

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ СДВИГА В СОСТАВНОМ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Джилавыан С.А., Саргсян А.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, дифракция, сдвиг, поверхностные волны, трещина, электроупругость.

Jilavyan S.H., Sargsyan A.S.

Diffraction of plane shear wave in piezoelectric composite space

Key words: piezoelectric, diffraction, shear, surface waves, crack, electro-elasticity.

The problem of diffraction of a plane electro-elastic shear wave at the edge of a semi-infinite crack in a composite piezoelectric space is reduced to a problem of the Riemann type on the real axis in the theory of analytic functions. The problem is solved by the method of integral Fourier transform using the factorization method, the apparatus of generalized functions and methods of the theory of functions of complex variable and contour integration. The distribution of the diffracted wave field in half-spaces is obtained. Some features of the wave field that manifest themselves as a result of the interaction of physical fields are revealed. The presence of a semi-infinite crack between the half-spaces and the piezoelectric effect lead to the propagation of surface electro-elastic shear waves in the half-spaces.

Ջիլավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ա.Ս.

Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրական բաղադրյալ տարածությունում

Հիմնարարներ. պիեզոէլեկտրիկ, դիֆրակցիա, էլեկտրատառածականություն, մակերևութային ալիք, սահք, ճաք:

Պիեզոէլեկտրական բաղադրյալ տարածությունում կիսատարածությունների բաժանման հարթությունում գտնվող կիսասանվերջ ճաքի եզրի վրա սահքի էլեկտրատառածական հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը բերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի տիպի խնդրի իրական առանցքի վրա: Դիֆրակցիայի խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով՝ օգտագործելով ֆակտորիզացիայի մեթոդը, ընդհանրացված ֆունկցիաների ապարատը և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության ու կոնտուրային ինտեգրման մեթոդները: Ստացված է դիֆրակցված ալիքային դաշտի բաշխումը կիսատարածություններում: Բացահայտվել են ալիքային դաշտի մի քանի առանձնահատկություններ՝ պայմանավորված ֆիզիկական դաշտերի փոխազդեցությամբ: Կիսասանվերջ ճաքի առկայությունը և պիեզոէլեկտր բերում են կիսատարածություններում էլեկտրատառածական մակերևութային սահքային ալիքների տարածում:

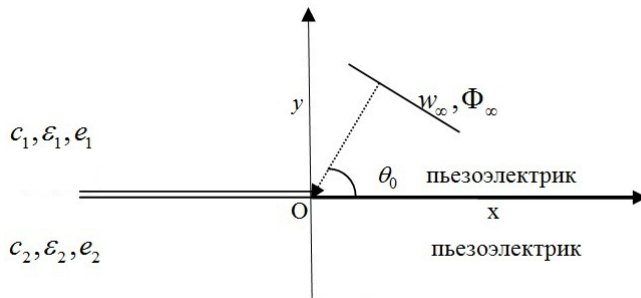
Задача дифракции плоской электроупругой волны сдвига на крае полубесконечной трещины в составном пьезоэлектрическом пространстве сводится к задаче типа Римана на действительной оси в теории аналитических функций. Поставленная задача дифракции решается методом интегрального преобразования Фурье, используя метод факторизации, аппарат обобщённых функций и методы теории функций комплексного переменного и контурного интегрирования. Получено распределение дифрагированного волнового поля в полупространствах. Выявлены некоторые особенности волнового поля, проявляющиеся в результате взаимодействия физических полей. Наличие полубесконечной трещины между полупространствами и пьезоэффект приводят к распространению поверхностных электроупругих сдвиговых волн в полупространствах.

Введение. Исследования волновых процессов в диэлектрических средах, обладающих свойством пьезоэффекта, приобрели актуальность в связи с требованиями науки и техники к изучению физико-математических моделей, корректно отражающих закономерности и основные свойства физических процессов. Взаимодействия различных физических полей, пьезоэффект и конструктивная неоднородность существенно влияют на волновое поле в деформируемых твёрдых средах сложной

структуры. Они порождают новые эффекты, имеющие фундаментальные значения при изучении волновых процессов в пьезоупругих средах – электроупругие сдвиговые поверхностные (локализованные) волны [1–6]. Для дальнейшего развития механики сплошных сред и объяснения физико-технических и экспериментальных результатов при проектировании и создании новых приборов и устройств необходимо исследовать задачи распространения сдвиговых волн в слоистых пьезоэлектрических средах в новой постановке, при разных электроупругих условиях на поверхностях разделов сред. Исследованию распространения поверхностных сдвиговых волн на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств, склеенных электропроводящим тонким слоем, посвящена работа [6]. Здесь получены условия существования и некоторые особенности распространения электроупругих поверхностных волн. Следует отметить что полубесконечные металлические слои и трещины в электроупругой среде становятся причиной дифракции волн сдвига. В [2] рассмотрена дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны, падающей из бесконечности на полубесконечную трещину в пьезоэлектрическом пространстве. Рассмотрена задача дифракции плоской волны сдвига в электроупругой составной среде (пьезоэлектрик–диэлектрик) при наличии тонкого полубесконечного, металлического, заземлённого слоя (электрода) в диэлектрике без пьезоэффекта [3]. Этот слой является причиной дифракции электроупругой волны, при этом, в пьезоэлектрическом полупространстве возбуждаются поверхностные волны сдвига и проявляются некоторые особые волновые явления. В [4] рассматривается пьезоэлектрическая среда из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделённых вакуумным слоем, и исследуется дифракция электроупругой волны сдвига на полубесконечном электроде. Рассмотрена дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине между пьезоэлектрическим и упругим диэлектрическим полупространствами, когда по остальной части контактной плоскости они скреплены [5]. Наличие полубесконечной трещины и пьезоэффекта является причиной возбуждения одной или двух электроупругих поверхностных волн. Построено электроупругое сдвиговое волновое поле в составном диэлектрическом пространстве. В данной работе исследуется волновое сдвиговое поле в составном пьезоэлектрическом пространстве, выявляются поверхностные–локализованные у контактной плоскости полупространств, волны и другие особенности, обусловленные наличием пьезоэффекта и дифракцией распространяющейся сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине между полупространствами. Анизотропия пьезоэлектриков и ряд новых свойств, проявляющихся в результате взаимодействия физических полей разной природы, усложняют исследование волнового процесса, но приводят к важным результатам с теоретической точки зрения математической физики. Исследования процессов распространения электроупругих волн в неоднородной среде обладающей пьезоэффектом, тесно связаны с развитием электроакустики, пьезотехники и измерительных приборов.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача определения волнового поля в неоднородном (составном) пьезоэлектрическом пространстве, отнесённом к декартовой системе координат $Oxyz$, при распространении электроупругой плоской волны сдвига из бесконечности в полупространстве $y > 0$. Неоднородность среды обусловлена наличием двух пьезоэлектрических полупространств $y > 0$ и $y < 0$ – пьезоэлектриков класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz

главной осью кристалла, с разными электроупругими характеристиками. Отметим, что в настоящее время повысились возможности технологии создания конструктивно неоднородных материалов для инженерной практики. Пьезоэлектрические полупространства скреплены по плоскости $y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty$, т.е. считаем, что между полупространствами осуществляется акустический контакт в плоскости Oxz при $x > 0$. В плоскости Oxz при $x < 0$ пьезоэлектрические полупространства взаимодействуют без акустического (механического) контакта. Можно принять, что рассматриваемая составная среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x < 0$. В пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$ из бесконечности под углом $\theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \right)$ к плоскости раздела $y = 0$ распространяется плоская электроупругая волна сдвига



$$u_z^\infty(x, y, t) = w_\infty(x, y)e^{-i\omega t} \quad (1.1)$$

$$\Phi^\infty(x, y, t) = \Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$$

со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического поля, соответственно

$$w_\infty(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} \quad (1.2)$$

$$\Phi_\infty(x, y) = \frac{e_1}{\varepsilon_1} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0}$$

Здесь ω – частота колебаний, t – параметр времени, $k_i = \omega/C_i$, $C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)}(1 + \chi_i)}/\rho_i$, $\chi_i = e_i^2/c_i \varepsilon_i$, $i = 1, 2$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрических средах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно. В этих

соотношениях $c_i = c_{44}^{(i)}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$ – упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные в пьезоэлектрических полупространствах, а ρ_i – плотность, $i = 1, 2$.

Рассматривается обусловленная наличием полубесконечной трещины, дифракция падающей сдвиговой плоской электроупругой волны (1.1) в составной среде. Для рассматриваемого класса гексагональной симметрии задача распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических средах разделяется на плоскую и антиплоскую. По постановке задачи среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах. Изучается линейное взаимодействие электрического и механического полей при контакте двух пьезоэлектрических полупространств. Учитывая гармоническую зависимость от времени (временной множитель $e^{-i\omega t}$) всех составляющих волнового поля, для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах, имеем следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + k_i^2 w_i &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + k_i^2 \frac{e_i}{\varepsilon_i} w_i &= 0 \end{aligned} \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

Понятно, что в приведённых уравнениях $w_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ функции амплитуд перемещения и электрического потенциала пьезоэлектрика $y > 0$, $-\infty < x < \infty$, а $w_2(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ – пьезоэлектрика $y < 0$, $-\infty < x < \infty$.

На берегах трещины для амплитуд напряжений $\sigma_{yz}^{(1)}$, $\sigma_{yz}^{(2)}$, соответственно для пьезоэлектриков $y > 0$ и $y < 0$, имеем условия

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(1)} = c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} &= 0 \\ \sigma_{yz}^{(2)} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad y = 0, x < 0 \quad (1.4)$$

Разница перемещений на берегах трещины – пока неопределённая величина $w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = w_0(x)$ при $x < 0$ (1.5)

Решения уравнений (1.3) должны удовлетворять контактными условиям скрепления при $y = 0, x > 0$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0) = q_0(x), w_1(x, +0) = w_2(x, -0) \quad (1.6)$$

Функции $q_+(x) = q_0(x) \mathfrak{G}(x)$ и $\psi_-(x) = w_0(x) \mathfrak{G}(-x)$, где $\mathfrak{G}(x)$ – известная функция Хевисайда, представляют касательное напряжение при $y = 0$ и разницу

перемещений на $y = \pm 0$, соответственно. Тогда, условия на граничной (контактной) плоскости разнородных полупространств (1.4)–(1.6) принимают вид:

$$c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = q_+(x) \quad \text{при } y = 0 \quad (1.7)$$

$$w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = \psi_-(x) \quad (1.8)$$

Из физических соображений ясно, что для характеристических функций электрического поля данного составного пространства имеют место условия непрерывности по плоскости $y = 0$. Амплитуды электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции в полупространствах удовлетворяют следующим контактными условиям:

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0), \quad D_1(x, 0) = D_2(x, 0) \quad \text{при } y = 0 \quad (1.9)$$

$$D_i = e_i \frac{\partial w_i}{\partial y} - \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \quad i = 1, 2 \quad (1.10)$$

Таким образом, поставленная задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве при дифракции падающей из бесконечности плоской электроупругой волны сдвига (1.1), (1.2) на полубесконечной трещине в рассматриваемой пьезосреде, сведена к решению дифференциальных уравнений (1.3) при контактных условиях (1.7)–(1.9). Задаче дифракции плоской электроупругой волны на полубесконечной трещине между скрепленными диэлектрическими полупространствами, когда только одно из полупространств обладает пьезоэффектом, посвящена работа [5].

2. Решение задачи. Применяется интегральное преобразование Фурье по переменной x , и относительно трансформантов Фурье искомых функций из (1.3) получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{u} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} + k_1^2 \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{u} = 0 \quad y > 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{w}_2 = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2 + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2 = 0 \quad y < 0 \quad (2.2)$$

Здесь введены функции:

$$u(x, y) = w_1(x, y) - w_\infty(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi_1(x, y) - \Phi_\infty(x, y) \quad y > 0 \quad (2.3)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma, y) &= \bar{u}(\sigma, y) + 2\pi e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0) \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, y) &= \bar{\varphi}(\sigma, y) + 2\pi \frac{e_1}{\varepsilon_1} e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0) \end{aligned} \quad y > 0 \quad (2.4)$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Решения уравнений (2.1), (2.2) должны удовлетворять следующим условиям на граничной плоскости раздела двух сред, т.е. контактными условиям:

$$\bar{w}_1(\sigma + 0) - \bar{w}_2(\sigma, -0) = \bar{\psi}_-(\sigma), \quad \bar{\Phi}_1(\sigma, +0) = \bar{\Phi}_2(\sigma, -0)$$

$$e_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} - \varepsilon_1 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dy} = e_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} - \varepsilon_2 \frac{d\bar{\Phi}_2}{dy} \quad \text{при } y = 0 \quad (2.5)$$

$$c_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} + e_1 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dy} = c_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} + e_2 \frac{d\bar{\Phi}_2}{dy} = \bar{q}_+(\sigma) \quad \text{при } y = 0$$

$\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$ – трансформанты Фурье функций $\psi_-(x)$ и $q_+(x)$.

Выражения для искомым функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах получим после обратного преобразования Фурье:

$$\{w_i(x, y), \Phi_i(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{w}_i(\sigma, y), \bar{\Phi}_i(\sigma, y)\} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad i=1,2$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств представляются в виде

$$\bar{w}_1 = A_1(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} + 2\pi e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0) \quad y > 0$$

$$\bar{\Phi}_1 = B_1(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1 \quad (2.6)$$

$$\bar{w}_2 = A_2(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y}, \quad \bar{\Phi}_2 = B_2(\sigma) e^{|\sigma| y} + \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2 \quad y < 0 \quad (2.7)$$

$$\text{где } A_1(\sigma) = -\frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \bar{\psi}_-(\sigma) - \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} B_1 - 2\pi \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0)$$

$$B_1(\sigma) = \frac{K_3(\sigma)}{|\sigma| K_1(\sigma)} \bar{q}_+(\sigma) - 4\pi \frac{e_1}{\varepsilon_1} \frac{\delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0)}{K_1(k_1 \cos \theta_0)} \quad (2.8)$$

$$A_2(\sigma) = A_1(\sigma) - \bar{\psi}_-(\sigma) + 2\pi \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \quad B_2(\sigma) = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} B_1(\sigma)$$

$$K_3(\sigma) = \frac{\chi_1}{e_1 (1 + \chi_1)} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} + \frac{\chi_2}{e_2 (1 + \chi_2)} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}$$

Характеристические функции данной задачи со смешанным условием на контактной плоскости имеют вид:

$$K_1(\sigma) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2} - \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}} \quad (2.9)$$

$$K_2(\sigma) = c_1 (1 + \chi_1) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} + c_2 (1 + \chi_2) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \frac{(e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\gamma_1(\sigma) \rightarrow |\sigma|$, $\gamma_2(\sigma) \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $\gamma_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}$, $\gamma_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}$, т.е. предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ функций комплексного переменного $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$ сверху, а $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ – снизу [7].

Относительно неизвестных функций $\bar{\psi}_-(\sigma)$, $\bar{q}_+(\sigma)$ в формулах (2.6), (2.7) получим из (2.5) следующее уравнение:

$$c_1 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \Lambda_1(\sigma) \bar{\psi}_-(\sigma) + \mu_0 \Lambda_2(\sigma) \bar{q}_+(\sigma) + 4\pi i k_1 c_1 \frac{\mu_1}{1 + \varepsilon_0} \sin \theta_0 \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0) = 0 \quad (2.10)$$

здесь

$$\Lambda_1(\sigma) = \frac{(1 + \chi_1)(1 + \chi_2)\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1 + \chi_1) + \varepsilon_2(1 + \chi_2)} K_1(\sigma) \quad (2.11)$$

$$\Lambda_2(\sigma) = \frac{1}{(c_1 + c_2)(1 + \chi_0)} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}} K_2(\sigma)$$

$$\lambda_0 = \frac{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1}{e_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{ik_1 \cos \theta_0}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0}},$$

$$\mu_0 = \frac{(1 + c_0)(1 + \chi_0)}{1 + \varepsilon_0}, \quad \mu_1 = (1 + \chi_1)(1 + \chi_2)(1 + \lambda_0),$$

$$c_0 = \frac{c_1}{c_2}, \quad \chi_0 = \frac{(e_1 + e_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(c_1 + c_2)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 \chi_1 + \varepsilon_2 \chi_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Рассмотрим частный случай, когда между пьезоэлектрическими полупространствами осуществляется только электрический контакт – они взаимодействуют без акустического контакта, т.е. в составном пьезоэлектрическом пространстве существует бесконечная трещина по плоскости $y = 0$, следует принять, что $q_+(x) = 0$.

Тогда получим значения функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$

$$w_1(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} + A_1 e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0}$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1(x, y) - \frac{2e_1}{\varepsilon_1 K_1(k_1 \cos \theta_0)} e^{-ik_1 x \cos \theta_0} e^{-k_1 y \cos \theta_0} \quad (2.12)$$

а в пьезоэлектрической среде $y < 0$

$$w_2(x, y) = A_{2*} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} y}$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_2(x, y) + \frac{2e_1}{\varepsilon_2 K_1(k_1 \cos \theta_0)} e^{-ik_1 x \cos \theta_0} e^{k_1 y \cos \theta_0}, \quad (2.13)$$

где

$$A_{1*} = 1 + 2i \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\text{ctg} \theta_0}{K_1(k_1 \cos \theta_0)}$$

$$A_{2*} = -2i \frac{\chi_2}{e_2(1 + \chi_2)} \frac{e_1 k_1 \cos \theta_0}{K_1(k_1 \cos \theta_0) \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0}}.$$

Как и следовало ожидать, $w_2 = 0$ как при отсутствии пьезоэффекта в среде $y < 0$, так и при отсутствии пьезоэффекта в полупространстве $y > 0$ $A_{1*} = 1, A_{2*} = 0$. Как видно из полученных формул, электроупругое волновое поле в составном пьезоэлектрическом пространстве, в данном случае, состоит из падающей, отражённой и проходящей волн. Наличие локализованной волны для электрических потенциалов обусловлено падающей волной и особенностями уравнений электростатики. Необходимо рассматривать и другой частный случай, когда пьезоэлектрические полупространства скреплены по всей плоскости $y = 0$. В этом случае имеет место полный электромеханический (акустический) контакт между пьезоэлектриками. Уже следует принять $\psi_-(x) = 0$, и для этой задачи отражения и преломления волн получим значения функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$ в виде

$$w_1(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} - A_{10} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0}$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1(x, y) - B_{10} e^{-ik_1 x \cos \theta_0} e^{-k_1 y \cos \theta_0} \quad (2.14)$$

а в полупространстве $y < 0$

$$w_2(x, y) = (1 - A_{10}) e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} y}$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_2(x, y) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} B_{10} e^{-ik_1 x \cos \theta_0} e^{k_1 y \cos \theta_0}, \quad (2.15)$$

где

$$A_{10} = 1 + \frac{2ic_1(1 + \chi_1) \text{tg} \theta_0}{K_2(k_1 \cos \theta_0)}, \quad B_{10} = \frac{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} (A_{10} - 1)$$

Таким образом, и в этой частной задаче электроупругое волновое поле сдвига состоит из падающей и отражённой волн в пьезоэлектрическом полупространстве

$y > 0$ и из проходящей в пьезоэлектрическом полупространстве $y < 0$. Локализованные (поверхностные) у поверхности контакта электроупругие волны, как и в первом частном случае, не возбуждаются.

В случае отсутствия пьезоэффекта в пространстве

$$A_{10} = \frac{c_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} - c_1 k_1 \sin \theta_0}{c_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} + c_1 k_1 \sin \theta_0},$$

очевидно, что при $\cos \theta_0 = \frac{k_2}{k_1} < 1$ формулы соответствуют известному случаю

полного внутреннего отражения ($A_{10} = -1$)

$$w_1(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} + e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0}, \quad w_2(x, y) = 2e^{-ik_1 x \cos \theta_0}.$$

Функциональное уравнение для определения искомых функций $\bar{q}_+(\sigma), \bar{\psi}_-(\sigma)$ (2.10) рассматривается как краевая задача типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси [2-4]. Анализируя функцию $K_1(\sigma)$, доказываем, что $K_1(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_*$, σ_* – единственный положительный корень уравнения $K_1(\sigma) = 0$. Рассматривая нули функции $K_2(\sigma)$, доказываем, что уравнение $K_2(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_0 > k_2$, для определённости принимается $k_2 > k_1$, если

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 - \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2}\right)^2. \quad (2.16)$$

Функция $K_2(\sigma)$ при приведённом выше условии имеет нули только в точках $\pm\sigma_0$. Рассматривая области монотонности функций $K_i(\sigma)$, $i=1,2$, доказываем, что $\sigma_0 < \sigma_*$. При решении функционального уравнения (2.10) и факторизации функции $L(\sigma) = \Lambda_1(\sigma)/\Lambda_2(\sigma)$ принимается, что действительная ось обходит, как точки ветвления $\pm k_1, \pm k_2$ функций $\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)$, так и нули функций $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ $\pm\sigma_*$ и $\pm\sigma_0$, т.е. действительная ось обходит точки $\sigma = -\sigma_*$, $\sigma = -\sigma_0$ сверху, а точки $\sigma = \sigma_0$, $\sigma = \sigma_*$ – снизу, обеспечивая условия уходящей волны [3,5]. В случае, когда диэлектрическое полупространство $y < 0$ не обладает пьезоэффектом $e_2 = 0$, то для нулей соответствующих функций $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ $\pm\sigma_{*1}$ и $\pm\sigma_{01}$, доказываем, что $\sigma_{01} < \sigma_{*1}$, при этом, $\sigma_0 < \sigma_{01}$, $\sigma_{*1} < \sigma_*$.

Функциональное уравнение (2.10) решается, используя методику, развитую в [2-5], решения строятся, факторизуя функцию $L(\sigma)$, представляя её в виде

$$L(\sigma) = L^+(\sigma)L^-(\sigma), \quad (2.17)$$

функции $\Lambda_1(\sigma) \rightarrow 1$, $\Lambda_2(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$,

$\Lambda_i^\pm(\alpha) \rightarrow 1$, при $|\alpha| \rightarrow \infty$,

где функции $L^\pm(\alpha)$, $\alpha = \sigma + i\tau$ регулярны и не имеют нулей при $\text{Im } \alpha > 0$ и $\text{Im } \alpha < 0$, соответственно. $L^\pm(\sigma)$ – граничные значения этих функций.

$$L^+(\sigma) = \exp(F^+(\sigma)), \quad L^-(\sigma) = \exp(F^-(\sigma)),$$

$$F^+(\sigma) = \int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)} dx, \quad F^-(\sigma) = F^+(-\sigma),$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln L(\sigma)e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad L^-(\sigma) = L^+(\sigma),$$

Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется $|\alpha| = \alpha$ при $\text{Re } \alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\text{Re } \alpha < 0$. При контурном интегрировании имеется в виду, что

$$\frac{1}{s - (\sigma - i0)} = \frac{1}{s - \sigma} - i\pi\delta(s - \sigma),$$

используется формула

$$2\pi i\delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}.$$

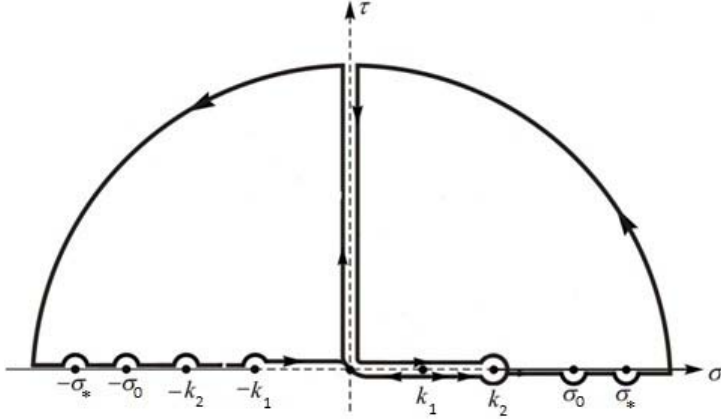
Выражения искомым функций принимают вид:

$$\bar{\psi}_-(\sigma) = -\frac{b}{\sqrt{\sigma - k_1} L^-(\sigma)(\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)}, \quad (2.18)$$

$$\bar{q}_+(\sigma) = \frac{c_1 b \sqrt{\sigma + k_1} L^+(\sigma)}{\mu_0 (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)},$$

где

$$b = \frac{2\sqrt{2k_1}\mu_1 \sin \frac{\theta_0}{2}}{\Lambda_2(k_1 \cos \theta_0) L^+(k_1 \cos \theta_0)(1 + \varepsilon_0)},$$



Функции амплитуд перемещения в пьезоэлектрических полупространствах при $x < 0$ принимают вид:

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} + A_{1*} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0} - \\
 &- \frac{b}{2\pi\mu_0(1+\chi_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e_1 \frac{K_3(\sigma)}{K_1(\sigma)} \right) \frac{\sqrt{\sigma+k_1} L^+(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k_1^2} (\sigma-k_1 \cos \theta_0 + i0)}, \\
 w_2(x, y) &= A_{2*} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2-k_1^2} \cos^2 \theta_0 y} - \\
 &- \frac{bc_1}{2\pi c_2 \mu_0 (1+\chi_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + e_2 \frac{\varepsilon_1 K_3(\sigma)}{\varepsilon_2 K_1(\sigma)} \right) \frac{\sqrt{\sigma+k_1} L^+(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k_2^2} (\sigma-k_1 \cos \theta_0 + i0)},
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

а при $x > 0$

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} - A_{10} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0} + \\
 &+ \frac{b}{2\pi} \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{e_1 K_4(\sigma)}{\varepsilon_1 K_2(\sigma)} \right) \frac{e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma-k_1} L^-(\sigma) (\sigma-k_1 \cos \theta_0 - i0)}, \\
 w_2(x, y) &= (1 - A_{10}) e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2-k_1^2} \cos^2 \theta_0 y} + \\
 &+ \frac{b}{2\pi} \frac{e_1 \varepsilon_2}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{e_2 K_4(\sigma)}{\varepsilon_2 K_2(\sigma)} \right) \frac{e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma-k_1} L^-(\sigma) (\sigma-k_1 \cos \theta_0 - i0)}. \\
 K_4(\sigma) &= e_1 \frac{1+\chi_1}{\chi_1} \frac{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{|\sigma|} + e_2 \frac{1+\chi_2}{\chi_2} \frac{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}{|\sigma|}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Распределение контактного напряжения при $x \rightarrow +0$

$$\sigma_{yz}(x, 0) = C \frac{\sin \theta_0 / 2}{\sqrt{k_1 x}} + O(1),$$

Интегралы преобразуются методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Показаны разрезы в комплексной плоскости и путь интегрирования. Путь интегрирования при $x < 0$ замыкается в верхней полуплоскости и действительная ось обходит точки $\mp \sigma_*$ сверху и снизу, соответственно. Аналитическое продолжение функции $K_1(\sigma)$, т.е. функция $K_1(\alpha)$, при таких разрезах в комплексной плоскости не имеет чисто мнимых, а также комплексных нулей, это следует из постановки задачи (принцип уходящей волны). Единственная особая точка – простой полюс $\sigma = \sigma_*$. Интеграл представляется в виде суммы регулярных интегралов [3,4,8]. Волновое поле состоит из падающей и отражённой волн, дифрагированных затухающих объёмных волн, а также дифрагированной поверхностной волны, локализованной у контактной поверхности

$$\begin{aligned} w_{1*}(x, y) &= A_*^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_* x} & y > 0 \\ w_{2*}(x, y) &= A_*^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_* x} & y < 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$A_*^{(1)} = -\frac{ie_1 b}{\mu_0 (1 + \chi_1)} \frac{\sqrt{\sigma_* + k_1} L^+(\sigma_*) K_3(\sigma_*)}{\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} K_1'(\sigma_*) (\sigma_* - k_1 \cos \theta_0)} \quad A_*^{(2)} = \frac{e_1 \chi_2}{e_2 \chi_1} A_*^{(1)}$$

Эта волна распространяется по оси x с волновым числом σ_* и скоростью ω/σ_* и затухает при $|y| \rightarrow \infty$. Дифрагированные волны обусловлены наличием полубесконечной трещины, а появление поверхностной волны обусловлено также пьезоэффектом. Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y = +0$ при $x \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$w_1(x, 0) = (1 + A_{1*}) e^{-ik_1 x \cos \theta_0} + A_{1*}^{(1)} e^{i\sigma_* |x|} + e^{i(kx - \frac{\pi}{4})} O(|kx|^{-\frac{3}{2}}) + O(|kx|^{-\frac{3}{2}}).$$

Функция перемещений точек полупространства $x > 0$ представляется в виде суммы регулярных интегралов, падающей и отраженной волн, а также дифрагированной поверхностной волны, локализованной у контактной поверхности

$$\begin{aligned} w_{10}(x, y) &= A_0^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_0 x} & y > 0 \\ w_{20}(x, y) &= A_0^{(1)} e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_0 x} & y < 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$A_0^{(1)} = \frac{ie_1 e_2 \varepsilon_1 b}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \frac{\sqrt{k_1 + \sigma_0} K_4(-\sigma_0)}{\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} L(-\sigma_0) K_2'(-\sigma_0) (\sigma_0 + k_1 \cos \theta_0)}$$

Действительная ось обходит точки $\mp \sigma_0$ сверху и снизу, соответственно. При некоторых значениях электроупругих характеристик составного пространства –

условия (2.16), $-\sigma_0$ является корнем уравнения $K_2(\sigma) = 0$. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости [3,4]. Аналитическое продолжение подынтегральной функции при таких разрезах в комплексной плоскости имеет только единственную особую точку – простой полюс $\sigma = -\sigma_0$. Асимптотическое представление на контактной плоскости $y = 0$ при $x \rightarrow \infty$

$$w_1(x, 0) = (1 - A_0) e^{-ik_1 x \cos \theta_0} + A_0^{(1)} e^{i\sigma_0 x} + e^{i(kx + \frac{\pi}{4})} O((kx)^{\frac{3}{2}}) + O((kx)^{\frac{3}{2}}).$$

Волновое поле перемещений состоит из падающей волны, отражённой волны и дифрагированных затухающих объёмных волн и распространяющаяся по направлению x к $+\infty$ со скоростью ω/σ_0 (σ_0 – волновое число) локализованной волны. Следует отметить, что $\omega/\sigma_0 > \omega/\sigma_*$, т.е. если локализованная волна существует, электромеханические характеристики удовлетворяют условию (2.16), то её скорость распространения больше, чем скорость поверхностной волны $w_{1*}(x, y)$, распространяющаяся по x к $-\infty$, когда между полупространствами отсутствует акустический контакт.

В случае $e_2 = 0$ (отсутствует пьезоэффект в полупространстве $y < 0$) для скоростей поверхностных волн имеем $\omega/\sigma_{01} > \omega/\sigma_{*1}$, при этом $\omega/\sigma_0 > \omega/\sigma_{01} > \omega/\sigma_{*1} > \omega/\sigma_*$, как уже следует из приведённых выше соотношений.

Заключение. Связанностью физических полей – пьезоэффектом, обусловлены распространения поверхностных (локализованных) волн со смещениями частиц в направлении симметрии кристалла. Исследование волнового процесса позволило выявить новые, обусловленные дифракцией и пьезоэффектом, свойства и особенности, присущие взаимосвязанным средам и полям. Наличие полубесконечной трещины приводит к существенному изменению волнового поля в составном пьезоэлектрическом пространстве – могут возбуждаться две поверхностные, локализованные у граничной плоскости, волны с разными скоростями распространения, а также появляются цилиндрическая волна и волна, распространяющаяся от контактной поверхности и имеющая неволновой характер на этой поверхности. Результаты рассматриваемой в представленной работе задачи о распространении сдвиговых волн в составном пьезоэлектрическом пространстве с полубесконечной трещиной, могут быть использованы при изучении прикладных задач распространения электроупругих локализованных и объёмных волн. Проблема взаимодействия различных полей физического происхождения в твёрдых телах интересна с точки зрения механики сплошной среды и математической физики, и, конечно, очень важна при проектировании инженерно-физических приборов и при изучении принципов работы новых современных акустоэлектрических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с. Balakirev M.K., Gilinskiy I.A. Waves in piezocrystals. Novosibirsk: Nauka, 1982. 240p. (in Russian)
2. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38–50. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H. Diffraction of a plane shear wave on semi infinite crack in a piezoelectric space. //Proceedings of NAS of Armenia. 2005. Vol. 58. Issue 1. pp.38–50. (in Russian)
3. Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №1. С.45–56. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of plane shear wave in piezoelectric semi-space at a semi-infinite metallic layer in the dielectric medium. //Proceedings of NAS of Armenia. 2015. Vol. 68. Issue 1. pp.45–56. (in Russian)
4. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Известия НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50–69. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. Diffraction of shear plane electroelastic wave on the semi-infinite electrode in the piezoelectric space with crack. //Proceedings of NAS of Armenia. 2010. Vol. 63. Issue 1. pp.50–69. (in Russian)
5. Григорян Э.Х., Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик. //Тр. 7-ой межд.конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137–143. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of a plane shear wave on semi-infinite crack in a piezoelectric–dielectric space. //Proc. of the VII int. conf. “Problems of interaction dynamics of deformable media”. Yerevan: 2011. pp. 137–143. (in Russian)
6. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3–4. С.31–36. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electroelastic surface shear waves on an division surface of two piezoelectric half-space. //Proceedings of NAS of Armenia. 1994. Vol. 47. Issue 3–4. pp.31–36. (in Russian)
7. Нобль Б. Метод Винера–Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с. Noble. B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique. M.: Mir, 1962. 294p. (in Russian)
8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. // Доклады НАН Армении. 2010. Т.110. №3. С.261–271. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. On New Methods of Asymptotic Formulas Determination in Waves Diffraction Problems. //Reposts of NAS RA. 2010. Vol. 110. Issue 3. pp. 261–271 (in Russian)

Сведения об авторах:

Джилаван Самвел Акопович – к.ф.–м.н., доцент, кафедра механики, Ереванский госуниверситет. Тел.: (+374 91) 500770. Е–mail: samjilavyan@ysu.am

Саргсян Арсен Сурикович – аспирант кафедры механики, Ереванский госуниверситет. Тел.: (+374 77) 124310. Е–mail: arsensarghsyan777@gmail.com

Поступила в редакцию 22.01.2019 г.