ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика
УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ОДИНАКОВЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ УСИЛИЯМИ

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, балка, устойчивость, начально неоднородное напряжённое состояние, критическое напряжение.

Movsisyan L.A.

The stability of the plate with equality critical stresses

Key words: rectangulare plate, nonhomogeneous inital stressed state, critical stress.

On an initially homogeneous stress state, existing the various cases of boundary conditions for which the same critical forces are obtained. However, in the article is considered nonhomogeneous initial stress states for which the critical efforts are already different.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Նույն կրիտիկական ճիգեռով սալի կայունության մասին

Հիմնաբառեր՝ Ուղղանկյուն սալ, հեծան, կայունություն, նախնական անհամասեռ լարվածային վիճակ, կրիտիկական լարում

Համասեռ նախնական լարվածային վիճակում կան եզրային պայմանների տարբեր դեպքեր, երբ ստացվում է նույն կրիտիկական ճիգը: Դիտարկվում է անհամասեռ նախնական լարվածային վիճակ, երբ տարբեր են ստացվում կրիտիկական ճիգերը:

При начально однородном напряжённом состоянии существуют различные случаи граничных условий, для которых получаются одинаковые критические усилия. Рассматриваются неоднородные начальные напряжённые состояния, для которых уже критические усилия различные.

Введение. Как известно, в задачах устойчивости балки при однородном сжатии имеется пара случаев граничных условий, когда критические силы получаются одинаковыми. Такая же картина имеет место и для устойчивости пластинки. Однако, при неоднородном начальном напряжённом состоянии различными будут критические усилия. Приводится решение такой задачи для прямоугольной пластинки и для балки. В [1] подобная задача рассматривалась для балки и цилиндрической оболочки.

1. Постановка задачи. Уравнение устойчивости пластинки, сжатой в одном направлении

$$D\Delta^2 w + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Обозначения общепринятые, поэтому нет необходимости их приводить, укажем только, что сжимающееe усилие T_1^0 будем считать зависящим от координаты x_1. Изучать будем устойчивость прямоугольной пластинки для двух случаев граничных условий. Во всех случаях края $y = 0$ и $y = b$ свободно опёрты $\left(w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right)$, а на других сторонах $x = 0$ и $x = a^2$ – два случая:

a) свободное опирание $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ (1.2)

b) скользящий контакт $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$ (1.3)

Первый – популярный случай свободного опирания, а второй – так называемая «плавающая заделка» [2].

Для первого случая функция прогиба, удовлетворяющая всем граничным условиям, будет:

$$w = \sin \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{mn}{a}, \ \mu_n = \frac{mn}{b}, \tag{1.4}$$

для второго случая –

$$w = \sin \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos \lambda_m x. \tag{1.5}$$

Если искомое T_1^0 также представить в виде ряда

$$T_1^0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \lambda_m x, \tag{1.6}$$

то, учитывая (1.4) и (1.5), для неизвестных f_m получится однородная система

$$\begin{gathered} \left[D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2 - \left(a_0 \pm a_{2m}\right)\lambda_m^2 \right] f_m - \\ -\frac{1}{2}\lambda_m \left[\sum_{q=1}^{m-1} \left(a_{m-q} \pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q \right] + \left[\sum_{q=m+1}^{\infty} \left(a_{q-m} \pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q \right] = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь знак «+» относится к случаю (1.4), а «–» – к случаю (1.5).

Критическая нагрузка определится из условия разрешимости системы (1.7).

В качестве примера рассмотрим такую задачу. Пластинка равномерно сжата у одного из концов, а края $y = 0$ и $y = b$ свободные:

$T_1^0 = -P, \ 0 \le x \le x_0, \ T_1^0 = 0$ при $x_0 < x \le a$.

$$a_0 = -P\frac{s_0}{a}, \quad a_m = -P\frac{2}{m\pi}\sin\lambda_m x_0 \tag{1.8}$$

Минимальное значение критического усилия равномерно сжатой квадратичной пластинки $(a = b)$ –

$$P_{\text{кр}}^{(0)} = 4D\frac{\pi^2}{a^2} \tag{1.9}$$

Вот значения относительного критического сжатия: $P_{\text{кр}} \big/ P_{\text{кр}}^{(0)}$ – во втором приближении, соответственно, для $\dfrac{x_0}{a} = 0,25$ и $0,75$.

$$\begin{matrix} 2.25; & 1.61 & (+) \\ 1.15; & 1.08 & (-) \end{matrix} \tag{1.10}$$

Первая строка относится к (1.5), а вторая – к (1.6). Как и можно было ожидать, для шарнирно закреплённых концов критическое давление больше, чем для случая со свободными концами.

2. Рассмотрим теперь подобную задачу для балки. Сосредоточенные силы (P_0) действуют симметрично относительно середины длины балки. При этом, рассмотрим два случая:

a) направлены друг к другу

b) направлены к опорам.

Края балки в продольном направлении свободны в первом случае и заделаны во втором.

Если выражение продольной силы представить в виде

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{\pi}{l}, \tag{2.1}$$

то для первого случая коэффициентами a_n будут:

$$a_0 = -P_0\left(1 - \frac{2x_0}{l}\right), \quad a_m = -\frac{2P}{m\pi}\left[(-1)^{m+1} - 1\right]\sin\lambda_m x_0 \tag{2.2}$$

и для второго случая –

$$a_0 = -\frac{2x_0}{l}P_0, \quad a_m = -\frac{2P_0}{m\pi}\left[1 + (-1)^m\right]\sin\lambda_m x_0. \tag{2.3}$$

Для свободно опёртой балки

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\lambda_m x, \tag{2.4}$$

а для случая скользящего контакта –

$$W=\sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos\lambda_m x\,. \tag{2.5}$$

Здесь «+» относится к (2.4), а «-» – к (2.5).

Критические силы определятся из условия разрешимости системы

$$\begin{gathered}\left[EJ\lambda_m^3+\left(a_0\pm\frac{1}{2}a_{2m}\right)\lambda_m\right]f_m+\\+\frac{1}{2}\left\{\sum_{q=1}^{m-1}\left(a_{m-q}\pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q+\sum_{q=m+1}^{\infty}\left(a_{q-m}\pm a_{q+m}\right)\lambda_q f_q\right\}=0\end{gathered}, \tag{2.6}$$

когда силы направлены друг к другу, а вторые – наоборот.

Вот значения относительных критических сил $\left(\lambda=P_0\big/P_{\text{кр}},\ P_{\text{кр}}=EJ\pi^2\big/l^2\right)$

$x_0\ /\ l$	0.125	0.25
+	2.02:1.95	3.75:1.11
–	1.04:14.14	1.22:3.88

В каждой клетке первые числа относятся к (2.2), а вторые – к (2.3).

Как видно из приведённой таблицы, если для случая свободного опирания с уменьшением расстояния между силами, в случае (2.2) критические силы увеличиваются, а в (2.3) уменьшаются, то для случая следящего контакта, наоборот.

Заключение. Как известно, в задачах устойчивости для балки и пластин имеются пары граничных условий, когда при однородном начальном напряжённом состоянии одинаковыми получаются критические усилия. Однако, если начальное состояние неоднородное, то это не имеет место. Приводятся такие задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. К устойчивости вязкоупругих балок и цилиндрических оболочек. //Известия НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №4. С.38-45.
2. Вибрация в технике. Т.1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Мовсисян Лаврентий Александрович – д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН

Адрес: 0019, Ереван-19, Пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** 56-82-01

Поступила в редакцию 19. 12.2018