.851	125.899	89.376
0.3	367.460	215.164	184.005	149.031	108.644
0.5	413.830	245.339	210.785	172.568	127.929
0.8	483.527	289.741	250.989	207.322	156.927
1.0	528.912	320.157	277.443	230.348	176.110
1.5	640.968	393.519	343.019	287.734	224.311
2.0	751.660	465.175	408.495	345.000	272.232
5.0	1392.069	892.701	791.151	680.904	556.008
10.0	2410.499	1573.018	1408.433	1228.270	1218.119

Из результатов численного анализа следует равносильность дисперсионных уравнений (3.1), (3.6) и (3.9) при значениях $\gamma \le \gamma_{**} = 0.01$ и при всех допустимых значениях остальных параметров системы с точностью до порядка 10^{-5}. Следовательно, поведение систем «достаточно длинные растянутые пластинки–поток» аналогично поведению системы «бесконечно удлинённая растянутая пластинка–поток» в смысле потери статической устойчивости их равновесного состояния. Это означает, что влиянием первоначального напряжённого состояния на устойчивость систем «достаточно длинные растянутые пластинки–поток» можно пренебречь. Заметим, что в соответствии с соотношениями (3.19)–(3.23), равновесное состояние этих систем, являясь при малых сверхзвуковых скоростях $V(q_0) \geq V_{por.} = a_0 M_0$ статически неустойчивыми в виде дивергенции панели, при скоростях потока газа $V \geq V(q_1) \approx 76.37 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$, больших на порядок порогового значения $V_{por.} = a_0 M_0$, становятся устойчивыми, которую вновь теряют при скоростях потока газа $V \geq V_{crdiv} \approx 488.42 \cdot D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$.

В табл.3 представлены некоторые значения приведённой критической скорости дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующие панелям умеренных размеров: $\gamma \in (0.2, 2)$. При этом, значения приведённых скоростей дивергенции панели, взятые в фигурные скобки, соответствуют значениям 0.125, 0.25, 0.3, 0.375 и 0.5 коэффициента Пуассона ν соответственно.

Как следует из данных табл.3, приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, зависящая от параметров γ, β_x^2 и ν, меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, возрастает примерно на два порядка ростом с γ в интервале $(0.2, 2)$ при фиксированных

Таблица 3

γ \ β_x^2	0.0	0.3	0.5	1.0	1.5	5.0
0.3	$\begin{Bmatrix} 3.826 \\ 3.287 \\ 3.078 \\ 2.757 \\ 2.215 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.077 \\ 4.526 \\ 4.301 \\ 3.968 \\ 3.407 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.949 \\ 5.384 \\ 5.150 \\ 4.809 \\ 4.225 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 8.222 \\ 7.607 \\ 7.381 \\ 7.001 \\ 6.381 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.621 \\ 9.975 \\ 9.723 \\ 9.329 \\ 8.686 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 29.598 \\ 28.692 \\ 28.314 \\ 27.767 \\ 26.879 \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 14.650 \\ 12.613 \\ 11.710 \\ 10.448 \\ 8.405 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 18.886 \\ 16.601 \\ 15.713 \\ 14.354 \\ 12.142 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 21.837 \\ 19.445 \\ 18.500 \\ 17.061 \\ 14.740 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 29.602 \\ 26.887 \\ 25.816 \\ 24.239 \\ 21.657 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 37.840 \\ 34.812 \\ 33.656 \\ 31.872 \\ 29.010 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 105.578 \\ 99.701 \\ 97.685 \\ 94.553 \\ 89.679 \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 81.466 \\ 59.421 \\ 54.086 \\ 46.171 \\ 35.167 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 102.765 \\ 76.187 \\ 68.915 \\ 60.668 \\ 48.453 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 118.628 \\ 87.526 \\ 80.128 \\ 70.625 \\ 57.489 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 165.402 \\ 117.202 \\ 107.909 \\ 96.533 \\ 81.124 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 655.057 \\ 148.087 \\ 136.958 \\ 123.733 \\ 105.925 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 954.171 \\ 389.850 \\ 367.326 \\ 336.481 \\ 301.080 \end{Bmatrix}$

1.0	$\begin{Bmatrix}522.743\\156.951\\128.462\\102.093\\72.910\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}577.560\\206.272\\165.615\\133.979\\100.260\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}612.285\\239.197\\190.252\\155.561\\118.173\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}702.632\\319.434\\255.029\\208.950\\164.256\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}794.346\\394.027\\319.214\\264.243\\215.791\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1466.163\\872.372\\762.195\\660.346\\563.034\end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix}608.684\\323.260\\256.209\\194.600\\135.373\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}713.798\\408.329\\328.369\\254.355\\182.085\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}782.798\\461.774\\376.024\\294.199\\208.667\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}957.383\\590.000\\492.236\\393.071\\285.947\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1134.885\\713.690\\604.458\\491.163\\378.257\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}-\\-\\-\\-\\-\end{Bmatrix}$
1.5	$\begin{Bmatrix}975.760\\595.152\\498.939\\391.691\\268.879\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1204.589\\745.462\\636.079\\509.933\\366.083\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1356.662\\847.229\\726.570\\588.654\\430.925\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1741.238\\1094.372\\949.285\\783.893\\593.118\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2126.033\\1341.000\\1170.403\\976.159\\755.080\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}-\\-\\-\\-\\-\end{Bmatrix}$

значениях β_x^2 и ν, а с ростом β_x^2 на промежутке $[0,5]$ – возрастает более, чем на порядок при фиксированных значениях γ и ν. Это свидетельствует о существенной стабилизации равновесного состояния обтекаемой растянутой пластинки в сравнении с пластинкой, с ненагруженной краями.

6. Оценим результаты вычислений, приведённых в табл. 2 и 3, применительно к интервалу сверх– и гиперзвуковых скоростей (1.5) для стальной пластинки при значениях параметра $2ha^{-1}$ (или $2hb^{-1}$)$\in[0.006, 0.015]$.

Таблица 4

ν / $2ha^{-1}(2hb^{-1})$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Подставляя значения параметров $2ha^{-1}$ и $2hb^{-1}$ из промежутка $[0.006, 0.015]$, соответственно, в выражения (5.1) и (5.2), получаем интервалы допустимых значений приведённых скоростей дивергенции панели $V_{cr.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\text{loc.div.}}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ применительно к интервалу сверх– и гиперзвуковых скоростей (1.5) (табл. 4).

Из сопоставления данных табл. 2 и 3 с данными табл. 4 следует, что с ростом параметра $2ha^{-1}\in[0.006, 0.015]$ область дивергенции панели значительно сужается. При этом, при значениях $2ha^{-1}$ ($2hb^{-1}$) > 0.012 локализованная дивергенция отсутствует при всех $\beta_x^2 \in [0,10]$, начиная с $\gamma = 2$ (табл.1): равновесное состояние пластинок с параметром $\gamma \geq 2$ не теряет статической устойчивости.

Таким образом, с ростом параметра $2ha^{-1}$ (или $2hb^{-1}$) равновесное состояние растянутых обтекаемых пластинок, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5), становится существенно устойчивым, что обусловлено сужением областей дивергенции панели и локализованной дивергенции.

7. Основные результаты. В работе получено аналитическое решение задачи статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия растянутой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край, в предположении, что пластинка растянута по направлению потока газа.

Найдено аналитическое решение задачи статической устойчивости растянутой пластинки при отсутствии обтекания с целью получения строгой и полной оценки влияния первоначального напряжённого состояния на невозмущённое состояние равновесия пластинки при обтекании.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость, соответственно, как в виде дивергенции панели, так и в виде локализованной дивергенции. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. При этом, как оказалось, напряжённое состояние, обусловленное растягивающими силами, приводит к смещению границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении уменьшения параметра отношения сторон панели в сравнении с обтекаемой панелью с ненагруженными краями [7], а также нагруженной сжимающими силами [8].

Найдены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия обтекаемой пластинки теряет статическую устойчивость, соответственно, или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от параметров системы, в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба. Как оказалось, при умеренных и больших значениях параметра отношения сторон пластинки критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции возрастают, примерно, на порядок. При меньших значениях параметра отношения сторон пластинки, примерно, порядка одной десятой и менее, соответствующих достаточно удлинённым прямоугольным пластинкам, первоначальное напряжённое состояние оказывает незначительное влияние на поведение системы «пластинка–поток».

Установлена зависимость видов потери статической устойчивости системы «пластинка–поток» от относительной толщины пластинки применительно к рассматриваемому интервалу сверхзвуковых скоростей потока газа. Найдено граничное значение относительной толщины пластинки, начиная с которого её равновесное состояние теряет устойчивость только лишь в виде дивергенции панели, а локализованная дивергенция отсутствует в предполагаемом интервале сверхзвуковых скоростей: плоская форма равновесия достаточно широких пластинок не теряет статической устойчивости.

Таким образом, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное растягивающими силами, направленными по потоку газа, приводит, в целом, к существенной стабилизации плоской формы равновесия обтекаемых прямоугольных пластинок – к «скачкообразному» росту значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции в сравнении с соответствующими значениями критических скоростей дивергенции и локализованной дивергенции обтекаемой панели с ненагруженными краями [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем .– М.: Физматгиз, 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. M.: Physmathgiz, 1963. 880 p. (in Russian).
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Science. 1961. 329p. (in Russian).
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995. 320с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods. // M.: Science. Physmathlit, 1995. 320 p. (in Russian).
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
1. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells. M.: Science. 2006. 247p.(in Russian).
5. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. №6. С.733–755. Ilyushin A.A. Law of plane sections at high supersonic velocity // PMM. 1956. V.20. № 6. Pp. 733-755. (in Russian).
6. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа //Акустический журнал. 1960. Т.6. №1. С.124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave // Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960. V.6, №1. Pp.124–126. (in Russian).
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.12–42. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V.67. №2. P.12–42. (in Russian).
8. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. №4. С.44–68. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge. // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2018. V.71. №4. P.44–68. (in Russian).
9. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер нелинейных колебаний гибких пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. № 4. С. 20–40. Baghdasaryan G. E., Mikilyan M.A., Saghoyan R. O. Character of nonlinear vibrations of elastic plates streamlined by a supersonic gas flow// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2016. V.69. № 4. P.20-40. (in Russian).

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096 **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 13.02.2019 г.