

УДК 539.3

ХАРАКТЕР НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.

Ключевые слова: Пологие цилиндрические оболочки, сверхзвуковой поток газа, критическая скорость, зависимость амплитуда-скорость.

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A.

Character of non-linear vibrations of cylindrical shells in a supersonic gas flow

Keywords: Shallow shells; supersonic gas flow; critical speed; dependence amplitude-speed.

The problem of nonlinear oscillations of isotropic shallow cylindrical shell placed in a supersonic gas flow is considered. The study was conducted taking into account both types of nonlinearity: aerodynamic and geometric (both quadratic and cubic). Taking into account the aerodynamic nonlinearity (especially its asymmetric quadratic part), it was established that the dependence «amplitude – speed» in the certain intervals of variation of velocity parameter is multi-valued. This fact is illustrated in the figures brought in the text, mainly in the form of two branches, the lower of which, probably, are unstable. Unstable branches separate the areas of two neighboring sustainable solutions. From here it is easy to find the perturbation value necessary to transfer the system from one stable branch into another. Existence of certain segments of speed of flowing stream is shown, at which it is impossible to excite flutter oscillations both at subcritical speeds and in the postcritical stage (zone of silence). It has been established that both existence of various types of dependencies «amplitude-speed», bifurcation points and areas of silence, and transition from one dependency into another can be reached by the optimal choice of the frequency parameter of vibration.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Վարդանյան Ի.Ա.

Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող գլանային թաղանթի ոչ գծային տատանումների բնույթը

Հիմնաբառեր. Գլանային թաղանթներ, գազի գերձայնային հոսանք, ամպլիտուդա-արագություն կախվածություն

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող իզոտրոպ գլանային թաղանթի ոչ գծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է երկու տիպի ոչգծայինությունների հաշվառմամբ: Աերոառաձգական և երկրաչափական (քառակուսային և խորանարդային): Աերոառաձգական ոչգծայնության (և հատկապես նրա աչ սիմետրիկ քառակուսային մասի) հաշվարման շնորհիվ ցույց է տրված, որ «ամպլիտուդա-արագություն» կախվածությունը բազմարժեք է արագության պարամետրի փոփոխության որոշակի հատվածներում: Այդ փաստը ցույց է տրված հողվածում բերված գծաբերում հիմնականում երկու ճյուղերի տեսքով, որոնցից ստորինները, ամենայն հավանականությամբ, անկայուն են: Անկայուն ճյուղերը բաժանում են երկու հարևան կայուն լուծումների ձգողականության տիրույթները: Այստեղից հեշտությամբ ստացվում է գրգռման այն մեծությունը, որն անհրաժեշտ է համակարգը մի կայուն ճյուղից մյուսին տեղափոխելու համար: Ցույց է տրված շրջհոսման արագության մեծության փոփոխության որոշակի տիրույթների գոյությունը, որտեղ չմարող ֆլատերային տատանումներ հնարավոր չէ գրգռել ինչպես մինչկրիտիկական, այնպես էլ հետկրիտիկական վիճակներում (լուծության տիրույթներ):

Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной пологой цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической и геометрической (как квадратичной, так и кубической). Благодаря учёту аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) установлено, что зависимость амплитуда-скорость в определённых интервалах изменения параметра скорости является многозначной. Этот факт иллюстрирован на приведённых в тексте фигурах, в основном, в виде двух ветвей, нижние из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви отделяют области

тяготения двух соседних устойчивых решений. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показаны существования определённых областей изменения величины скорости обтекающего потока, при которых невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания как при докритических скоростях, так и в послекритической стадии (зоны молчания). Приведём некоторые, на наш взгляд, наиболее существенные, новые результаты, полученные в данной работе. Они являются следствием влияния набегающего сверхзвукового потока газа на характер нелинейных колебаний рассматриваемой аэроупругой системы и сформулируются следующим образом.

Для толстых оболочек: существует интервал изменения скорости потока, в котором невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания). При этом: а) с увеличением относительной частоты колебаний, зона молчания в виде конечной области перемещается в сторону больших скоростей, б) если относительные частоты колебаний достаточно малы, то зона молчания, будучи примыкающей к области малых скоростей, с увеличением относительного радиуса оболочки существенно расширяется, в) если же частоты колебаний достаточно близки к критической, то в этом случае также существует зона молчания и зависимость амплитуда-скорость имеет следующий характер: в области левее указанной зоны зависимость амплитуды колебаний от скорости потока является монотонно убывающей, стремящейся к нулю на левой границе зоны. На правом конце зоны значение амплитуды скачком возрастает до определённого конечного значения, после чего зависимость амплитуда-скорость является двухзначной, одна ветвь которой убывает, а вторая (неустойчивая ветвь) – имеет максимум, при скоростях, больших критической, после чего также является монотонно убывающей функцией; г) за счёт выбора геометрических параметров и частоты колебаний возможно существование такого интервала изменения скорости обтекающего потока, где зависимость амплитуда-скорость является однозначной функцией, имеющая точку минимума.

Для тонких оболочек: при малых значениях параметра частоты флаттерных колебаний существует определённое значение обтекающего потока, что а) при скоростях, меньших указанной, невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания); б) при значениях скорости, больших указанной, зависимость «амплитуда-скорость» является однозначной монотонно убывающей функцией, аналогичной соответствующей зависимости, полученной при толстых оболочках, в) с увеличением относительной частоты колебаний, зона молчания в виде конечной области перемещается в сторону больших скоростей; при частотах, близких к критической, характер зависимости амплитуда-скорость существенно меняется. В этом случае, если постепенно увеличить скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определённого значения скорости потока («верхняя» критическая скорость), где колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущённое состояние оболочки. При снижении скорости невозмущённое состояние является устойчивым, пока скорость потока больше критической скорости флаттера, найденная на основе линейной теории («нижняя» критическая скорость). При «нижней» критической скорости амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определённого значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает. При малых значениях частоты флаттерных колебаний показана возможность существования точки бифуркации.

Введение

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1,11,13,27,31] и в обзорных статьях [19,22,26]. Исследования проведены как в линейной, так и в нелинейной постановке. Решением линейных задач получены те наименьшие (критическое) значения величины скорости обтекающего потока \bar{u} , при которых рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Линейные задачи были решены как точно [12,17,24,25], так и приближённо (в основном, используя метод Галеркина) [2,3,5-11,15,29]. Нелинейные задачи решены приближёнными методами и предметом исследований, в основном, было изучение зависимости амплитуды A колебаний от параметра скорости обтекающего потока v т.е. исследование функции $A(v)$. Эти вопросы, связанные с изучением свойств функции $A(v)$ в задачах флаттера, когда пластинка обтекается с двух сторон с равными скоростями (тогда квадратичная нелинейность отсутствует), детально исследованы в работах [10,11]. В этих работах, когда величина скорости потока

находится в достаточно малой окрестности критической скорости флаттера, показано, что: нелинейные флаттерные колебания существуют либо только в докритической стадии, где $A(v)$ монотонно убывающая функция, либо только при послекритических скоростях, где $A(v)$ – монотонно возрастающая функция. В работах [6,7] показано, что аэродинамическая нелинейность (особенно её несимметричная квадратичная часть) в случае гибких пластин приводит к появлению новых типов зависимостей $A(v)$ как в докритической стадии, так и послекритических скоростях, мало отличающихся от критической. В работе [5] исследованы влияния геометрической нелинейности на зависимость «амплитуда-скорость» в случае цилиндрической панели. Показано, что зависимость амплитуды нелинейных флаттерных колебаний от величины скорости обтекающего потока может иметь многозначный характер.

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов зависимости амплитуды нелинейных колебаний от величины скорости обтекающего потока при докритических частотах. В отличие от опубликованных основных научных исследований здесь, как и в наших работах [6,7], посвященных тонким пластинкам, исследование проводится методом, предложенным в работе [5]. В этой работе учитывается, что невозможно выявлять влияния квадратичных нелинейностей, если принимать, что физическая система совершает колебания вокруг невозмущённого состояния. В связи с этим, в [5] рекомендуется: а) отказаться от указанного типа колебаний и б) принимать, что система совершает нелинейные колебания с конечной амплитудой вокруг состояния, достаточно близкого к невозмущённому. Такой подход дал возможность получить систему нелинейных алгебраических уравнений для определения амплитуды колебаний, в которые входят члены, учитывающие квадратическую нелинейность. Нелинейная система алгебраических уравнений решена численно и на основе этого изучены влияния частоты нелинейных колебаний и геометрических параметров оболочки на зависимость $A(v)$. Установлено, что благодаря учёту квадратичной нелинейности характер функции $A(v)$ в зависимости от указанных параметров существенно изменяется как количественно, так и качественно. Некоторые характерные результаты аналитическо-численного решения представлены на фигурах 1-11.

1. Постановка задачи устойчивости

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную в плане цилиндрическую панель постоянной толщины h . Оболочка отнесена к ортогональным криволинейным координатам x, y, z , где координатные линии x и y совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия z прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(x, y, 0)$ до точки (x, y, z) оболочки.

Пусть оболочка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущённой скоростью \vec{u} , направленной вдоль оси Ox . Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы.

На основе исследований принимаются следующие предположения:

1) гипотеза Кирхгофа-Лява, согласно которой [30]

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y}, \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i – компоненты перемещения точек оболочки ($i = 1, 2, 3$);

2) давление газа учитывается по приближённой формуле «поршневой теории» [4,18]

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v_3^2}{a_\infty^2} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}}; \quad (2)$$

3) основные положения теории весьма пологих гибких оболочек с большим показателем изменяемости, считая, что прогибы $w(x, y, t)$ сравнимы с толщиной оболочки [31].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения полой оболочки [11]:

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho_0 h \varepsilon + \frac{\kappa p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \kappa p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x} = \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{1}{R} - \\ - \kappa p_\infty \frac{\kappa + 1}{4} M^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{M}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $M = \frac{u}{a_\infty}$, $a_\infty = \frac{\kappa p_\infty}{\rho_\infty}$, $F(x, y, t)$ – функция напряжений

($T_{11} = \partial^2 F / \partial y^2$, $T_{22} = \partial^2 F / \partial x^2$, $T_{12} = -\partial^2 F / \partial x \partial y$), T_{ik} – внутренние усилия, ε – коэффициент линейного затухания, $M = U / a_\infty$ – число Маха, p_∞ – давление невозмущённого потока газа, a_∞ – величина скорости звука для невозмущённого газа, κ – показатель политропы, t – время, R – радиус оболочки, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала оболочки.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (3)–(4) присоединяются также условия на контуре оболочки. Здесь рассматривается шарнирно опертая по

всему контуру полая оболочка $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$, края которой свободно смещаются в плане. Тогда, следуя [11], граничные условия принимаются в виде:
при $x = 0, x = a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

$$\bar{T}_{11} = 0, \quad \bar{T}_{12} = 0, \quad (6)$$

при $y = 0, y = b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

$$\bar{T}_{22} = 0, \quad \bar{T}_{21} = 0, \quad (8)$$

где \bar{T}_{ik} – осреднённые значения усилий на кромках оболочки.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Приближённое решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (5) и (7), будем искать в виде [11]

$$w(x, y, t) = \left(\sum_{k=1}^n f_k(t) \sin \lambda_k x \right) \sin \mu_1 y; \quad \lambda_k = k\pi/a, \quad \mu_1 = \pi/b, \quad (9)$$

Подставив (9) в (4), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции F . Решение указанного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям (6) и (8) при $n = 2$, представляется в виде:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) = Eh & \left[\frac{\lambda_1^2 \sin(\lambda_1 x) \sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{11}} f_1(t) + \right. \\ & + \frac{(\mu_1^4 \cos(\lambda_2 x) + \lambda_1^4 \cos(\mu_2 y))}{2\lambda_4^2 \mu_1^2} f_1^2(t) + \\ & + \frac{\lambda_2^2 \sin(\lambda_2 x) \sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{21}} f_2(t) + \frac{(\mu_1^4 \cos(\lambda_4 x) + \lambda_2^4 \cos(\mu_2 y))}{2\lambda_4^2 \mu_2^2} f_2^2(t) + \\ & + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} (\cos(\lambda_3 x) - 9 \cos(\lambda_1 x) + \\ & \left. + \lambda_3^4 \left(\frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}} - \frac{\cos(\lambda_3 x)}{9\Delta_{32}} \right) \cos(\mu_2 y) f_1(t) f_2(t) \right) \right] \equiv F_2(x, y, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичным образом определяется $F(x, y, t)$ при $n = 3$ и $n = 4$. Выражение функции напряжения F при трёхчленной аппроксимации имеет вид:

$$\begin{aligned}
F(x, y, t) = & F_2(x, y, t) + Eh \left[\frac{\mu_1^2}{\lambda_8^2} (\cos(\lambda_4 x) - 4 \cos(\lambda_2 x)) + \right. \\
& + \lambda_2^4 \left(\frac{\cos(\lambda_2 x)}{\Delta_{12}} - \frac{\cos(\lambda_4 x)}{4\Delta_{21}} \right) \cos(\mu_2 y) f_1(t) f_3(t) + \\
& + \frac{\mu_1^2}{\lambda_{10}^2} \left(\cos(\lambda_5 x) - 25 \cos(\lambda_1 x) \right. \\
& \left. \left. + \lambda_5^4 \left(\frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}} - \frac{\cos(\lambda_5 x)}{25\Delta_{51}} \right) \cos(\mu_2 y) f_2(t) f_3(t) \right) \right] \equiv \\
& \equiv F_3(x, y, t)
\end{aligned} \tag{11}$$

При четырёхчленной аппроксимации для F получается следующее представление:

$$\begin{aligned}
F(x, y, t) = & F_3(x, y, t) + Eh \left[\frac{\mu_1^2}{\lambda_{30}^2} (9 \cos(\lambda_5 x) - 25 \cos(\lambda_3 x) + \right. \\
& + \lambda_{15}^4 \left(\frac{\cos(\lambda_3 x)}{9\Delta_{32}} - \frac{\cos(\lambda_5 x)}{25\Delta_{52}} \right) \cos(\mu_2 y) \left. \right) f_1(t) f_4(t) + \\
& + \frac{\mu_1^2}{\lambda_{12}^2} \left(\cos(\lambda_6 x) - 9 \cos(\lambda_2 x) + \right. \\
& + \lambda_3^4 \left(\frac{\cos(\lambda_2 x)}{\Delta_{11}} - \frac{\cos(\lambda_6 x)}{9\Delta_{31}} \right) \cos(\mu_2 y) \left. \right) f_2(t) f_4(t) + \\
& + \frac{\mu_1^2}{\lambda_{14}^2} \left(\cos(\lambda_7 x) - 49 \cos(\lambda_1 x) + \right. \\
& \left. + \lambda_7^4 \left(\frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}} - \frac{\cos(\lambda_7 x)}{49\Delta_{72}} \right) \cos(\mu_2 y) \right) f_3(t) f_4(t) \left. \right],
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{Eh} (\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2.$$

Для определения $f_i(t)$ воспользуемся уравнением (3). Подставляя (9) и найденное выражение для F при $n=2$ в (3) и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций $x_1 = f_1(t)/h$, $x_2 = f_2(t)/h$,

получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [5,11,20,21]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} k v x_2 + k v^2 \left[\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + v x_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2) \right] + \\ + Q x_1 (\gamma_{11} x_1^2 + \gamma_{12} x_2^2) + L (\delta_{11} x_1^2 + \delta_{12} x_2^2) = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma_2^2 x_2 + \frac{2}{3} k v x_2 + k v^2 \left[\alpha_{21} x_1 x_2 + v x_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2) \right] + \\ + Q x_2 (\gamma_{21} x_1^2 + \gamma_{22} x_2^2) + L \delta_{21} x_1 x_2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$, введены обозначения

$$\begin{aligned} k = \frac{4\mathfrak{a}p_\infty}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{4}{16\rho_0 \omega_1^2}, \quad L = \frac{1}{\rho_0 h \omega_1^2}, \\ v = M \frac{h}{a}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} (\varepsilon + \varepsilon_a), \end{aligned} \quad (14)$$

а также коэффициенты α_{ik} и β_{ik} , учитывающие аэродинамическую нелинейность

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \frac{2}{9} (\mathfrak{a} + 1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45} (\mathfrak{a} + 1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45} (\mathfrak{a} + 1), \\ \beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40} (\mathfrak{a} + 1), \quad \beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70} (\mathfrak{a} + 1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70} (\mathfrak{a} + 1), \end{aligned} \quad (15)$$

и коэффициенты γ_{ik} и δ_{ik} , учитывающие геометрическую нелинейность

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = Eh (\lambda_1^4 + \mu_1^4), \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 4\gamma_{11} + \frac{81\lambda_1^4 \mu_1^4}{\Delta_{12}} + \frac{\lambda_1^4 \mu_1^4}{\Delta_{22}}, \quad \gamma_{22} = Eh (\lambda_2^4 + \mu_1^4), \\ \delta_{11} = -\frac{8\lambda_1^2 \mu_1^4}{3\pi^2} \frac{h}{R} \left(\frac{Eh}{\lambda_2^2} + \frac{4\lambda_1^2}{\Delta_{11}} \right), \quad \delta_{12} = -\frac{32\lambda_1^2 \mu_1^4}{15\pi^2} \frac{h}{R} \left(\frac{Eh}{\lambda_4^2} + \frac{12\lambda_1^2}{\Delta_{21}} \right), \\ \delta_{21} = -\frac{8\lambda_1^2 \mu_1^4}{3\pi^2} \frac{h}{R} \left(\frac{8Eh}{15\lambda_2^2} + \frac{16\lambda_1^2}{5\Delta_{11}} + \frac{\lambda_1^2}{\Delta_{12}} + \frac{16\lambda_2^2}{5\Delta_{21}} + \frac{\lambda_3^2}{15\Delta_{32}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В (13) v – приведённый параметр скорости, χ – приведённый параметр демпфирования, ω_i – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулами:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\rho h} \left[D (\lambda_i^2 + \mu_i^2)^2 + \frac{\lambda_i^4}{R^2 \Delta_{i1}} \right] \quad (i = 1, 2). \quad (17)$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (13) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра v).

Выведены также системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случаях $n=3$ и $n=4$, они получились довольно громоздкими для аналитического исследования и здесь не приводятся. Они в дальнейшем будут использованы при решении линейной задачи и при численных исследованиях.

3. Решение линейной задачи

Решению нелинейной задачи, как правило, будет предшествовать анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти критическое значение параметра $v = v_{cr}$ (следовательно, и критическое значение скорости обтекающего потока $u_{cr} = ah^{-1}v_{cr}a_{\infty}$ или критическое значение числа Маха $M_{cr} = ah^{-1}v_{cr}$), при котором невозмущенное состояние оболочки становится неустойчивым относительно малых возмущений, и б) указанное критическое значение u_{cr} (или M_{cr} или v_{cr}), будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке.

Итак, соответствующая (13) линейная система имеет вид:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}kvx_2 = 0, \quad \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma_2^2x_2 + \frac{2}{3}kvx_1 = 0. \quad (18)$$

Представляя решение системы (18) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda\tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda\tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^4 + 2\chi\lambda^3 + (\gamma_2^2 + 1 + \chi^2)\lambda^2 + \chi(\gamma_2^2 + 1)\lambda + \gamma_2^2 + \frac{4}{9}k^2v^2 = 0.$$

Невозмущенная форма оболочки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица [23], записываются в виде:

$$\chi > 0, \quad \chi(1 + \gamma_2^2) > 0, \quad (\gamma_2^2 - 1)^2 + 2\chi^2(1 + \gamma_2^2) - \frac{16}{9}k^2v^2 > 0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства следует, что в случае малых значений v , все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w \equiv 0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям.

Значение параметра $v = v_{cr}$, при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому, из третьего неравенства получается

следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости оболочки [11,28]:

$$v_{cr} = \frac{3}{4} \frac{\gamma_2^2 - 1}{k} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma_2^2 + 1)}{(\gamma_2^2 - 1)^2}}. \quad (19)$$

Принимая $v = v_{cr}$ из характеристического уравнения, найдём следующее значение θ_{cr} частоты колебания оболочки при линейном флаттере ($\lambda_{cr} = \pm i\theta_{cr}$)

$$\theta_{cr}^2 = \frac{1}{2}(\gamma_2^2 + 1). \quad (20)$$

Формулы, аналогичные (19) и (20), получены многими авторами (см. литературу, приведённую в [11,28]) и являются первыми приближениями для v_{cr} и θ_{cr} .

Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случаях $n = 3$ и $n = 4$ имеют вид:

в случае трёхчленной аппроксимации ($n = 3$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} k v x_2 &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{2}{3} k v x_1 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{6}{5} k v x_3 &= 0, \\ \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_3}{d\tau} + \frac{6}{5} k v x_2 + \gamma_3^2 x_3 &= 0; \end{aligned} \quad (21)$$

в случае четырёхчленной аппроксимации ($n = 4$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} k v x_2 - \frac{4}{15} k v x_4 &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{2}{3} k v x_1 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{6}{5} k v x_3 &= 0, \\ \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_3}{d\tau} + \frac{6}{5} k v x_2 + \gamma_3^2 x_3 - \frac{12}{7} k v x_4 &= 0, \\ \frac{d^2 x_4}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_4}{d\tau} + \frac{4}{15} k v x_1 + \frac{12}{7} k v x_3 + \gamma_4^2 x_4 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1}, \quad \omega_i^2 = \frac{1}{\rho h} \left[D(\lambda_i^2 + \mu_1^2)^2 + \frac{\lambda_i^4}{R^2 \Delta_{i1}} \right] \quad (i = 3, 4).$$

Аналогично случаю $n = 2$ в случае $n = 3$ получаются следующие условия устойчивости (для определения критического значения параметра скорости v):

$$\begin{aligned} \chi > 0, -\alpha_{11}(k^2v^2) + \alpha_{12} > 0, -\alpha_{21}(k^2v^2)^2 - \alpha_{22}(k^2v^2) + \alpha_{13} > 0, \\ -\alpha_{31}(k^2v^2)^3 - \alpha_{31}(k^2v^2)^2 - \alpha_{32}(k^2v^2) + \alpha_{33} > 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где выражения для коэффициентов α_{ij} являются довольно громоздкими и здесь не приводятся.

Таким же образом получены также условия устойчивости при $n = 4$. Они также достаточно громоздки и здесь не приводятся. Полученные при различных n условия устойчивости исследованы численно и результаты (значения критической скорости v_{cr}) приведены в табл. 1.

Таблица 1.

h/a	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$b=a, R=5a$			
1/100	0.494	0.392	0.498
1/200	0.043	0.03	0.044
1/300	0.017	0.008	0.019
$b=a, R=30a$			
1/100	0.166	0.243	0.221
1/200	0.011	0.018	0.015
1/300	0.002	0.005	0.003
$b=2a, R=10a$			
1/100	0.149	0.153	0.148
1/200	0.008	0.01	0.009
1/300	0.002	0.002	0.002
$b=10a, R=20a$			
1/100	0.117	0.151	0.146
1/200	0.01	0.007	0.009
1/300	0.002	0.002	0.002

Приведённые численные вычисления показывают, что когда оболочка достаточно тонкая и $b/a > 1$, то можно ограничиваться случаем $n = 2$. Аналогичное утверждение приведено также в работах [13,14].

4. Исследование нелинейной задачи

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (13). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости тонких пластин наличием членов с квадратичными нелинейностями, имеющие как аэродинамическое так и геометрическое происхождение. Указанные члены характеризуют несимметричность нелинейности и, поэтому, приближенное периодическое решение системы (13), следуя работам [5,16], будем искать в виде

$$x_1 = A_1 \cos \theta\tau + B_1 \sin \theta\tau + C_1 + \dots, \quad x_2 = A_2 \cos \theta\tau + B_2 \sin \theta\tau + C_2 + \dots \quad (24)$$

Здесь A_i , B_i , C_i и $\theta = \omega\omega_1^{-1}$ ($i = 1, 2$) – неизвестные постоянные; ω – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (24) отличается от существующих [10,11] наличием свободных членов $C_i \neq 0$, присутствие которых даёт возможность учитывать влияния квадратичной нелинейности.

Подставим решение (24) в систему (13) и приравняем к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos \theta\tau$ и $\sin \theta\tau$ (члены, содержащие гармоники пренебрегаются). Получающаяся при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается, что [5]: а) затухание системы достаточно мало ($\chi|B_i| \ll |A_i|$, $|B_i| \ll |A_i|$; ($i = 1, 2$)), и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущённого ($|A_j| \gg |C_j|$; $j = 1, 2$). Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведения величин B_1 , B_2 , C_1 и C_2 , указанная нелинейная система представится следующими подсистемами: уравнения, полученные приравнением к нулю свободных членов –

$$\begin{aligned}
C_1 - \frac{2}{3}kvC_2 + \frac{1}{2}kv^2(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2) + kv^3A_2(\beta_{11}A_1C_1 + \beta_{12}A_2C_2) + \\
+ \frac{1}{2}kv^3C_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + QA_1(\gamma_{11}A_1C_1 + \gamma_{12}A_2C_2) + \\
+ \frac{1}{2}QC_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) + \frac{1}{2}L(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2) = 0, \\
\gamma^2C_2 + \frac{2}{3}kvC_1 + \frac{1}{2}kv^2\alpha_{21}A_1A_2 + kv^3A_1(\beta_{21}A_1C_1 + \beta_{22}A_2C_2) + \\
+ \frac{1}{2}kv^3C_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + QA_2(\gamma_{21}A_1C_1 + \gamma_{22}A_2C_2) + \\
+ \frac{1}{2}QC_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) + \frac{1}{2}L\delta_{12}A_1A_2 = 0;
\end{aligned} \tag{25}$$

уравнения, полученные приравнением к нулю коэффициентов при $\cos \theta\tau$ –

$$\begin{aligned}
(1-\theta^2)A_1 + \chi\theta B_1 - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2(\alpha_{11}A_1C_1 + \alpha_{12}A_2C_2) + \\
+ \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) + \\
+ 2L(\delta_{11}A_1C_1 + \delta_{12}A_2C_2) = 0,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma^2 - \theta^2)A_2 + \chi\theta B_2 + \frac{2}{3}kvA_1 + \alpha_{21}kv^2(A_1C_2 + A_2C_1) + \\
+ \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) + \\
+ L\delta_{12}(A_1C_2 + A_2C_1) = 0;
\end{aligned}$$

уравнения, полученные приравнением к нулю коэффициентов при $\sin \theta\tau$ –

$$\begin{aligned}
A_1(1-\theta^2) - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2(\alpha_{11}A_1C_1 + \alpha_{12}A_2C_2) + \\
+ \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) + \\
+ 2L(\delta_{11}A_1C_1 + \delta_{12}A_2C_2) = 0,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3}kvA_1 + kv^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) + \\
+ \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) + \\
+ L\delta_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) = 0.
\end{aligned}$$

Третья подсистема учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания, указанная подсистема имеет следующее приближённое решение:

$$B_1 \approx 0, \quad B_2 \approx 0 \quad \text{при } \chi \approx 0.$$

Пользуясь первой подсистемой, выразим C_1 и C_2 через A_1 и A_2 (см. (29)). Тогда, вторая подсистема, определяющая характеристики A_1 и A_2 амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров θ и v , при $\chi \approx 0$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
A_1(1-\theta^2) - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2\alpha_{11}A_1C_1 + 2kv^2\alpha_{12}A_2C_2 + \\
+ \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0,
\end{aligned} \tag{28}$$

$$A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3}kvA_1 + kv^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) + \\ + \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0$$

Здесь

$$C_1 = -Kv^2 \left[\left(L(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2) + \alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2 \right) \Delta_2 - \right. \\ \left. - (L\delta_{21} + \alpha_{21})A_1A_2\Delta_4 \right] / 2\Delta \\ C_2 = -Kv^2 \left[(L\delta_{21} + \alpha_{21})A_1A_2\Delta_1 - L(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2) + \right. \\ \left. + (\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_3 \right] / 2\Delta \quad (29)$$

где

$$\Delta_1 = 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + Kv^3\beta_{11}A_1A_2, \\ \Delta_2 = \gamma^2 + Kv^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2, \\ \Delta_3 = \frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2, \\ \Delta_4 = -\frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2, \quad \Delta = \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4.$$

Отметим, что если v находится в достаточно малой окрестности v_{cr} , то $A_1 \approx -A_2$. Действительно, из третьей подсистемы после линеаризации (учитывая достаточную малость затухания) получается

$$(1 - \theta^2)B_1 - \frac{2}{3}kvB_2 - \chi\theta A_1 = 0, \quad (\gamma^2 - \theta^2)B_2 + \frac{2}{3}kvB_1 - \chi\theta A_2 = 0. \quad (30)$$

Имея в виду, что на границе области флаттера $v = v_{cr}$ и $\theta = \theta_{cr}$, из (25), (26) и (30) находим

$$\chi\theta_{cr}A_1 = \frac{1 - \gamma^2}{2}(B_1 + B_2), \quad -\chi\theta_{cr}A_2 = \frac{1 - \gamma^2}{2}(B_1 + B_2).$$

Следовательно $A_1 \approx -A_2$, если v достаточно близок к v_{cr} и θ к θ_{cr} . Отметим также, что исследования, проведённые в [6,7,11], базированы на приближённом равенстве $A_1 \approx -A_2$. Такое заключение содержится также в [10].

Исследуем нелинейную систему (28), решая её численно при следующих исходных данных: $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\mu = 0.34$; $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (дюралюминий), $\alpha = 1.4$; $\rho_\infty = 1.29 \text{ кг/м}^3$; $a_\infty = 340.29 \text{ м/с}$ (воздух). Исследована зависимость

амплитуды установившихся флаттерных колебаний A в точке $(a/2, b/2, 0)$ оболочки (в рассматриваемом случае $A = A_1$) от параметра v , характеризующий скорость набегающего потока при различных значениях геометрических параметров $R/a, h/a, a/b$ и частоты θ .

Численные исследования, приведённые в [6,7], в случае прямоугольных пластин показывают, что отношение h/a имеет существенное влияние (как качественное, так и количественное) на характер зависимости амплитуда-скорость $A(v)$. Поэтому, здесь также случаи сравнительно толстых и достаточно тонких оболочек рассматриваются отдельно. Для простоты и наглядности здесь рассматриваются нелинейные флаттерные колебания с частотой $\theta < \theta_{cr}$. Для остальных θ будет отдельное исследование.

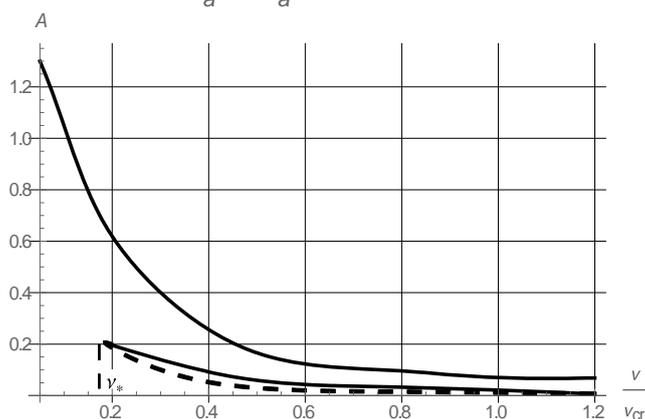
4.1. Влияние сверхзвукового потока на характер зависимости $A(v)$ при достаточно толстых оболочках

Результаты численного решения системы (15) при фиксированных $\theta < \theta_{cr}$, $a = 70h$ и различных значениях геометрических параметров $R/a, b/a$, представляющие зависимость значения амплитуды флаттерных колебаний от параметра скорости v , приведены на фиг. 1–5. На основе этого легко обнаружить, что установившиеся флаттерные колебания разного характера (как однозначность, так и многозначность зависимости $A(v)$, существование областей изменения v , в которых невозможно возбудить флаттерные колебания и т.д.) возможны как при докритических скоростях потока ($v < v_{cr}$), так и послекритической стадии ($v > v_{cr}$). Аналогичный результат в качественном смысле было получено в наших работах [6,7], посвящённых флаттеру прямоугольных пластин. Характер функции $A(v)$ в случае прямоугольных пластин на основе приближённого равенства $A_1 \approx -A_2$ детально исследовано в работах [10,11]. В этих работах установлено, что при конкретно выбранных параметрах задачи можно возбудить флаттерные колебания либо только при послекритических скоростях (где $A(v)$ является монотонно возрастающей функцией в области $v > v_{cr}$), либо только при докритических скоростях (где $A(v)$ является монотонно убывающей функцией в области $v < v_{cr}$). Причинами отмеченного расхождения по всей вероятности являются учёт квадратичной аэродинамической нелинейности и отказ от предположения $A_1 \approx -A_2$.

Приведенные фиг.1–5 показывают также, что для произвольно выбранных значений геометрических параметров задачи изменение частоты θ имеет существенное как качественное, так и количественное влияние на зависимость амплитуда-скорость. А именно:

- если $b/a < 1$ и θ достаточно меньше θ_{cr} , то существует такое значение скорости обтекающего потока v_* , что при $v \in [0, v_*]$ функции $A(v)$ являются однозначной и монотонно убывающей, а при $v > v_*$ она является трёхзначной и её поведение аналогично случаю, когда $v \in (0, v_*)$ (фиг.1).

$$\frac{R}{a}=0.5, \quad \frac{b}{a}=0.3, \quad \theta=0.2 \theta_{cr}$$



Фиг.1. График функции $A(v)$ для относительно малых значений частоты θ и R/a

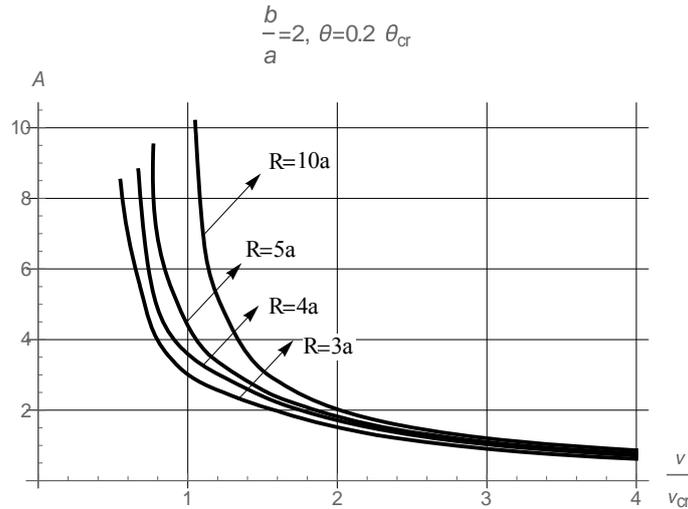
Таблица 2. Значение амплитуды флаттерных колебаний при $b = a$, $\theta = 0.2\theta_{cr}$

v/v_{cr}	$R/a=1$	$R/a=2$	$R/a=3$	$R/a=4$	$R/a=5$
0.2	6.38189	—	—	—	—
0.4	3.24185	9.54353	—	—	—
0.6	2.23344	3.54653	8.358	20.4917	—
0.8	1.59198	3.04073	1.93813	2.48484	6.14789
1	1.19275	2.52427	1.63909	2.00512	4.08441
1.2	0.931257	2.09655	1.39422	1.70755	3.3233
1.4	0.751039	1.76075	1.19457	1.46998	2.78953
1.6	0.621387	1.49839	1.03444	1.27875	2.38404
1.8	0.524768	1.29155	0.906032	1.12461	2.068
2	0.450648	1.12635	0.802285	0.94577	1.81703

- Характер функции $A(v)$ в зависимости от параметра кривизны R/a при $b/a \geq 1$ приведён на фиг.2 и в табл. 2. Они показывают, что: а) значения функции $A(v)$ при фиксированном v монотонно возрастают в зависимости от R/a . Более того, расчёты показывают, что с увеличением значения как геометрических параметров b/a и R/a , так и частоты θ величины скорости v_* увеличиваются (фиг.2); б)

при малых значениях параметра θ функция $A(\nu)$ является однозначной, монотонно убывающей функцией. В этих случаях, при фиксированных b/a с увеличением R/a значение амплитуды увеличивается (табл. 2, фиг.2);

Отметим, что в табл. 2 знак «-» означает, что система (28) имеет только тривиальное решение.



Фиг.2. График функции $A(\nu)$ в зависимости от R/a при малых частотах

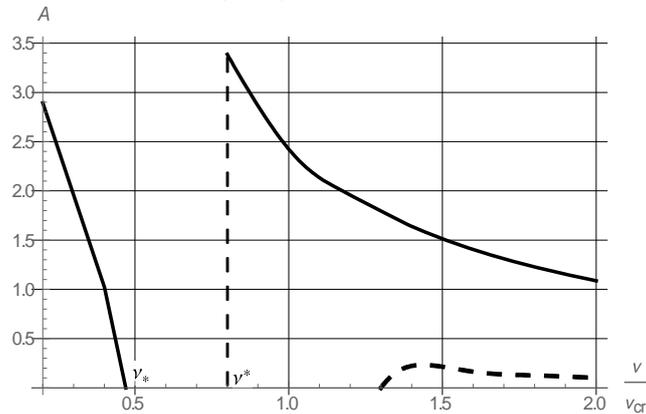
Фиг. 3 и 4 указывают влияние параметра b/a на поведение функции $A(\nu)$.

- при сравнительно больших значениях частоты θ и параметра R/a характер функции $A(\nu)$ существенно меняется. Здесь в зависимости от b/a , в основном, имеют место следующие два случая: 1) если отношение b/a порядка единицы, то: а) существует интервал $[0, \nu_*]$ изменения ν , где $A(\nu)$ является однозначной монотонно убывающей функцией, б) существует такое определённое значение $\nu^* > \nu_*$, что в интервале $[\nu_*, \nu^*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), в) при $\nu = \nu^*$ значение амплитуды скачком возрастает до определённого конечного значения, а при $\nu > \nu^*$ устойчивая ветвь зависимости $A(\nu)$ является монотонно убывающей функцией (фиг.3);

2) если же $b/a \leq 0.5$, то: а) существует интервал $[0, \nu_*]$, где $A(\nu)$ является однозначной функцией, которая имеет точку минимума, б) существует значение ν^* такое, что в интервале $[\nu_*, \nu^*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), в) при $\nu = \nu^*$ значение амплитуды скачком возрастает до

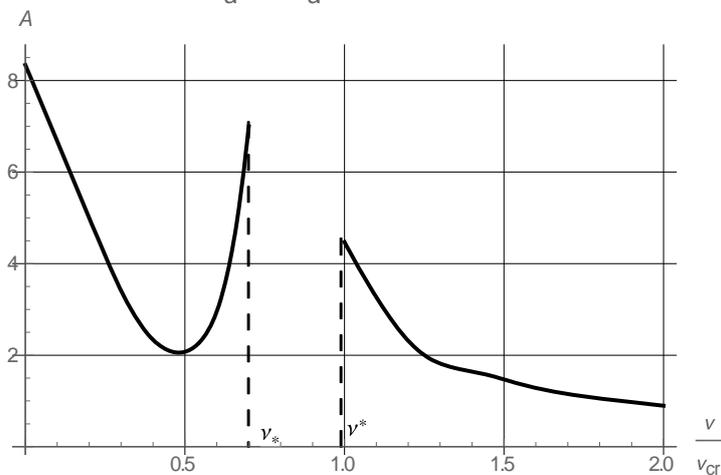
определённого конечного значения, а при $\nu > \nu^*$ зависимость $A(\nu)$ является однозначной, монотонно убывающей функцией (фиг.4);

$$\frac{b}{a}=1, \frac{R}{a}=5, \theta=0.7 \theta_{cr}$$



Фиг.3. График функции $A(\nu)$ при сравнительно больших значениях частоты θ и параметра R/a (случай первый)

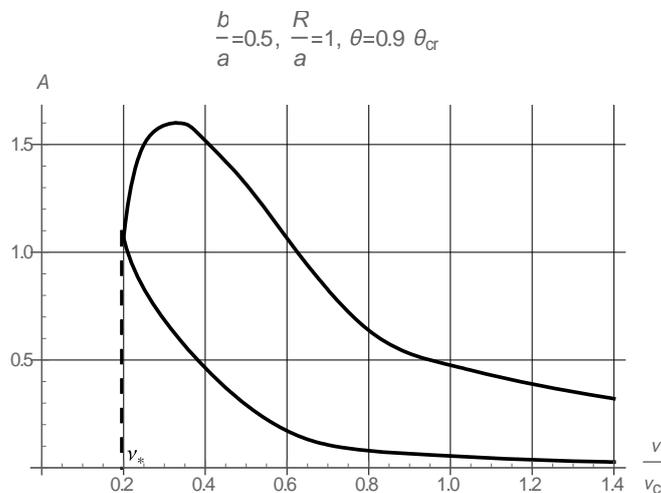
$$\frac{b}{a}=0.5, \frac{R}{a}=5, \theta=0.7 \theta_{cr}$$



Фиг.4. График функции $A(\nu)$ при сравнительно больших значениях частоты θ и параметра R/a (случай второй)

Фиг.3 и 4 указывают влияние параметра b/a на поведение функции $A(\nu)$.

- при частотах колебаний θ , близких к θ_{cr} и в зависимости от геометрических параметров оболочки существует определённое значение v_* параметра v ($v_* < v_{cr}$), что: а) при $v \in [0, v_*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), при $v = v_*$ значение амплитуды скачком возрастает до определённого конечного значения, после чего функция $A(v)$ является двухзначной, одна ветвь которой убывает, а вторая имеет точку максимума (фиг.5);



Фиг.5. График функции $A(v)$ при $R/a < 1$ и при частотах, близких к θ_{cr}

Вычисления показывают также, что с увеличением R/a значение амплитуды флаттерных колебаний увеличивается.

4.2. Влияние сверхзвукового потока на характер нелинейных колебаний при тонких и достаточно тонких оболочках

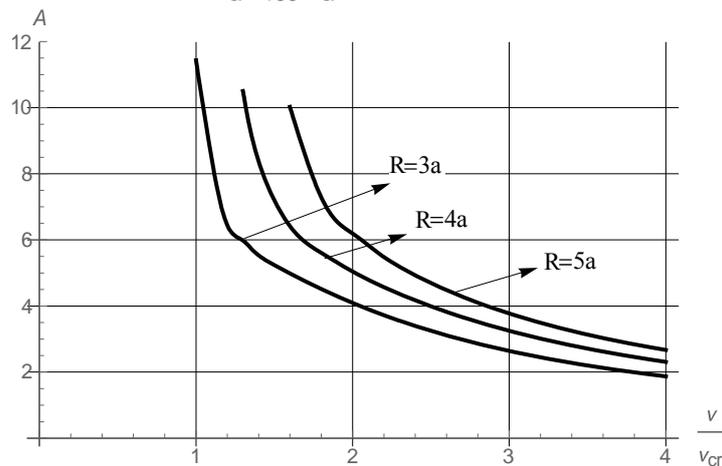
Здесь также приведены численные исследования характера функции $A(v)$ от параметров θ , R/a и b/a при фиксированных различных h/a . Результаты численных решений приведены на фиг. 6 –11, которые показывают, что зависимость $A(v)$ в случае тонких пологих оболочек имеет новые представления по сравнению со случаем толстых оболочек.

Приведём некоторые из них:

- при малых значениях параметра θ существует значение обтекающего потока v_* такое, что а) область $v < v_*$ является зоной молчания; б) при $v > v_*$ зависимость «амплитуда-скорость» является однозначной монотонно убывающей функцией,

аналогичной соответствующей зависимости, полученной при толстых оболочках; в) с увеличением значения параметра R/a , как и в случае толстых оболочек, величина v_* увеличивается (фиг.6). Отметим, что при сравнительно малых R/a возможен случай, когда $v_* < v_{cr}$;

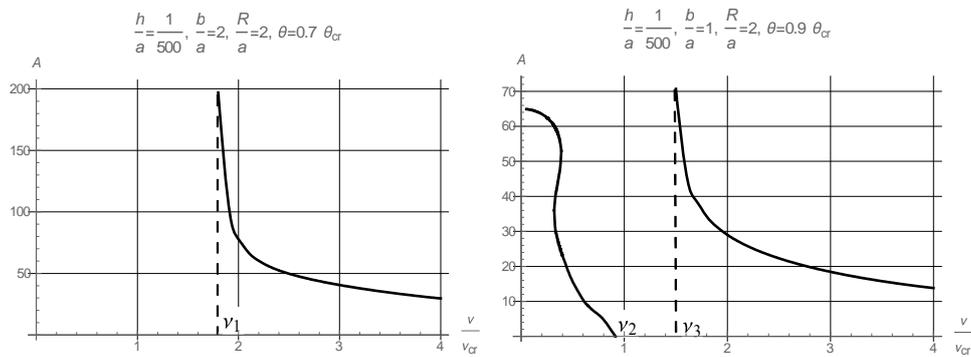
$$\frac{h}{a} = \frac{1}{100}, \frac{b}{a} = 2, \theta = 0.2 \theta_{cr}$$



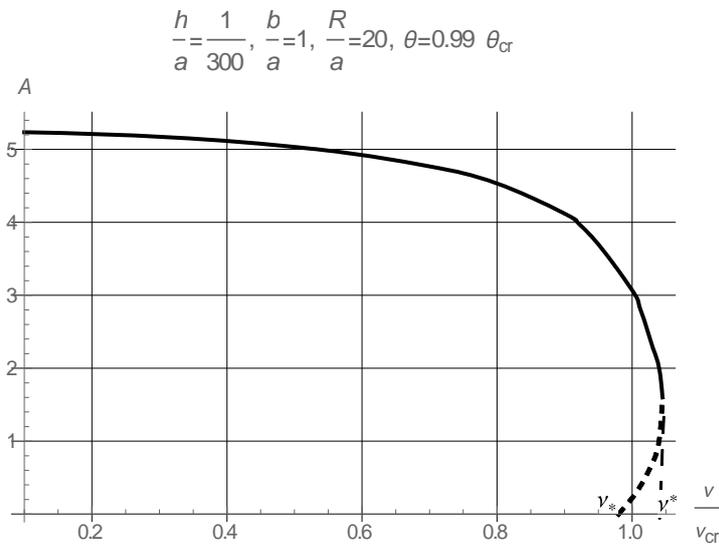
Фиг.6. График функции $A(v)$ в случае сравнительно тонких оболочек при малом значении θ/θ_{cr}

- с увеличением частоты θ картина зависимости амплитуды нелинейных флаттерных колебаний оболочки от скорости набегающего потока меняется. Характер функции $A(v)$ для достаточно тонких оболочек и для разных θ приведён на фиг.7, который показывает, что а) с увеличением частоты колебаний θ , ширина зоны молчания, примыкающей к области малых скоростей ($v \in (0, v_1)$), уменьшается и занимает область $v \in (v_2, v_3)$, б) при $0 < v < v_2$ функция $A(v)$, будучи монотонно убывающей, может быть как однозначной, так и двузначной, г) если $v > v_3$, то $A(v)$ – монотонно убывающая функция. Фиг.6 и 7 показывают, что уменьшение относительной толщины оболочки (как и следовало ожидать) приводит к существенному увеличению амплитуды и возможности возбуждения флаттерных колебаний как при докритических скоростях, так и послекритических.
- при частотах, близких к θ_{cr} и достаточно больших R/a , характер функции $A(v)$ существенно меняется. В этом случае, если постепенно увеличить скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определённого значения скорости потока v^* , где колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущённое состояние оболочки. При снижении скорости невозмущённое

состояние является устойчивым, пока $v > v_*$, где $v_* < v^*$. При $v = v_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определённого значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает (фиг.8);



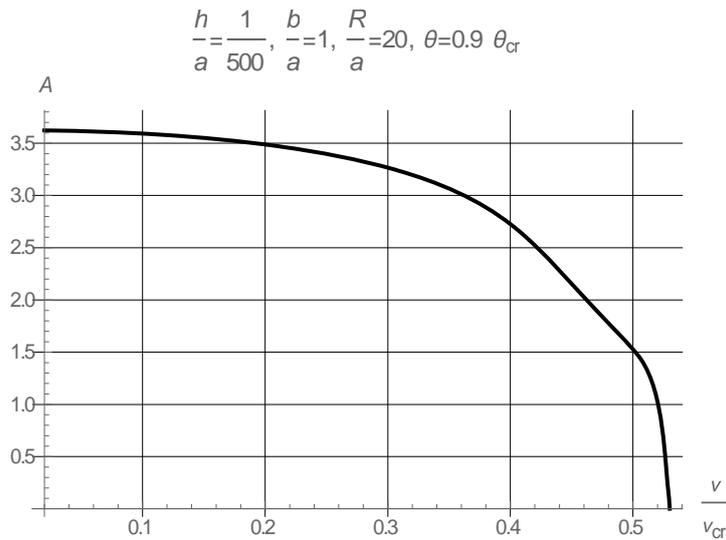
Фиг.7. График функции $A(v)$ для достаточно тонких оболочек при различных значениях частоты θ флаттерных колебаний



Фиг.8. Влияние параметра R/a на характер функции $A(v)$ при достаточно тонких оболочках

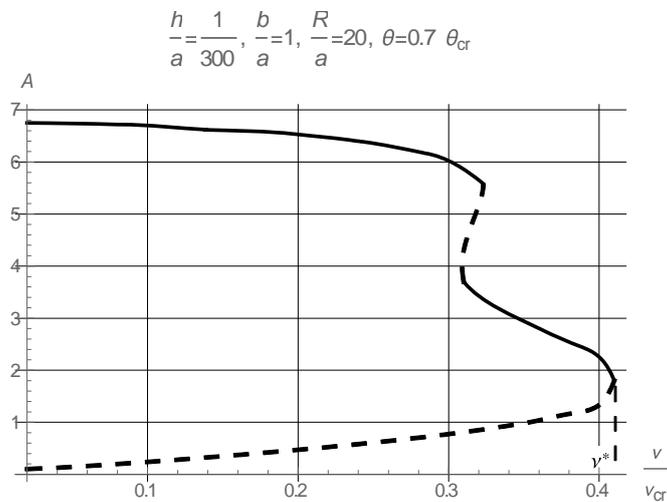
- с уменьшением относительной толщины оболочки существует значение $\bar{\theta}$, близкое к θ_{cr} , при котором $v_* = v^*$ и зависимость амплитуды колебаний от

скорости потока (функция $A(v)$) является однозначной и монотонно убывающей (фиг.9). Причем, такой характер ранее выявлен в [6-11], когда $A_2 \approx -A_1$;

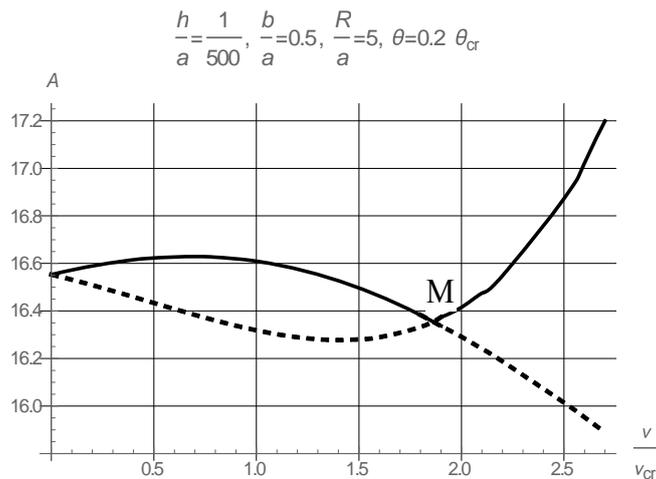


Фиг.9. График функции $A(v)$ при достаточно тонких оболочках, когда частота нелинейных колебаний близка к критической

- при достаточно тонких оболочек, у которых R/a достаточно велика, существует такое умеренное значение частоты θ , что возможен вариант зависимости $A(v)$, приведенный на Рис.10, который показывает, что устойчивая ветвь $A(v)$ является некоторым обобщением зависимостей представленных на рисунках 8 и 9;
- проведено численное исследование $A(v)$ в случае тонкой оболочки, когда частота флаттерного колебания достаточно мала и $b/a < 1$. Результаты расчётов приведены на фиг.11, который показывает возможность существования точки бифуркации (точка M).



Фиг.10. График функции $A(v)$ при достаточно тонких оболочках, когда частота нелинейных колебаний близка к критической



Фиг.11. График функции $A(v)$ для достаточно тонких оболочек при малых значениях параметра частоты θ

Таким образом (при фиксированной оболочке и газа), как существования различных типов зависимостей $A(v)$, точек бифуркации и областей молчания, так и переход из одной зависимости $A(v)$ к другой можно урегулировать оптимальным выбором параметра θ частоты колебаний.

5. Заключение

В статье рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной пологой цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Основным предметом исследования – изучение зависимости амплитуды установившихся флаттерных колебаний от скорости обтекающего потока. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейностей: аэродинамической и геометрической (как квадратичной, так и кубической). Благодаря учёту аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) установлено, что зависимость амплитуда-скорость в определённых интервалах изменения параметра скорости, является многозначной. Этот факт иллюстрирован на приведённых в тексте фигурах, в основном, в виде двух ветвей, нижние из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви отделяют области тяготения двух соседних устойчивых решений. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показаны существования определённых областей изменения величины скорости обтекающего потока, при которых: а) зависимость амплитуда-скорость может быть как однозначной, так и двухзначной, б) невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания (зоны молчания) как при докритических скоростях, так и в послекритической стадии, в) показана возможность существования точки бифуркации. Установлено, что как существования различных типов зависимостей амплитуда-скорость, точек бифуркации и областей молчания, так и переход из одной зависимости к другой можно урегулировать оптимальным выбором параметра частоты колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-2C149.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с. (Algazin S.D., Kiyko I.A. (2006) «Flutter plates and shells». Moscow, Nauka, 2006, 247p.) (in Russian)
2. Amabili M, Pellicano F. «Multimode approach to nonlinear supersonic flutter of imperfect circular cylindrical shells». //J. Appl. Mech. 2002; 69: 117–126.
3. Amabili M, Pellicano F. «Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells». //AIAA J. 200; 39: 564–73.
4. Ashley H., Zartarian C. «Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician». //Journ. Aeronaut. Sci. 23, №6, 1956.
5. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, №1, с.92-98. (Baghdasaryan, G.Y. (1961). «On stability of orthotropic shells in supersonic gas flow». //Izv.AN USSR. OTN. Mechanics and Engineering, vol.4, p.92-98.) (in Russian)
6. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. «On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions». //Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.
7. Г.Е. Багдасарян, М.А. Микилян, Р.О. Сагоян Нелинейный флаттер ортотропной прямоугольной пластинки. /В сб.: научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 2010, т.1, стр. 118-123.

- (Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. Saghoyan R.O. «Non-linear flutter of orthotropic rectangular plate», Collection of scientific papers of the international conference, Actual problems of continuum mechanics, 2010, V.1, pp.118-123.)(in Russian)
8. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. (2015). «Nonlinear LCO «amplitude–frequency» characteristics for plates fluttering at supersonic speeds» //International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 77, 51–60.
 9. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. «Behavior of Nonlinear Flutter-Type Oscillations of Flexible Plates in Supersonic Gas Flow». //Journal of Aerospace Engineering, 2017, 30(5).
 10. Болотин В.В., Гаврилов Ю.В., Макаров Б.П. и Швейко Ю.Ю. Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях. //Изв. АН СССР. ОТН. «Механика и машиностроение». 1959. № 3. С.3-14. (Bolotin V.V., Gavrilov Y.V., Makarov B.P., Schweiko Y.Y. «Nonlinear stability problem of flat panels at high supersonic speeds». Math. AN SSSR, OTN, Mechanics and Mechanical Engineering, №. 3, 1959, pp.3-14.)(in Russian)
 11. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.- М.: Физматгиз, 1961. -339 с. (Bolotin, V.V. (1963). «Non-conservative problems of the theory of elastic stability». 1st edition, 488 Corrected and Authorized edition, edited by G.Herrmann, Pergamon, New York, (translated from 489 Russian).)
 12. Carter L.L., Stearman R.O. «Some aspects of cylindrical shell panel flutter». //AIAA J. 1968; 6: 37–43.
 13. Dowell E.H. «Aeroelasticity of Plates and Shells». Leyden : Noordhoff International Publishing, 1975.
 14. Dowell E.H. «Panel flutter - A review of the aeroelastic stability of plates and shells». //AIAA Journal, Vol. 8, № 3 (1970), pp. 385-399.
 15. Fung Y.C. (1958) «On two-dimensional panel flutter». //Journ. Aeronaut. Sci. 25, № 3.
 16. Гнуні В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. //Изв. АН Арм.ССР, 13, №1, 1960, стр.29-36 (Gnuni V.Ts. «On the theory of dynamic stability of laminated anisotropic shallow shells». Proceedings of the AS of the Arm.SSR, 13, N1, 1960, pp.29-36.)(in Russian)
 17. Hedzhpert D. «Flutter rectangular simply supported panels at high supersonic speeds». Mechanics IL, №2. 1958. p.103-125.
 18. Илюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6. (Ilyushin A.A. «The law of plane cross sections at high supersonic speeds». //Appl. Math. Mech., vol. XX, № 6, 1956.) (in Russian)
 19. Johns D.J. «A Review of Panel Flutter at Low Supersonic Speeds». //The Aeronautical Journal, Vol. 69, Issue 657, September 1965, pp. 627-631.
 20. Kim D.-H., Lee I., Marzocca P., Librescu L., Schober S. «Nonlinear Aeroelastic Analysis of an Airfoil Using CFD-Based Indicjal Approach». //Journal of Aircraft, Vol. 42, №.5, September–October 2005, pp. 1340-1344.
 21. Marzocca P., Librescu L., Kim D.H., Lee I., Schober S. «Generalized Transonic Unsteady Aerodynamics via Computational-Fluid-Dynamics Indicjal Approach». //AIAA Journal, Vol. 43, № 4, April 2005, pp.915-921.
 22. Mei Chuh, Abdel-Motagaly K. and Chen R. «Review of Nonlinear Panel Flutter at Supersonic and Hypersonic Speeds». Appl. Mech. Rev 52(10), (Oct 01, 1999), 321-332
 23. Merkin D.P. «Introduction to the theory of stability of motion». М.: Nauka, 1971. 312p.
 24. Miles J. W. «Supersonic flutter of a cylindrical shell». //Journ. Aeronaut. Sci. 24, № 2 (1957); 25, № 5 (1958).

25. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. //ПММ. 1956. -Т.20.- Вып.2. С.211-222. (Movchan A.A. «Oscillations of a plate moving in a gas». //PMM. 1956. Vol.20, Issue 2, pp.211-222.)
26. Novichkov Y.N. «Flutter of plates and shells». Results of science and technology. Mechanics of deformable solids. М.: Nauka, 1978. Vol. 11, pp. 67-122.
27. Olson M.D. (1966) «Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells». Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology.
28. Швейко Ю.Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. //Изв. АН СССР. ОТН. 1960. №6, с.112-116. (Schweiko Y.Y. «Stability of circular cylindrical shell in a gas flow»./ Math. AN SSSR, OTN, 1960, №6, pp.112-116.)
29. Shen. S.F. «An Approximate Analysis of Nonlinear Flutter Problems». //Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 26, №1, 1959, pp.25-32.
30. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949. (Vlasov, V.Z. (1949). «The general theory of shells». Moscow, Gostekhizdat.) (in Russian)
31. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с. (Volmir, A.S. (1972). «Nonlinear dynamics of plates and shells». М.: Nauka. (in Russian).

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (010) 355308; E-mail: gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф.-м.н., доцент, старший научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (091) 191129; E-mail: mikilyan@rau.am

Варданян Ирэн Арменовна – внештатный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (077) 325313; E-mail: irena_123@bk.ru.

Поступила в редакцию 28.12.2018