ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №4, 2018 Механика

УДК 539.3

АРМИРОВАННЫЕ (ВОЛОКНИСТЫЕ) ТЕЛА И МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Саркисян С.О.

Ключевые слова: армированный, стержни, тел, моментная теория упругости, стеснённое вращение.

Սարգսյան Ս.Հ.

Ամրանավորված (թելիկավոր) մարմինները և առաձգականության մոմենտային տեսությունը

Հիմնաբառեր՝ ամրանավորված, ձողեր, մարմին, առաձգականության մոմենտային տեսություն, կաշկանդված պտույտներ

Աշխատանքում զարգացվում է ձողերով ամրանավորված մարմնի կառուցվածքային և կոնտինուալ մոդելների կառուցման Վ.Վ. Բոլոտինի տեսությունը (ընդհանուր վարիացիոն ֆունկցիոնալների կառուցմամբ): Այնուհետև կառուցվում է կաշկանդված պտույտներով առաձգականության մոմենտային այնպիսի մասնավոր տեսություն, որն ադեկվատ է արմավորված մարմինների կոնտինուալ տեսությանը:

Sargsyan S.H.

Reinforced (fibrous) bodies and moment theory of elasticity

Key words: reinforced beams, body, moment theory of elasticity, constrained rotations

In the present paper V.V. Bolotin's theory of construction of structural and continual models of reinforced by beams bodies is developed (with the construction of general variation functional). Further, private theory of moment theory of elasticity with constrained rotation is constructed, which is adequate to the continual theory of reinforced bodies.

В работе развивается теория В.В. Болотина построения структурной и континуальной моделей, армированных стержнями тел (с построением общих вариационных функционалов). Далее построена частная теория моментной упругости со стеснённым вращением, которая адекватна континуальной теории армированных тел.

Введение. Композитные конструкции, имеющие слоистую или волокнистую структуру, широко применяются в современной технике. В известных работах В.В.Болотина [1-3] построены структурные теории пластин, составленных из жёстких и мягких упругих слоёв в произвольной последовательности. В работах [4,5] построены континуальные теории многослойных пластин, когда число слоёв достаточно велико. В этих работах установлено, что уравнения континуальной теории многослойных пластин по своей математической структуре адекватны уравнениям моментной теории упругости [6-8]. Это означает [3-5], что континуальные теории многослойных пластин можно трактовать как структурно обоснованные реализации моментной теории упругости. В работах [3-5] не выясняется вопрос о том, конкретно какая частная моментная теория упругости адекватна построенной континуальной теории многослойных пластин. Этот вопрос изучен в работе [9], где построена частная моментная теория упругости со стеснённым вращением, которая адекватна континуальной теории многослойных пластин.

В работах [5,10] выводятся и исследуются уравнения равновесия и граничные условия континуальной теории упругих тел из однородного изотропного упругого материала, армированных большим количеством тонких упругих стержней и, здесь тоже показывается, что уравнения этой теории весьма близки к уравнениям моментной теории упругости [6-8]. В работах [5,10] тоже не рассматривается вопрос о том, какая именно частная моментная теория упругости соответствует построенной континуальной теории армированных сред. В работах [5,10] не приведены также основные уравнения и граничные условия структурной теории армированных таким образом тел.

В данной работе, во-первых, на основе предположений работ [5,10] построена структурная и континуальная теории армированных упругими стержнями тел и, во-вторых, построена частная моментная теория упругости со стеснённым вращением, которая адекватна континуальной теории армированных таким образом упругих сред.

1. Построение структурной теории для тел из однородного изотропного упругого материала, армированных тонкими упругими стержнями.

Будем называть среду волокнистой, если она получена путём армирования связующего материала системой параллельных стержней. Будем считать, что армирующие элементы имеют правильное расположение, образуя в сечении $x = \text{const}$ решётку с модулями s_y и s_z. Тогда, каждому армирующему элементу могут быть приписаны два индекса j и k ($j = 1,2,\ldots,m$, $k = 1,2,\ldots,n$). Будем опираться на предположения, которые приняты в основы работ [5, 10]. Состояние армированной среды определим путём задания $4mn$ функций независимой переменной x, отсчитываемой вдоль оси каждого элемента: $u^{(j.k)}(x)$, $v^{(j.k)}(x)$, $w^{(j.k)}(x)$, $\varphi^{(j.k)}(x)$. Первые три функции представляют собой перемещения точек оси стержня вдоль координатных осей, последняя функция является углом вращения сечения стержня вокруг его оси. Каждый армирующий элемент будем рассматривать как упругий стержень кругового сечения с одинаковым радиусом сечения r с конечной жёсткостью на растяжение, кручение и изгиб и с бесконечно большой жёсткостью на сдвиг (т.е. для армирующего элемента будем применять элементарную теорию, основанную на гипотезе плоских сечений [11]). Согласно элементарной теории стержней при совместном растяжении и изгибе, перемещение оси стержня с номером (j,k) будет выражаться формулой:

$$u^{(j.k)}(x,y,z) = u^{(j.k)}(x) + y_{(j,k)} \frac{dv^{(j,k)}_{(x)}}{dx} - z_{(j,k)} \frac{dw^{(j,k)}_{(x)}}{dx} \quad . \tag{1.1}$$

Для деформаций $\varepsilon_{11}^{(j,k)} = \dfrac{\partial u^{(j.k)}(x,y,z)}{\partial x}$ и напряжений $\sigma_{11}^{(j,k)} = E_a \cdot \varepsilon_{11}^{(j,k)}$ будем иметь:

$$\varepsilon_{11}^{(j,k)} = \Gamma_{11}^{(j,k)}(x) + y_{(j,k)} \cdot \chi_{31}^{(j,k)}(x) + z_{(j,k)} \cdot \chi_{21}^{(j,k)}(x) \tag{1.2}$$

$$\sigma_{11}^{(j,k)} = \tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)}(x) + y_{(j,k)} \cdot \mu_{31}^{(j,k)}(x) + z_{(j,k)} \mu_{21}^{(j,k)}, \tag{1.3}$$

где

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)} = E_a \cdot \Gamma_{11}^{(j,k)}(x), \quad \mu_{31}^{(j,k)} = E_a \cdot \chi_{31}^{(j,k)}(x), \quad \mu_{21}^{(j,k)} = E_a \cdot \chi_{21}^{(j,k)}(x) \tag{1.4}$$

$$\Gamma_{11}^{(j,k)} = \frac{du_{(x)}^{(j,k)}}{dx}, \quad \chi_{31}^{(j,k)} = \frac{d^2 v_{(x)}^{(j,k)}}{dx^2}, \quad \chi_{21}^{(j,k)} = -\frac{d^2 w_{(x)}^{(j,k)}}{dx^2}, \tag{1.5}$$

E_a – модуль упругости армирующего элемента.

Вычислим потенциальную энергию деформации армирующего элемента при совместном растяжении и изгибе:

$$U_{р.-из.}^{(j,к)} = \frac{1}{2}\iiint_{\upsilon_k} \sigma_{11}^{(j,k)} \cdot \varepsilon_{11}^{(j,k)} dxdydz =$$
$$= \frac{1}{2}\pi r^2 \int_0^{\ell} (\tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)} \cdot \Gamma_{11}^{(j,k)} + \frac{1}{4} r^2 \mu_{31}^{(j,k)} \cdot \chi_{31}^{(j,k)} + \frac{1}{4} r^2 \mu_{21}^{(j,k)} \cdot \chi_{21}^{(j,k)}) dx, \tag{1.6}$$

где ℓ – длина армирующих элементов (и одновременно размер тела в направлении оси x).

При кручении армирующего элемента вокруг оси x деформация сдвига определяется формулой [11]:

$$\gamma^{(j,k)} = \rho \frac{d\varphi^{(j,k)}}{dx}, \tag{1.7}$$

где $\varphi^{(j,k)} = \varphi^{(j,k)}(x)$ – угол закручивания, а ρ – текущий радиус в сечении стрежня ($0 \le \rho \le r$). Касательные напряжения в сечении стержня будут выражается так:

$$\tau^{(j,k)} = G_a \cdot \gamma^{(j,k)}, \tag{1.8}$$

где G_a – модуль сдвига армирующего элемента.

Примем следующие обозначения:

$$\chi_{11}^{(j,k)} = \frac{d\varphi^{(j,k)}(x)}{dx}, \quad \varphi^{(j,k)}(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{w^{(j+1,k)} - w^{(j,k)}}{s_y} - \frac{v^{(j,k+1)} - v^{(j,k)}}{s_z}\right], \tag{1.9}$$

$$\tau^{(j,k)} = \rho \cdot \mu_{11}^{(j,k)}, \tag{1.10}$$

$$\mu_{11}^{(j,k)} = G_a \cdot \chi_{11}^{(j,k)}. \tag{1.11}$$

Для потенциальной энергии армирующего элемента при кручении получим:

$$u_{кр}^{(j,к)} = \frac{1}{2}\iiint_{v_k} \tau^{(j,k)} \cdot \gamma^{(j,k)} dxdydz = \frac{1}{2}\pi r^2 \int_0^{\ell} G_a \cdot \frac{r^2}{2} \mu_{11}^{(j,k)} \cdot \chi_{11}^{(j,k)} dx. \tag{1.12}$$

Для полной потенциальной энергии деформации армирующего элемента при совместном растяжении, изгибе и кручении будем иметь:

$$u^{(j,k)} = \frac{1}{2}\pi r^2 \int_0^{\ell} \left(\tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)} \cdot \Gamma_{11}^{(j,k)} + \frac{1}{4} r^2 \mu_{31}^{(j,k)} \cdot \chi_{31}^{(j,k)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} r^2 \mu_{21}^{(j,k)} \cdot \chi_{21}^{(j,k)} + \frac{1}{2} r^2 G_a \mu_{11}^{(j,k)} \cdot \chi_{11}^{(j,k)} \right) dx. \tag{1.13}$$

Если принимать в виду формулы (1.4) и (1.11), формула (1.13) примет вид:

$$u^{(j,k)}=\frac{1}{2}\pi r^2\int\limits_0^{\ell}\left[E_a\cdot\left(\Gamma_{11}^{(j,k)}\right)^2+\frac{1}{4}r^2E_a\cdot\left(\chi_{31}^{(j,k)}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}r^2E_a\cdot\left(\chi_{21}^{(j,k)}\right)^2+\frac{1}{2}r^2G_a\cdot\left(\chi_{11}^{(j,k)}\right)^2\right]dx. \tag{1.14}$$

Потенциальная энергия деформации всех армирующих элементов будет:

$$U_a=\sum_j\sum_k U^{(j,k)}. \tag{1.15}$$

Согласно предположениям работ [5,10], для деформаций основного (связующего) материала имеем:

$$\varepsilon_{11}^{[j,k]}=\frac{du^{(j,k)}(x)}{dx}=\Gamma_{11}^{(j,k)},\qquad \varepsilon_{22}^{[j,k]}=\frac{v^{(j+1,k)}-v^{(j,k)}}{s_y},\quad \varepsilon_{33}^{[j,k]}=\frac{w^{(j,k+1)}-w^{(j,k)}}{s_z},$$
$$\varepsilon_{12}^{[j,k]}=\frac{dv^{(j,k)}}{dx}+\frac{u^{(j+1,k)}-u^{(j,k)}}{s_y},\qquad \varepsilon_{13}^{[j,k]}=\frac{dw^{(j,k)}}{dx}+\frac{u^{(j,k+1)}-u^{(j,k)}}{s_z}, \tag{1.16}$$
$$\varepsilon_{23}^{[j,k]}=\frac{w^{(j+1,k)}-w^{(j,k)}}{S_s}+\frac{v^{(j,k+1)}-v^{(j,k)}}{s_z}.$$

Компоненты тензора напряжений в основном материале определяются через компоненты деформации (1.16) при помощи обобщённого закона Гука [12]:

$$\sigma_{11}^{[j,k]}=\lambda_c\cdot\theta^{[j,k]}+2\mu_c\cdot\varepsilon_{11}^{[j,k]},\qquad \sigma_{22}^{[j,k]}=\lambda_c\cdot\theta^{[j,k]}+2\mu_c\cdot\varepsilon_{22}^{[j,k]},$$
$$\sigma_{33}^{[j,k]}=\lambda_c\cdot\theta^{[j,k]}+2\mu_c\cdot\varepsilon_{33}^{[j,k]}, \tag{1.17}$$
$$\sigma_{12}^{[j,k]}=\mu_c\cdot\varepsilon_{12}^{[j,k]},\quad \sigma_{13}^{[j,k]}=\mu_c\cdot\varepsilon_{13}^{[j,k]},\quad \sigma_{23}^{[j,k]}=\mu_c\cdot\varepsilon_{23}^{[j,k]}, \tag{1.18}$$

где $\theta^{[j,k]}=\varepsilon_{11}^{[j,k]}+\varepsilon_{22}^{[j,k]}+\varepsilon_{33}^{[j,k]}$, λ_c и μ_c – коэффициенты Ламе основного материала.

Потенциальная энергия деформации основного материала определяется по формуле [12]:

$$\frac{1}{2}\sum_j\sum_k\int\limits_0^{\ell}\left\{\lambda_c\left(\varepsilon_{11}^{[j,k]}+\varepsilon_{22}^{[j,k]}+\varepsilon_{33}^{[j,k]}\right)^2+2\mu_c\left[\left(\varepsilon_{11}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{22}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{33}^{[j,k]}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\mu_c\left[\left(\varepsilon_{23}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{13}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{12}^{[j,k]}\right)^2\right]\right\}dx \tag{1.19}$$

Для полной потенциальной энергии деформации армированного тела с учётом степени армирования тела (т.е. при помощи коэффициента относительного армирования α) получим:

$$U=\frac{1}{2}\sum_j\sum_k\int\limits_0^{\ell}\left\{\lambda_c\left(\varepsilon_{11}^{[j,k]}+\varepsilon_{22}^{[j,k]}+\varepsilon_{33}^{[j,k]}\right)^2+2\mu_c\left[\left(\varepsilon_{11}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{22}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{33}^{[j,k]}\right)^2\right]+\right.$$

$$+\mu_c\left[\left(\varepsilon_{23}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{13}^{[j,k]}\right)^2+\left(\varepsilon_{12}^{[j,k]}\right)^2\right]\Bigg\}dx+ \tag{1.20}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_j\sum_k\int_0^\ell\alpha\left[E_a\cdot(\Gamma_{11}^{(j,k)})^2+\frac{1}{4}r^2E_a\cdot(\chi_{31}^{(j,k)})^2+\frac{1}{4}r^2E_a\cdot(\chi_{21}^{(j,k)})^2+\frac{1}{2}r^2G_a\cdot(\chi_{11}^{(j,k)})^2\right]dx$$

2. Общий вариационный принцип. Основные уравнения структурной теории армированных тел.

Для получения основных уравнений и граничных условий структурной теории армированных тел воспользуемся общим вариационным принципом теории упругости (типа Xy - Вашицу) [13], функционал которого для рассматриваемого случая имеет вид:

$$I=U-\sum_j\sum_k\int_0^\ell\Big(\sigma_{11}^{[j,k]}\cdot\varepsilon_{11}^{[j,k]}+\sigma_{22}^{[j,k]}\cdot\varepsilon_{22}^{[j,k]}+\sigma_{33}^{[j,k]}\cdot\varepsilon_{33}^{[j,k]}+$$

$$+\sigma_{12}^{[j,k]}\cdot\varepsilon_{12}^{[j,k]}+\sigma_{13}^{[j,k]}\cdot\varepsilon_{13}^{[j,k]}+\sigma_{23}^{[j,k]}\cdot\varepsilon_{23}^{[j,k]}\Big)dx-$$

$$-\sum_j\sum_k\int_0^\ell\alpha\left(\tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)}\cdot\Gamma_{11}^{(j,k)}+\frac{r^2}{4}\mu_{31}^{(j,k)}\cdot\chi_{31}^{(j,k)}+\frac{r^2}{4}\mu_{21}^{(j,k)}\cdot\chi_{21}^{(j,k)}+\frac{r^2}{2}\mu_{11}^{(j,k)}\cdot\chi_{11}^{(j,k)}\right)dx+$$

$$+\sum_j\sum_k\int_0^\ell\left\{\left(\sigma_{11}^{[j,k]}+\alpha\tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)}\right)\cdot\frac{du^{(j,k)}(x)}{dx}+\sigma_{22}^{[j,k]}\cdot\frac{v^{(j+1,k)}-v^{(j,k)}}{s_y}+\sigma_{33}^{[j,k]}\cdot\frac{w^{(j,k+1)}-w^{(j,k)}}{s_z}+\right.$$

$$+\sigma_{23}^{[j,k]}\left[\frac{w^{(j+1,k)}-w^{(j,k)}}{s_y}+\frac{v^{(j,k+1)}-v^{(j,k)}}{s_z}\right]+\sigma_{13}^{[j,k]}\left[\frac{dw^{(j,k)}(x)}{dx}+\frac{u^{(j,k+1)}-u^{(j,k)}}{s_z}\right]+$$

$$\left.+\sigma_{23}^{[j,k]}\left[\frac{dv^{(j,k)}(x)}{dx}+\frac{u^{(j,k+1)}-u^{(j,k)}}{s_y}\right]\right\}dx+$$

$$+\sum_j\sum_k\int_0^\ell\left\{\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{31}^{(j,k)}\cdot\frac{d^2v^{(j,k)}(x)}{dx^2}-\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{21}^{(j,k)}\cdot\frac{d^2w^{(j,k)}(x)}{dx^2}+\right.$$

$$\left.+\alpha\frac{r^2}{2}\mu_{11}^{(j,k)}\cdot\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{w^{(j+1,k)}-w^{(j,k)}}{s_y}-\frac{v^{(j,k+1)}-v^{(j,k)}}{s_z}\right]\right\}dx- \tag{2.1}$$

$$-\sum_j\sum_k\left\{\left[\overset{+}{p}_{11}{}^{(j,k)}\cdot u^{(j,k)}+\overset{+}{p}_{13}{}^{(j,k)}\cdot w^{(j,k)}+\overset{+}{p}_{23}{}^{(j,k)}\cdot v^{(j,k)}+\overset{+}{m}_{31}{}^{(j,k)}\cdot\frac{dv^{(j,k)}}{dx}-\overset{+}{m}_{21}{}^{(j,k)}\cdot\frac{dw^{(j,k)}}{dx}\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\overset{-}{p}_{11}{}^{(j,k)}\cdot u^{(j,k)}+\overset{-}{p}_{13}{}^{(j,k)}\cdot w^{(j,k)}+\overset{-}{p}_{23}{}^{(j,k)}\cdot v^{(j,k)}+\overset{-}{m}_{31}{}^{(j,k)}\cdot\frac{dv^{(j,k)}}{dx}-\overset{-}{m}_{21}{}^{(j,k)}\cdot\frac{dw^{(j,k)}}{dx}\right]\right\}.$$

На основе функционала (2.1) можно получить вариационное уравнение

$$\delta I=0, \tag{2.2}$$

из которого следуют все основные уравнения и граничные условия структурной задачи армированных тел. Варьируя функционал (2.1) по всем функциональным аргументам, получим геометрические соотношения (1.16), (1.15), физические соотношения (1.17), (1.4), (1.11), уравнения равновесия:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\left(\sigma_{11}^{[j,k]}+\alpha\tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)}\right)}{dx}+\frac{\sigma_{12}^{[j,k]}-\sigma_{12}^{[j-1,k]}}{s_y}+\frac{\sigma_{13}^{[j,k]}-\sigma_{13}^{[j,k-1]}}{s_z}=0,\\
\frac{d\sigma_{12}^{[j,k]}}{dx}+\frac{\sigma_{22}^{[j,k]}-\sigma_{22}^{[j-1,k]}}{s_y}+\frac{\sigma_{23}^{[j,k]}-\sigma_{23}^{[j,k-1]}}{s_z}+\\
+\alpha\frac{r^2}{4}\cdot\frac{d^2\mu_{31}^{(j,k)}}{dx^2}-\alpha\frac{r^2}{4}\left[\frac{d\mu_{11}^{(j,k)}}{dx}-\frac{d\mu_{11}^{(j,k-1)}}{dx}\right]\cdot\frac{1}{s_z}=0,\\
\frac{d\sigma_{13}^{[j,k]}}{dx}+\frac{\sigma_{23}^{[j,k]}-\sigma_{23}^{[j-1,k]}}{s_y}+\frac{\sigma_{33}^{[j,k]}-\sigma_{33}^{[j,k-1]}}{s_z}+\alpha\frac{r^2}{4}\cdot\frac{d^2\mu_{21}^{(j,k)}}{dx^2}-\\
-\alpha\frac{r^2}{4}\left[\frac{d\mu_{11}^{(j,k)}}{dx}-\frac{d\mu_{11}^{(j-1,k)}}{dx}\right]\cdot\frac{1}{s_y}=0,
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

а также, следующие граничные условия при $x=0$ и $x=\ell$ (например, при $x=\ell$):

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}^{[j,k]}+\alpha\tilde{\sigma}_{11}^{(j,k)}=\overset{+}{p}{}_{11}^{(j,k)},\quad \sigma_{13}^{[j,k]}+\alpha\frac{r^2}{4}\cdot\frac{d\mu_{21}^{(j,k)}}{dx}-\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\mu_{11}^{(j,k)}-\mu_{11}^{(j-1,k)}}{S_y}=\overset{+}{p}{}_{13}^{(j,k)},\\
\sigma_{23}^{[j,k]}-\alpha\frac{r^2}{4}\cdot\frac{d\mu_{31}^{(j,k)}}{dx}+\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\mu_{11}^{(j,k)}-\mu_{11}^{(j-1,k)}}{S_z}=\overset{+}{p}{}_{23}^{(j,k)},\\
\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{31}^{(j,k)}=\overset{+}{m}{}_{31}^{(j,k)},\quad -\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{21}^{(j,k)}=\overset{+}{m}{}_{21}^{(j,k)}.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Аналогичные граничные условия получим и при $x=0$. Отметим, что граничные условия на плоскостях $y=\text{const}$ или $z=\text{const}$ содержат уравнения равновесия тех элементов (j,k), которые граничат с указанными поверхностями.

Уравнения равновесия (2.3), геометрические соотношения (1.16), (1.5), физические соотношения (1.17), (1.4), (1.11) и граничные условия (2.4) представляют структурную математическую модель армированных стержнями тел.

3. Континуальная теория армированных тел. Рассмотрим случай, когда тело усилено большим количеством тонких армирующих элементов. Чтобы прийти к эквивалентной системе уравнений в частных производных, примем принцип континуализации [5,10].

Вместо функций $u^{(j,k)}(x)$, $v^{(j,k)}(x)$, $w^{(j,k)}(x)$ и $\varphi^{(j,k)}(x)$, зависящих от одного непрерывного и двух дискретных аргументов, введём функции $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, w (x,y,z) и $\varphi(x,y,z)$ от трёх непрерывных аргументов.

Потребуем, чтобы эти функции были непрерывными и дифференцируемыми должное число раз, чтобы они медленно изменялись на расстояниях порядка s_y и s_z и чтобы в узлах решётки они принимали значения, близкие к $u^{(j,k)}(x)$, $v^{(j,k)}(x)$, $w^{(j,k)}(x)$ и $\varphi^{(j,k)}(x)$ соответственно.

Производя в функционале (2.1) преобразования следующего типа:

$$u^{(j,k)} - u^{(j-1,k)} \approx \frac{\partial u}{\partial y} s_y, \qquad u^{(j,k)} - u^{(j-1,k)} \approx \frac{\partial u}{\partial z} s_z,$$

$$\sum_j \sum_k F^{(j,k)} \approx \iint F(u, v, w, \varphi) \frac{dydz}{s_y s_z} \tag{3.1}$$

и так далее, приведём формулу функционала (2.1) к виду

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = \tilde{U} &- \iiint_v \left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{32}\varepsilon_{32}\right) dxdydz - \\
&- \iiint_v \alpha \left(\tilde{\sigma}_{11}\varepsilon_{11} + \frac{r^2}{4}\mu_{31}\chi_{31} + \frac{r^2}{4}\mu_{21}\chi_{21} + \frac{r^2}{4}\mu_{11}\chi_{11} \right) dxdydz + \\
&+ \iiint_v \left[\sigma_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + \sigma_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sigma_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \sigma_{32}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \right] dxdydz + \\
&+ \iiint_v \alpha \left[\tilde{\sigma}_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{r^2}{4}\mu_{31}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{r^2}{4}\mu_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{r^2}{4}\mu_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \right] dxdydz - \\
&- \iint_S \left[\left(p_1 u + p_2 v + p_3 w + m_{31}\frac{dw}{dx} + m_{21}\frac{dv}{dx} \right)\cos\lambda + \right. \\
&\left. + \left(p_1' u + p_2' v + p_3' w\right)\cos\mu + \left(p_1'' u + p_2'' v + p_3'' w\right)\cos\nu \right] dS,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где λ, μ, ν – углы внешней нормали к поверхности (S) тела с координатными осями, а $\tilde{U}$ – потенциальная энергия деформации:

$$\begin{aligned}
\tilde{U} = \frac{1}{2}\iiint_v &\left[\lambda_c \theta^2 + 2\mu_c\left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2\right) + \mu_c\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{32}^2\right) \right] dxdydz + \\
&+ \frac{1}{2}\iiint_v \alpha \left[E_a \varepsilon_{11}^2 + \frac{r^2}{4}E_a\chi_{31}^2 + \frac{r^2}{4}E_a\chi_{21}^2 + \frac{r^2}{2}G_a\chi_{11}^2 \right] dxdydz,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}. \tag{3.4}$$

Если составить вариационное уравнение (2.2), в котором функционал I выражается формулой (3.2), получим основные уравнения и граничные условия континуальной трёхмерной теории армированных стержнями тел:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial(\sigma_{11}+\alpha\tilde{\sigma}_{11})}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z}-\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial^2\mu_{31}}{\partial x^2}+\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial^2\mu_{11}}{\partial x\partial z}=0, \tag{3.5}$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}-\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial^2\mu_{21}}{\partial x^2}-\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial^2\mu_{11}}{\partial x\partial y}=0,$$
физические соотношения упругости
$$\sigma_{11}+\alpha\tilde{\sigma}_{11}=\lambda_c\theta+2\mu_c\varepsilon_{11}+\alpha E_a\varepsilon_{11},\ \sigma_{22}=\lambda_c\theta+2\mu_c\varepsilon_{22},\ \sigma_{33}=\lambda_c\theta+2\mu_c\varepsilon_{33},$$
$$\sigma_{12}=\mu_c\varepsilon_{12},\quad \sigma_{13}=\mu_c\varepsilon_{13},\quad \sigma_{32}=\mu_c\varepsilon_{32}, \tag{3.6}$$
$$\mu_{31}=E_{ac}\chi_{31},\quad \mu_{21}=E_a\chi_{21},\quad \mu_{11}=G_a\chi_{11},$$
геометрические соотношения
$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{12}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \varepsilon_{13}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\varepsilon_{32}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\ \chi_{31}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \chi_{21}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \chi_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right). \tag{3.7}$$
Для вывода граничных условий на поверхности (S) тела получим:
$$\Big\{\left[(\sigma_{11}+\alpha\tilde{\sigma}_{11})-p_1\right]\delta u+\left[\left(\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x}-\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{11}}{\partial z}+\sigma_{12}\right)-p_2\right]dv+$$
$$+\left[\left(\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x}+\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{11}}{\partial y}+\sigma_{13}\right)-p_3\right]dw+\left(\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{31}-m_{31}\right)\frac{\partial\delta v}{\partial x}- \tag{3.8}$$
$$-\left(\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{21}-m_{21}\right)\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big\}\cos\lambda+\left[(\sigma_{12}-p_1')\delta u+(\sigma_{22}-p_2')\delta v+(\sigma_{32}-p_3')\delta w\right]\cos\mu+$$
$$+\left[(\sigma_{13}-p_1'')\delta u+(\sigma_{22}-p_2'')\delta v+(\sigma_{33}-p_3'')\delta w\right]\cos\nu=0.$$
На участках поверхности S, нормаль к которым параллельна оси $x(\cos\lambda=1,\quad \cos\mu=\cos\nu=0)$, получим следующие граничные условия:
$$\sigma_{11}+\alpha\tilde{\sigma}_{11}=p_1,\quad \alpha\frac{r^2}{4}\mu_{31}=m_{31},\quad -\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{21}=m_{21}, \tag{3.9}$$
$$\sigma_{12}+\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x}-\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{11}}{\partial z}=p_2,\sigma_{13}+\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x}+\alpha\frac{r^2}{4}\frac{\partial\mu_{11}}{\partial y}=p_3.$$
Граничные условия для участков поверхности S, нормаль к которым параллельна оси $y(\cos\lambda=\cos\nu=0,\ \cos\mu=1)$, получим три граничных условия:

$$\sigma_{12} = p_1', \quad \sigma_{22} = p_2', \quad \sigma_{32} = p_3', \tag{3.10}$$

аналогично, для участков поверхности S, нормаль к которым параллельна оси $z\left(\cos\lambda = \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 1\right)$, получим тоже три граничных условия:

$$\sigma_{13} = p_1'', \quad \sigma_{32} = p_2'', \quad \sigma_{33} = p_3''. \tag{3.11}$$

Если уравнения (3.7) подставить в систему (3.6) и полученные – в систему (3.5), приходим к уравнениям в перемещениях (типа Ламе), которые будут идентичны соответствующим уравнениям работы [10]. Аналогичным образом граничные условия (3.9)-(3.11) переходят в граничные условия работы [10]. В этих обобщённых уравнениях Ламе для армированных тел, перемещения входят четвёртыми производными, поэтому в работах [5,10] делается заключение, что эти уравнения весьма близки по математической структуре к уравнениям моментной теории упругости. В этом заключении говорится, что можно теорию армированных тел рассматривать как реализацию моментной теории упругости, основанную на структурных соображениях.

Ниже показывается существование такой частной моментной теории упругости, которая адекватна теории армированных тел.

Отметим, что уравнения равновесия (3.5), соотношения упругости (3.6), геометрические соотношения (3.7) и граничные условия (3.9)-(3.11) можем получить так же, если осуществить предельный переход в соответствующих уравнениях ((2.3), (1.17), (1.4), (1.11), (1.16), (1.5), (1.9) и в граничных условиях (2.4)), для этого необходимо вместо первых разностей написать соответствующие частные производные.

4. Адекватная моментная теория упругости со стеснённым вращением. Трёхмерные уравнения равновесия общей моментной теории упругости со стеснённым вращением выражаются так [6]:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial z} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_{21} - \sigma_{12} + \frac{\partial\mu_{31}}{\partial x} + \frac{\partial\mu_{32}}{\partial y} + \frac{\partial\mu_{33}}{\partial z} = 0, \; \sigma_{13} - \sigma_{31} + \frac{\partial\mu_{21}}{\partial x} + \frac{\partial\mu_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\mu_{23}}{\partial z} = 0, \tag{4.2}$$

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} + \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\mu_{12}}{\partial y} + \frac{\partial\mu_{13}}{\partial z} = 0.$$

В моментной теории упругости со стеснённым вращением имеет место следующее тождество [6]:

$$\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33} = 0. \tag{4.3}$$

Примем, что

$$\mu_{32} = \mu_{33} = \mu_{23} = \mu_{12} = \mu_{13} = 0. \tag{4.4}$$

В этом частном случае уравнения (4.2), (4.3) примут вид:

$$\tau_{21} = \tau_{12} - \frac{\partial\mu_{31}}{\partial x}, \; \tau_{23} = \tau_{32} + \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x}, \; \tau_{31} = \tau_{13} + \frac{\partial\mu_{21}}{\partial x} + \frac{\partial\mu_{22}}{\partial y}, \tag{4.5}$$

$$\mu_{22} = -\mu_{11}. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.5) в уравнения (4.1) и учитывая уравнение (4.6), приходим к следующей системе уравнений равновесия в этой частной теории моментной упругости со стеснённым вращением:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z} - \frac{\partial^2\mu_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mu_{11}}{\partial x\partial z} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} + \frac{\partial^2\mu_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\mu_{11}}{\partial x\partial z} = 0.$$

Сравнивая уравнения (4.7) и (3.5), легко убедиться, что они идентичны и приходится только признать соответствия:

$$(\sigma_{11})_{мом} \to (\sigma_{11} + \alpha\tilde{\sigma}_{11})_{кл}, \ (\mu_{31})_{мом} \to \left(\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{31}\right)_{кл}, \ (\mu_{21})_{мом} \to \left(\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{21}\right)_{кл},$$

$$(\mu_{11})_{мом} \to \left(\alpha\frac{r^2}{4}\mu_{11}\right)_{кл}, \quad (\sigma_{32})_{мом} \to (\sigma_{32} = \sigma_{23})_{кл}. \quad (4.8)$$

Если в уравнениях (4.7) сделать замену по выражениям (4.8), далее, присоединить к полученным уравнениям соотношения упругости (3.6) и геометрические соотношения (3.7), получим частную модель моментной теории упругости со стеснённым вращением, которая адекватна континуальной теории армированных тел.

Если первое уравнение из (4.7) умножить на u, второе – на v, а третье – на w, потом сложить их и полученный результат интегрировать по объёму тела, в результате приходим к закону сохранения механической энергии для построенной моментной теории упругости. Отметим, что формулы для объёмной плотности потенциальной энергии деформации и функционала построенной моментной теории упругости будут полностью совпадать с соответствующими формулами (3.3), (3.2) (только нужно иметь в виду, что в формулах (3.3), (3.2) индексы для касательных напряжений не имеют значения (12 или 21, 13 или 31, 23 или 32), так как в этом случае имеем дело с классической теорией упругости. В моментной теории упругости необходимо строго соблюдать указанные индексы (как они присутствуют в уравнениях (4.7)).

Заключение. В работе приведены для армированных стержнями тел структурные и континуальные модели В.В.Болотина с общим вариационным функционалом. Далее построена частная моментная теория упругости, которая адекватна континуальной теории армированных указанным образом тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. К теории слоистых плит // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. №3. С.65-72. Bolotin V.V. Theory of layered plates.// News of AS USSR. Mechanics and Engineering. 1963. №3. P.65-72. (in Russian)
2. Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность. М.:Изд. «Машиностроение». 1965. Вып. 11. С.31-63. Bolotin V.V. Strength, stability and vibrations of multilayer plates.// Strength calculations. 1965. N11. M.: «Engineering». P. 31-63. (in Russian)

3. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Изд-во «Машиностроение». 1980. С.375. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayered constructions. M.: «Engineering». 1980. 376 p. (in Russian)
4. Болотин В.В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. №1. С.61-66. Bolotin V.V. About Bending of Plates Consisting of a Large Number of Layers// News of AS USSR. Mechanics and Engineering. 1964. №1. P. 61-66. (in Russian)
5. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред // Механика полимеров. 1965. №2. С.27-37. Bolotin V.V. Basic Equations of the Theory of Reinforced Media// Polymer Mechanics. 1965. №2. P. 27-37. (in Russian)
6. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости //Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С.89-112. Koyter V.T. Moment Stresses in the Theory of Elasticity// Mechanics. Proceedings of transl. of Foreign Articles. 1965. №3. P. 89-112. (in Russian)
7. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений// Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. №4. С.115-128. Mindlin R.D. The Effect of Moment Stresses on the Concentration of Stresses.// Mechanics. Proceedings of transl. of foreign articles. 1964. №4. P.115-128.
8. Миндлин Р.Д., Тиерстен Г.Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости //Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. №4. С.80-114. Mindlin R.D., Tiersten G.F. Effects of the Moment Stresses in the Linear Theory of Elasticity.// Mechanics. Proceedings of transl. of foreign articles. 1964. №4. P.80-114.
9. Саркисян С.О. К интерпретации теории армированных (слоистых) упругих сред как моментная теория упругости //Доклады НАН Армении. 2018. Т.118. №4. Sargsyan S.H. On the Interpretation of the Theory of Reinforced (Layered) Elastic Solids as a Moment Theory of Elasticity. // Reports of NAS Armenia. 2018. V.118. №4.
10. Болотин В.В. О теории армированных тел // Известия АН СССР. Механика. 1965. №1. С.74-80. Bolotin V.V. On Theory of Reinforced Bodies// News of NA USSR. Mechanics. 1965. №1. P.74-80.
11. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с. Feodosyev V.I. Strength of materials. M.: Nauka. 1986. 512 p.
12. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 464 с. Leybenzon L.S. Theory of Elasticity. M. L.: GITTL. 1947. 464p.
13. Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975. 872 с. Novackiy V. Theory of Elastcity. M.: «Mir». 1975. 872 p. (in Russian)

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – член-корреспондент НАН РА, доктор физ-мат. наук, профессор. Ширакский государственный университет. (093) 15 16 98
E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 12. 09. 2018 г.