ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №4, 2018 Механика
УДК 539.3

О СВЕРХЗВУКОВОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ ПАНЕЛИ, СЖАТОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОТОКА ГАЗА, НАБЕГАЮЩИМ НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, сжимающие усилия, дестабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge

Key words: stability, compressive forces, destabilizing effect, divergence of a panel, localized divergence, supersonic overrunning

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of compressed forces at the free und hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the compressed forces leads to the destabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

Բելուբեկյան Մ.Վ. , Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Սեղմված գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ առաձգական ուղղանկյուն սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ կայունություն, սեղմող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում մեկ ազատ եզրով սեղմված առաձգական ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը, որոնք բեռնված են սեղմող ուժերով, զուգահեռ մյուս երկու նույնպես հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տրված սալի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում տեղայնացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և տեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները:

В статье на примере тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, сжатой по направлению обтекающего её сверхзвукового потока газа, набегающим на свободный край, исследуется влияние первоначального напряженного состояния на потерю статической устойчивости системы «пластинка–поток». Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток» в линейной постановке. Изучена зависимость форм потери статической устойчивости от параметров системы: в пространстве параметров системы выделены области дивергенции панели и локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки. Установлено, что первоначальное напряжённое состояние приводит, в основном, к существенной дестабилизации невозмущённого состояния равновесия пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

Введение. Как известно [1(с. 285), 2 (с. 245), 3, 4], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, на много мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

Исследованию зависимости форм потери устойчивости от характера начального напряжённого состояния пластин и оболочек как необтекаемых, так и обтекаемых, посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях и в статьях [1, 2, 5, 6–8].

В предлагаемой статье в линейной постановке исследуется задача статической устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, равномерно сжатой по направлению скорости потока газа, набегающим на её свободный край.

С помощью графоаналитических методов исследования рассматриваемой задачи устойчивости установлена зависимость форм потери статической устойчивости от характера начального напряжённого состояния и от скорости обтекающего потока газа, а также от остальных «существенных» параметров системы «пластинка–поток».

Проведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка-поток» на область устойчивости и области статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость, соответственно, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции. А также, при отсутствии обтекания сжатая панель теряет статическую устойчивость как в форме неустойчивости панели, так и в форме локальной неустойчивости в зависимости от параметров задачи.

Установлено, что граница перехода от неустойчивости панели к локальной неустойчивости и от дивергенции панели к локализованной дивергенции в случае необтекаемых и обтекаемых пластинок, соответственно, одна и та же.

Показано, что при обтекании первоначальное напряжённое состояние, в основном, приводит к существенной дестабилизации – “скачкообразному” падению значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции. При умеренных значениях параметра отношения сторон пластинки критическая скорость дивергенции панели уменьшается в $1.5-2.5$ раза, а при достаточно больших значениях параметра отношения сторон пластинки критическая скорость локализованной дивергенции уменьшается в $2.4-3$ раза в сравнении с соответствующими значениями критических скоростей дивергенции и локализованной дивергенции обтекаемой панели с ненагруженными краями [13].

При меньших значениях параметра отношения сторон пластинки, примерно порядка одной десятой и менее, соответствующим достаточно длинным прямоугольным пластинкам, первоначальное напряженное состояние оказывает незначительное влияние на поведение пластинки при обтекании сверхзвуковым потоком газа.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов.

Предлагаемая работа продолжает цикл работ, посвящённых изучению своеобразного действия составляющих нагрузки – сил различной природы: консервативных и неконсервативных, на устойчивость динамической системы «пластинка–поток». В частности, следует отметить работы [13–15].

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V.

Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. Предполагается, что шарниры идеальны.

Будем полагать, что пластинка сжата в своей срединной плоскости силами $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределёнными по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1(с. 285), 2 (с. 245)].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [9,10]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. При этом предполагается, что $V > a_0 M_0$, $M_0 = \min M = \sqrt{2}$, M – число Маха. А также, будем полагать, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки сжимающими силами $N_x = 2h\sigma_x$.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории», дифференциальное уравнение изгиба сжатой тонкой, изотропной, прямоугольной пластинки описывается соотношением [2 (с. 245), 4]

$$D\Delta^2 w + 2h\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2(с.27,101)]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = a\,; \tag{1.3}$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0\,,\ y = b\,; \tag{1.4}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагружёнными краями $x = 0$ и $x = a$ в предположении, что напряжения σ_x малы по сравнению с критическими напряжениями $(\sigma_x)_{cr.}$, которые могут произвести «выпучивание» пластинки при отсутствии обтекания: при $V \geq V_{cr}$ устойчивое невозмущённое состояние равновесия пластинки становится статически неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы равновесия панели, сжатой усилиями $\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}$ и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа со скоростью V, сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2)–(1.4) для прогиба $w(x, y)$.

Следует заметить, что в работах [17,18] в нелинейной постановке исследована задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки с нагружёнными шарнирно закреплёнными краями.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка–поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x) \cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}\,; \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Подставляя решение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4 - 2 \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0 \tag{2.2}$$

или

$$(r^2 - 1)^2 = -2\beta_x^2 r^2 - \alpha_n^3 r\,, \tag{2.3}$$

где через

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}\,,\ \alpha_n^3 > \left(\alpha_n^3\right)_0\,,\ \left(\alpha_n^3\right)_0 = \sqrt{2} a_0 \left(a_0 \rho_0 D^{-1} \mu_n^{-3}\right) \tag{2.4}$$

обозначен параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки, а через β_x^2 – коэффициент напряжения – параметр, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x\, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2}, \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}, (\beta_x^2)_{cr} = h \cdot (\sigma_x)_{cr}\, D^{-1}\mu_n^{-2}. \quad (2.5)$$

Здесь $\left(\alpha_n^3\right)_0$ – значение параметра $\alpha_н^3$ аэродинамической нагрузки $|\Delta p|$, соответствующей граничному значению числа Маха: $M_0 = \sqrt{2}$ [1,2]; $(\beta_x^2)_{cr}$ – то наименьшее значение коэффициента напряжения β_x^2, при котором плоская форма равновесия сжатой пластинки при отсутствии обтекания ($V = 0$) становится неустойчивой и происходит «выпучивание» упругой поверхности пластинки.

Исследуем характеристическое уравнение (2.2).

В соответствии с решением Феррари, уравнение (2.2), как алгебраическое уравнение четвёртой степени, можно свести к следующим двум квадратным уравнениям:

$$r^2 + \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2-1} = 0, \quad (2.6)$$

$$r^2 - \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2-1} = 0, \quad (2.7)$$

где q – действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1-\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0. \quad (2.8)$$

Отсюда, в силу обозначения (2.4), очевидно, что при фиксированных значениях остальных параметров введённый параметр q характеризует скорость потока газа V: $q = q(V)$.

Как следует из выражений (2.6) и (2.7), корни r_k, $k = \overline{1,4}$ характеристического уравнения (2.2) могут быть как действительными числами, так и комплексно сопряжёнными в зависимости от значений параметров q и β_x^2.

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в виде (2.3) и в эквивалентной форме (2.6), (2.7), найден «допустимый» интервал значений параметра скорости $\{q = q(V)\}$, определяющий границу области устойчивости в пространстве «существенных параметров» исходной системы «пластинка–поток» при фиксированных значениях остальных параметров:

$$q \in \left(\left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3}\right)\Big/3,\ \infty\right) \text{ для всех } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}. \quad (2.9)$$

Как оказалось, при значениях (2.9) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных и пару комплексно сопряжённых корней, которые легко находятся, являясь решением квадратных уравнений (2.6) и (2.7):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad r_1 < 0, \quad r_2 < 0; \quad (2.10)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (2.11)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.10) и (2.11), общее решение (2.1) уравнения (1.1) представится двойным рядом вида:

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \tag{2.12}$$

Учитывая обозначение (2.4), в соответствии с соотношением (2.9), скорость потока газа V для прямоугольных пластинок умеренных размеров и достаточно длинных ($a \ll b$) определится выражением

$$V=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\cdot(q^2-1)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,, \tag{2.13}$$

а в случае достаточно широких пластинок ($a \gg b$) – соответственно, выражением

$$V=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\cdot(q^2-1)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1}\,. \tag{2.14}$$

Здесь через γ обозначено отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma=ab^{-1}\,. \tag{2.15}$$

Как известно [3,5,11,12,14], необходимым условием потери статической устойчивости состояния невозмущённого равновесия как полубесконечной пластины–полосы ($\gamma=\infty$), так и достаточно широкой прямоугольной пластинки ($\gamma \gg 1$ или $a \gg b$) в форме локальной неустойчивости (необтекаемая пластинка) или в форме локализованной дивергенции (обтекаемая пластинка) в окрестности свободного края $x=0$ пластинки, является условие затухания колебаний на крае $x=a$:

$$\lim_{x\to a} w(x,y)=0 \text{ для всех } y\in[0,b]\text{, когда } a=\infty \text{ или } a\gg b\,. \tag{2.16}$$

Так как для весьма широких пластинок $(\gamma \gg 1)$ и для полубесконечной пластины–полосы $(\gamma=\infty)$ в общем решении (2.12) можно, считая $C_3=C_4=0$, удовлетворять только первым двум граничным условиям (1.2), то условие (2.16), очевидно, может иметь место, когда

$$\operatorname{Re} r_1<0\,,\ \operatorname{Re} r_2<0\,. \tag{2.17}$$

А тогда, общее решение (2.12) исходной задачи, удовлетворяющее необходимому условию существования локализованной неустойчивости (2.16), представится в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\exp(\mu_n r_1 x)+C_{n2}\exp(\mu_n r_2 x)\right)\cdot\sin(\mu_n y)\,, \tag{2.18}$$

где r_1 и r_2 определены выражениями (2.10), в которых допустимыми значениями параметра скорости $q=q(V)$ являются значения (2.9).

В согласии с алгебраическим критерием (2.17), из выражений (2.10) очевидна возможность потери статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия, как обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(\gamma>\gamma_* \gg 1)$, так и обтекаемой полубесконечной пластины–полосы $(\gamma=\infty)$, в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ при значениях $q\in\left(\left(\beta_x^2-1+2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3}\right)\big/3,\ \infty\right)$, $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr}$. Здесь γ_* – граничное значение параметра отношения сторон γ обтекаемой прямоугольной пластинки, начиная с которого можно считать поведение достаточно широкой обтекаемой прямоугольной пластинки, аналогичным поведению обтекаемой полубесконечной пластины–полосы в потоке газа.

Отметим, что граничное значение $\gamma = \gamma_*$ определяется на основе анализа численных результатов исследования соответствующих дисперсионных уравнений обтекаемой пластинки.

2.1. При отсутствии обтекания $V = 0\,(\alpha_n^3 = 0)$ характеристическое уравнение (2.2) запишется в виде

$$r^4 - 2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2 + 1 = 0 \text{ или } (r^2-1)^2 + 2\cdot\beta_x^2\cdot r^2 = 0, \tag{2.19}$$

откуда очевидно, что оно имеет две пары комплексно сопряжённых корней.

Легко показать, что корни r_k характеристического уравнения (2.19) определяются следующими выражениями:

при значениях $\beta_x^2 \in (0,2)$

$$r_{1,2} = -\sqrt{1-0.5\cdot\beta_x^2} \pm i\cdot\sqrt{0.5\cdot\beta_x^2}\,,\ \ r_{3,4} = \sqrt{1-0.5\cdot\beta_x^2} \pm i\cdot\sqrt{0.5\cdot\beta_x^2}\,; \tag{2.20}$$

при значении $\beta_x^2 = 2$ корни r_k являются чисто мнимыми кратности 2:

$$r_{1,2} = \pm i\,; \tag{2.21}$$

а при значениях $\beta_x^2 > 2$ характеристическое уравнение (2.19) имеет две пары чисто мнимых корней вида

$$r_{1.2,3,4} = \pm\, i\sqrt{(\beta_x^2-1) \pm \sqrt{\beta_x^2(\beta_x^2-2)}}\,. \tag{2.22}$$

Согласно критерию (2.17), отсюда следует, что при отсутствии обтекания невозмущённое состояние равновесия достаточно широких сжатых прямоугольных пластинок $\gamma \gg 1$, а также полубесконечной пластины–полосы $\gamma = \infty$, может потерять статическую устойчивость в форме локальной неустойчивости, при которой «выпучивается» узкая полоса вдоль края $x = 0$ только при значениях $\beta_x^2 \in (0,2)$.

Таким образом, невозмущённая форма равновесия достаточно широких необтекаемых пластинок может потерять устойчивость в форме локальной неустойчивости лишь только при значениях $\beta_x^2 \in (0,2)$, в отличие от обтекаемых достаточно широких пластинок, невозмущённая форма равновесия которых имеет возможность потерять статическую устойчивость при всех значениях $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}$.

3. Получим дисперсионные уравнения, описывающие достаточные признаки статической неустойчивости как обтекаемых, так и необтекаемых пластинок.

3.1. Подставляя общее решение (2.12) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.10) и (2.11), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель приводит к следующему дисперсионному уравнению относительно «существенных» параметров $q(V)$, n, γ, β_x^2, ν исходной задачи устойчивости системы «пластинка–поток»:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot \tag{3.1}$$

$$\cdot\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2-2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2-$$

$$-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2-2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}$$

$$\cdot B_1B_2\cdot\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma)+\ 2\cdot B_2\cdot\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(q+1)\ -(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$\left.-2((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1}-q\beta_x^2)\nu+(q+1+\sqrt{q^2-1}-\beta_x^2)\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}(q+1-\beta_x^2)\sqrt{q^2-1}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma)+2\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\cdot\sqrt{q^2-1}+\right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(q+1)+(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$\left.+2((2q-1)(q+1)+q\sqrt{q^2-1}-q\beta_x^2)\nu-(q+1-\sqrt{q^2-1}-\beta_x^2)\nu^2\right]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-$$

$$\left.-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot(3(q^2-1)+2q\beta_x^2-\beta_x^4)\sqrt{q^2-1}\cdot\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)=0\,;$$

где

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1+\beta_x^2)}\ . \tag{3.2}$$

Здесь β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий сжимающие силы и определяемый выражением (2.5); $q=q(V)$ – параметр скорости потока газа V, являющийся действительным корнем кубического уравнения (2.8): $q\in\left(\left(\beta_x^2-1+2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3}\right)\big/3,\ \infty\right)$ при всех $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr}<(\beta_x^2)_{pr}$; γ – параметр отношения сторон пластинки, определяемый выражением (2.15): $\gamma\in(0,\infty)$; ν – коэффициент Пуассона.

Очевидно, что $B_1>0$ и $B_2>0$ при всех допустимых значениях q и β_x^2.

В уравнении (3.1) предполагается, что $\gamma\in(0,\infty)$. В соответствии с обозначением (2.15), значения $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки: условие $\gamma=0$ соответствует бесконечно удлинённой пластинке, а условие $\gamma = \infty$ – полубесконечной пластине–полосе.

3.2. Подставляя общее решение рассматриваемой задачи устойчивости в виде (2.18), в котором корни r_1 и r_2 определены выражениями (2.10), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2}.

Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(\gamma > \gamma_* \gg 1)$, а также полубесконечной пластинки– полосы ($\gamma = \infty$):

$$F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) = . \tag{3.3}$$

$$= \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1}\right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 - 2\beta_x^2\left(q - \sqrt{q^2 - 1}\right) = 0 .$$

Можно показать, что, переходя к пределу в соотношении (3.1) при условии $\gamma \to \infty$ получаем уравнение, тождественное уравнению (3.3):

$$\lim_{\gamma\to\infty} F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) = 0 . \tag{3.4}$$

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_x^2 = 0$ в уравнения (3.1) и (3.3), можно убедиться в их тождественности соответствующим дисперсионным уравнениям, полученным в работах [12, 13] при исследовании задач устойчивости, соответственно, обтекаемой полубесконечной пластины–полосы и прямоугольной пластинки с ненагруженными краями.

3.3. Численные исследования дисперсионного уравнения (3.1) показали, что его решения, начиная с значения $\gamma = \gamma_{**} \le 10^{-2}$ удовлетворяют условию

$$q \gg 1. \tag{3.5}$$

Переходя к пределу в соотношении (3.1) при $\gamma \to \gamma_{**}$, можно показать, в силу условия (3.5), что дисперсионное уравнение, соответствующее системе «достаточно длинная прямоугольная пластинка – поток», описывается соотношением

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{**}} F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = FU(q, n, \gamma_{**}, \beta_x^2) = \tag{3.6}$$

$$= \left(-\exp(-1.5\sqrt{2(q-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**}) + \cos(\sqrt{0.5(3q+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**})\right)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(3q+\beta_x^2)\cdot(q-\beta_x^2)^3} - (3q^2 - \beta_x^4)\cdot\sin(\sqrt{0,5(3q+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**}) = 0 .$$

Здесь очевидно, что значение параметра отношения сторон панели

$$\gamma_{**} = 10^{-2} \tag{3.7}$$

определяет границу, начиная с которого поведение невозмущённого состояния сжатых достаточно длинных прямоугольных пластинок ($\gamma \le \gamma_{**} \ll 1$), обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, в смысле потери статической устойчивости можно изучить, исследуя дисперсионное уравнение (3.6).

В соответствии с условием (3.5) выражение (2.13) перепишется в виде

$$V = 2\sqrt{2(q-\beta_x^2)}\cdot q\cdot\pi^3 n^3\gamma^3\cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1} \to \tag{3.8}$$

при всех $q\in\left(\left(\beta_x^2-1+2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3}\right)\Big/3,\ \infty\right)$ и $\gamma\le\gamma_{**}$.

Из соотношений (3.6) и (3.8) следует, что приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ достаточно длинных панелей ($\gamma\le\gamma_{**}$) не зависит от коэффициента Пуассона ν.

3.4. Нетрудно показать, что дисперсионное уравнение, соответствующее системе «бесконечно удлиненная пластинка – поток», описывается соотношением:

$$FU(\tilde{q},\tilde{\beta}_x^2) = \left(-\exp(-1.5\sqrt{2(\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)})+\cos\sqrt{0.5(3\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\right)\cdot \tag{3.9}$$

$$\cdot\sqrt{(3\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)\cdot(\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)^3}-(3\tilde{q}^2-\tilde{\beta}_x^4)\cdot\sin(\sqrt{0,5(3\tilde{q}+\beta_x^2)})=0\,,\ \gamma=0\,.$$

При этом, скорость обтекающего потока газа V будет определяться выражением

$$V = 2\sqrt{2(\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)}\cdot\tilde{q}\cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1} < a_0 M_0 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}. \tag{3.10}$$

Здесь $\tilde{q}$ – параметр скорости потока газа V, являющийся действительным корнем кубического уравнения

$$8\cdot\tilde{q}^2\cdot(\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)-S^6=0\,,\tilde{\beta}_x^2=h\sigma_x D^{-1}a^2\,,\ S^3=a_0\rho_0 VD^{-1}a^3\ ,\ \tilde{q}>\tilde{\beta}_x^2. \tag{3.11}$$

В самом деле, дифференциальное уравнение изгиба обтекаемой сжатой по потоку газа бесконечно удлинённой пластинки и граничные условия при принятых способах закрепления краёв, соответственно, описываются соотношениями [1, 2]:

$$D\frac{d^4w}{dx^4}+N_x\frac{d^2w}{dx^2}+a_0\rho_0 V\frac{dw}{dx}=0, \tag{3.12}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=0,\ D\cdot\frac{d^3w}{dx^3}+N_x\frac{dw}{dx}=0 \text{ при } x=0 \text{ и } w=0,\ \frac{d^2w}{dx^2}=0 \text{ при } x=a. \tag{3.13}$$

Общее решение уравнения (3.12) будем искать в виде: $w(x)=C\cdot\exp(rx)$, где C – произвольная постоянная. Подставляя его в дифференциальное уравнение (3.12), получаем характеристическое уравнение системы «бесконечно удлинённая пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4+2\tilde{\beta}_x^2 r^2+S^3 r=0, \tag{3.14}$$

где коэффициенты $\tilde{\beta}_x^2$ и S^3 определяются, соответственно, выражениями (3.11).

Характеристическое уравнение (3.14) в соответствии с решением Феррари, сводится к двум квадратным уравнениям

$$r^2+\sqrt{2(\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)}\cdot r=0 \text{ и } r^2-\sqrt{2(\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)}\cdot r+2\tilde{q}=0, \tag{3.15}$$

где $\tilde{q}$ – действительный корень кубического уравнения (3.11), удовлетворяющий условию

$$\tilde{q}>\tilde{\beta}_x^2,\ 2\tilde{q}\sqrt{2(\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)}>a_0M_0\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3). \tag{3.16}$$

Корни r_k характеристического уравнения (3.14), являясь решениями квадратных уравнений (3.15), легко находятся и определяются выражениями:

$$r_1 = -\sqrt{2(\tilde{q} - \tilde{\beta}_x^2)}\,,\ r_2 = 0\,,\ r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(\tilde{q} - \tilde{\beta}_x^2)} \pm i \cdot \sqrt{0.5 \cdot (3\tilde{q} + \tilde{\beta}_x^2)}\,. \qquad (3.17)$$

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (3.12) в виде $w(x) = \sum_{k=1}^{4} C_k \exp(r_k x)$, в котором r_k определяются выражениями (3.17), в граничные условия (3.13), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_k. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению (3.9). А, в соответствии с соотношениями (3.11) очевидно, что скорость потока газа V будет определяться выражением (3.10).

Результаты численного анализа уравнения (3.9) показали, что для всех допустимых значений $\tilde{\beta}_x^2$ функция (3.9), являясь знакопеременной на интервале $\tilde{q} \in (\tilde{q}_0(a_0 M_0), \infty)$, при скоростях потока газа $V \in (a_0 M_0, V(\tilde{q}_1))$, соответствующих интервалу $\tilde{q} \in (\tilde{q}_0(a_0 M_0), \tilde{q}_1)$, где $\tilde{q}_1 \approx 9$ принимает отрицательные значения

$$FU(\tilde{q}, \tilde{\beta}_x^2) < 0\,, \qquad (3.18)$$

а при $\tilde{q} = \tilde{q}_1 \approx 9$ – $FU(\tilde{q}, \tilde{\beta}_x^2) = 0$.

Подставляя $\tilde{q}_1 \approx 9$ в выражение (3.10), находим $V(\tilde{q}_1) \approx 76.37 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$, которое больше порогового значения сверхзвуковой скорости $V_{por.} = a_0 M_0$, примерно, в $1.5 - 7$ раз для стальной пластинки с $2ha^{-1} = 0.006 - 0.015$. Это означает, что система «бесконечно удлинённая сжатая пластинка – поток» уже при сверхзвуковых скоростях потока газа $V \geq V_{por.}$, близких к пороговому значению $V_{por.} = a_0 M_0$, является статически неустойчивой, аналогично системе «бесконечно удлинённая пластинка с ненагруженными краями – поток» [13}. При этом, имеет место дивергенция панели. А при скоростях $V \geq V(\tilde{q}_1)$ потока газа равновесное состояние системы становится устойчивым.

Из численного анализа дисперсионных уравнений (3.6) и (3.9) следует, что, поведение систем «достаточно длинная пластинка–поток» ($\gamma \leq 10^{-2}$) и «бесконечно удлинённая пластинка–поток» ($\gamma = 0$) в смысле потери статической устойчивости, примерно, одинаково с точностью до 10^{-6} порядка малости и менее.

3.5. Исследуем дисперсионные уравнения, описывающие достаточные признаки статической неустойчивости необтекаемых сжатых прямоугольных пластинок, для последующего анализа численных результатов исходной задачи устойчивости.

Подставляя общее решение (2.12) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k определяются выражениями (2.20)–(2.22), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем, соответственно, три однородных системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}, соответствующие значениям $\beta_x^2 \in (0,2)$, $\beta_x^2 = 2$ и $\beta_x^2 > 2$ соответственно.

Приравненные нулю определители этих систем уравнений – характеристические определители, приводят к следующим дисперсионным уравнениям относительно «существенных» параметров n, γ, ν и β_x^2 исходной задачи устойчивости при отсутствии обтекания ($V = 0$):

$$F_1(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\left(4 - 2\beta_x^2 - (1+\nu)^2\right)\cdot \mathrm{sh}\left(2\pi n\gamma\sqrt{1-\frac{\beta_x^2}{2}}\right) - \quad (3.19)$$

$$-\sqrt{1-\frac{\beta_x^2}{2}}\cdot\left(2\beta_x^2 - (1-\nu)^2\right)\cdot\sin\left(2\pi n\gamma\sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\right) = 0\,,\ \beta_x^2 \in (0,2)\,;$$

$$F_2(n,\gamma,\nu) = -2\pi n\gamma(1+\nu) - (3-\nu)\sin(2\pi n\gamma) = 0\,,\ \beta_x^2 = 2\,; \quad (3.20)$$

$$F_3(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \mathfrak{B}_2(\mathfrak{B}_1^2 + \nu)^2\sin(\pi n\gamma\mathfrak{B}_1)\cos(\pi n\gamma\mathfrak{B}_2) - \quad (3.21)$$

$$-\mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_2^2 + \nu)^2\sin(\pi n\gamma\mathfrak{B}_2)\cos(\pi n\gamma\mathfrak{B}_1) = 0\,,\ \beta_x^2 > 2\,,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \sqrt{(\beta_x^2 - 1) - \sqrt{\beta_x^2(\beta_x^2 - 2)}}\,,\ \mathfrak{B}_2 = \sqrt{(\beta_x^2 - 1) + \sqrt{\beta_x^2(\beta_x^2 - 2)}}\,.$$

Из выражения (3.20) очевидна справедливость неравенства

$$F_2(n,\gamma,\nu) < 0 \quad (3.22)$$

при всех значениях параметров n, γ и ν.

Переходя к пределу в соотношении (3.19) при условии $\gamma \to \infty$, можно показать, что дисперсионное уравнение локальной неустойчивости необтекаемой полубесконечной пластины-полосы при всех значениях параметров n и $\beta_x^2 \in (0,2)$ имеет вид

$$\lim_{\gamma\to\infty}(F_1(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = 0) = F_{loc.inst}(\nu,\beta_x^2) = 4 - 2\beta_x^2 - (1+\nu)^2 = 0\,. \quad (3.23)$$

Результаты численных исследований функций (3.19), (3.21) и (3.23), проведённых при всех допустимых значениях параметров задачи, показали, что при фиксированных значениях остальных параметров функции $F_1(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$, $F_3(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$ и $F_{loc.inst}(\nu,\beta_x^2)$ являются знакопеременными. Однако, функции $F_1(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$ и $F_{loc.inst}(\nu,\beta_x^2)$ в интервале $\beta_x^2 \in (0,2)$ имеют один нуль, а функция $F_3(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$ – множество нулей в интервале $\beta_x^2 \in (2,(\beta_x^2)_{pr})$. При этом

$$F_1(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) > 0\,,\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr} \text{ и } F_1(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) \le 0\,,\ 2 > \beta_x^2 \ge (\beta_x^2)_{cr}\,; \quad (3.24)$$

$$F_{loc.inst}(\nu,\beta_x^2) > 0\,,\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{locinst} \text{ и } F_{loc.inst}(\nu,\beta_x^2) \le 0\,,\ 2 > \beta_x^2 \ge (\beta_x^2)_{locinst} \quad .(3.25)$$

А функция $F_3(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$, будучи отрицательной в начале интервала $\beta_x^2 \in (2,(\beta_x^2)_{pr})$, при возрастании β_x^2 меняет знак с «минуса» на «плюс», что вполне согласуется с условием (3.22).

Из соотношений (3.24) и (3.25) следует, что критические значения $(\beta_x^2)_{cr}$ и $(\beta_x^2)_{locinst}$ коэффициента напряжения β_x^2, являясь решением уравнений (3.19) и (3.23), соответственно, удовлетворяют условию

$$(\beta_x^2)_{cr} = h(\sigma_x)_{cr} D^{-1}\mu_n^{-2} \in (0,2), \ (\beta_x^2)_{cr} \le (\beta_x^2)_{pr}; \tag{3.26}$$

$$(\beta_x^2)_{locinst} = h(\sigma_x)_{locinst} D^{-1}\mu_n^{-2} \in (0,2), \ (\beta_x^2)_{locinst} \le (\beta_x^2)_{pr}; \tag{3.27}$$

Здесь $(\sigma_x)_{cr}$ – критическое значение сжимающего напряжения, при котором «выпучивается» упругая поверхность необтекаемой пластинки; $(\sigma_x)_{locinst}$ – критическое значение сжимающего напряжения, при котором «выпучивается» лишь узкая полоса в окрестности края $x=0$ пластинки; $(\beta_x^2)_{pr} = h(\sigma_x)_{pr} D^{-1}\mu_n^{-2}$, $(\sigma_x)_{pr}$ – предельное значение сжимающего напряжения, при котором пластинка разрушается.

В соответствии с результатами, полученными в разделе 2.1, из соотношений (3.19), (3.23) и из условий (3.24), (3.25) следует, что при значениях $2 > \beta_x^2 \ge (\beta_x^2)_{cr}$ невозмущённое состояние равновесия необтекаемой сжатой пластинки, достаточно длинной ($\gamma \ll 1$) и умеренных размеров, на гиперповерхности $F_1(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = 0$ теряет статическую устойчивость в форме неустойчивости панели, при которой срединная поверхность необтекаемой пластинки «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания» при всех значениях $2 > \beta_x^2 \ge (\beta_x^2)_{cr}$ и при всех фиксированных значениях остальных параметров, в отличие от достаточно широких пластинок ($\gamma \gg 1$), которые при всех $2 > \beta_x^2 \ge (\beta_x^2)_{locinst}$ теряют статическую устойчивость в форме локальной неустойчивости на гиперповерхности $F_{loc.inst}(\nu,\beta_x^2) = 0$, при которой «выпучивается» лишь только узкая полоса вдоль стороны b пластинки в окрестности края $x=0$.

Следует отметить, что из множества корней $\{(\beta_x^2)_{cr}\}$ уравнения (3.19), полученных при различных значениях параметров n, γ и ν, наименьшему значению корня соответствует значение $n=1$ при фиксированных значениях остальных параметров [1].

В табл. 1 приведены критические значения коэффициента напряжения $(\beta_x^2)_{cr}$ для различных значений параметров γ и ν при $n=1$ с точностью до порядка 10^{-4}.

Как следует из данных, приведённых в табл. 1, критический коэффициент напряжения неустойчивости панели $(\beta_x^2)_{cr}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν. При фиксированном значении коэффициента Пуассона

ν критическое значение коэффициента напряжения $(\beta_x^2)_{cr}$ возрастает в интервале $\gamma \in (0, 0.9)$, а на промежутке $\gamma \in [0.9, 3)$ зависимость $(\beta_x^2)_{cr}$ от параметра γ – сложная.

Таблица 1

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\leq$ 0.01	0.8752	0.7501	0.7001	0.6251	0.5000
0.1	0.8911	0.7654	0.7149	0.6391	0.5122
0.2	0.9392	0.8108	0.7589	0.6804	0.5480
0.3	1.0178	0.8839	0.8293	0.7459	0.6040
0.4	1.1228	0.9796	0.9204	0.8297	0.6739
0.5	1.2447	1.0869	1.0215	0.9210	0.7480
0.6	1.3623	1.1866	1.1141	1.0033	0.8135
0.7	1.4393	1.2529	1.1763	1.0594	0.8594
0.8	1.4541	1.2744	1.1993	1.0835	0.8828
0.9	1.4321	1.2665	1.1958	1.0852	0.8899
1.0	1.4039	1.2497	1.1829	1.0774	0.8887
1.2	1.3681	1.2239	1.1610	1.0613	0.8808
1.5	1.3607	1.2152	1.1524	1.0534	0.8750
1.8	1.3670	1.2180	1.1543	1.0541	0.8747
2.0	1.3681	1.2189	1.1550	1.0547	0.8749

Начиная, примерно, с значения $\gamma = 3$, критический коэффициент напряжения $(\beta_x^2)_{cr}$ зависит только от коэффициента Пуассона ν и при этом с точностью до порядка 10^{-9} малости имеет место условие:

$$(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{locinst} \text{ при всех } \gamma \geq 3 \text{ и } \nu. \tag{3.28}$$

Здесь $(\beta_x^2)_{locinst}$ – значения критического коэффициента напряжения локальной неустойчивости, приведённые в табл. 2 для различных значений Пуассона ν, соответствующие полубесконечной пластине–полосе и достаточно широким пластинкам, у которых $\gamma \geq \gamma_{gr}$.

Таблица 2

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$(\beta_x^2)_{locinst}$	1.36718	1.21874	1.15500	1.05468	0.87500

Как следует из данных, приведённых в табл. 2, критический коэффициент напряжения локальной неустойчивости $(\beta_x^2)_{locinst}$ также меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν.

В силу условия (3.28) очевидно, что значение

$$\gamma = \gamma_{gr} = 3 \tag{3.29}$$

является границей между областью неустойчивости панели и областью локальной неустойчивости в параметрическом пространстве задачи устойчивости необтекаемой сжатой пластинки.

Тем самым, при значениях $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{cr}$ (табл.1) невозмущённое состояние равновесия прямоугольных необтекаемых сжатых пластинок достаточно длинных и умеренных размеров, у которых $\gamma < 3$, теряют статическую устойчивость в форме неустойчивости панели, а достаточно широкие пластинки, начиная с $\gamma = 3$ при значениях $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{locinst}$ (табл.2) теряют статическую устойчивость в форме локальной неустойчивости, аналогично полубесконечной пластине–полосе $\gamma = \infty$.

Заметим, что в работе [16] при исследовании задачи устойчивости прямоугольной пластинки с одним свободным краем, нагруженным консервативной нагрузкой, получено уравнение, тождественное уравнению (3.19), записанное в других обозначениях.

4. Перейдём теперь к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой сжатой прямоугольной пластинки при допустимых значениях параметра скорости потока газа

$$q(V) \in \left(\left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2 - 1)^2 + 3}\right)\Big/3,\ \infty\right) \tag{4.1}$$

и коэффициента напряжения β_x^2 (табл.1 и 2), при всех значениях параметра $\gamma \in (0, \infty)$ и коэффициента Пуассона ν .

Исследуем с помощью численных методов дисперсионные уравнения (3.1), (3.3) и (3.6).

В пространстве «существенных» параметров $M = \left\{q(V), n, \gamma, \beta_x^2, \nu\right\}$ рассматриваемой системы «пластинка–поток» введём в рассмотрение область устойчивости M_0 и области статической неустойчивости M_1, M_2, соответствующие, соответственно, дивергенции сжатой панели и локализованной дивергенции.

В соответствии с соотношениями (3.1) и (3.3) область устойчивости $M_0 \in M$ невозмущённого состояния равновесия системы «сжатая пластинка–поток» будет определяться неравенствами:

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) > 0,\ F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) > 0. \tag{4.2}$$

Границами области устойчивости M_0 в пространстве её параметров M являются гиперповерхности:

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = 0, \tag{4.3}$$

$$F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) = 0. \tag{4.4}$$

Из способа разбиения пространства параметров M исходной задачи на области устойчивости и статической неустойчивости, очевидно, что области неустойчивости M_1, M_2 определяются, соответственно, соотношениями

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) < 0\,, \tag{4.5}$$

$$F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) < 0\,. \tag{4.6}$$

На границе (4.3) области устойчивости M_0 невозмущённое состояние равновесия сжатой пластинки теряет статическую устойчивость в форме дивергенции панели, а на границе (4.4) – в форме локализованной дивергенции.

Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2)$, полученные подстановкой значений первых корней $q_{cr.div.} = q_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2)$ уравнения (4.3) в выражение (2.13), разграничивают области устойчивости M_0 и статической неустойчивости в форме дивергенции панели M_1.

При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в форме дивергенции панели. В сжатой прямоугольной пластинке при обтекании возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению ее формы – поверхность пластинки «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_x^2)$, полученные подстановкой значений корня $q_{loc.div.} = q_{loc.div}(\nu, \beta_x^2)$ уравнения (4.4) в выражение (2.14), разграничивают области устойчивости M_0 и статической неустойчивости M_2 в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ достаточно широкой пластинки и полубесконечной пластины–полосы.

При скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к неустойчивости в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ сжатой достаточно широкой пластинки. Вследствие обтекания в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки вдоль её свободного края $x = 0$.

Границей между областями статической неустойчивости M_1 и M_2 является гиперповерхность

$$\lim_{\gamma \to \gamma_*} F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = F_{locdiv}(q, \nu, \beta_x^2) = 0\,,\ \gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_x^2) \gg 1, \tag{4.7}$$

при всех значениях (4.1) параметра скорости q, n, $\beta_x^2 \in (0, (\beta_x^2)_{cr})$ и коэффициента Пуассона ν.

Здесь $\gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_x^2)$ – граничное значение параметра γ, разграничивающее области неустойчивости в форме дивергенции панели M_1 и в форме локализованной дивергенции M_2 при фиксированных значениях остальных параметров рассматриваемой задачи устойчивости: при значениях $\gamma < \gamma_*$ возможна потеря статической устойчивости только в форме дивергенции панели, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ – в форме локализованной дивергенции. При этом, уравнение (3.1) при всех значениях n, $\gamma \geq \gamma_*$, $\beta_x^2 \in (0,(\beta_x^2)_{cr})$ и ν имеет один действительный корень q_{crdiv}, зависящий только от ν и β_x^2, равный корню $q_{loc.div}(\nu,\beta_x^2)$ уравнения (3.3) в силу условия (4.7):

$$q_{cr.div}(\gamma_*,\nu,\beta_x^2) = q_{cr.div}(\nu,\beta_x^2) = q_{loc.div}(\nu,\beta_x^2),\ \gamma \geq \gamma_* . \tag{4.8}$$

Таким образом, как в случае полубесконечной пластины–полосы ($\gamma \to \infty$) с ненагруженными краями ($\beta_x^2 = 0$) [13], плоская форма равновесия сжатой достаточно широкой прямоугольной пластинки ($\gamma \geq \gamma_*$) при значениях скорости потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$.

5. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$, параметризованных надлежащим образом. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$ в многопараметрическом пространстве M.

С помощью численных методов анализа найдены первые корни $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n,\gamma,\beta_x^2,\nu)\mathbb{R}$ уравнения (3.1) и корни $q_{\text{loc}.div} = q_{\text{loc}.div}(\beta_x^2,\nu)$ уравнения (3.3) для различных значений параметров n, β_x^2, γ и ν в интервале $q \in (\left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3}\right)\big/3, \infty)$ при условии, что $V_{crdiv} > V_{nop.} = a_0 M_0$ и $V_{locdiv} > V_{nop.} = a_0 M_0$.

Далее, подставляя значения $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n,\gamma,\beta_x^2,\nu)$ и $q_{\text{loc}.div} = q_{\text{loc}.div}(\beta_x^2,\nu)$ в выражения (2.13) и (2.14) соответственно, определяем соответствующие значения приведённых критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\text{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

При этом, как показал численный анализ, наименьшему значению приведённых критических скоростей $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $V_{\text{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ при фиксированных значениях параметров $\gamma \in [0,\infty)$, $\beta_x^2 \in (0,(\beta_x^2)_{cr})$ и $\nu \in (0, 0.5)$ соответствует значение $n=1$, так что вдоль стороны b всегда образуется одна полуволна.

Найдена граница $\gamma = \gamma_*$ перехода из области дивергенции панели M_1 в область локализованной дивергенции M_2 в соответствии с условием (4.8).

Как оказалось,

$$\gamma_* = 3 \tag{5.1}$$

при всех значениях ν и $\beta_x^2 > 0$ с точностью до порядка 10^{-9} малости, которое равно граничному значению (3.29), полученному при исследовании задачи устойчивости необтекаемой сжатой пластинки в разделе 3 данной статьи. Тем самым, обтекание не приводит к смещению границы между областями статической неустойчивости M_1 и M_2.

Заметим, что граничное значение (5.1) больше соответствующего граничного значения, полученного в работах [13, 14] при исследовании задач устойчивости ненагруженной обтекаемой панели ($\beta_x^2 = 0, \beta_y^2 = 0$) и сжатой панели в направлении, перпендикулярному к скорости потока газа ($\beta_x^2 = 0, \beta_y^2 \neq 0$), соответственно, которое $\gamma_* = 2$ и с точностью до порядка 10^{-9} малости не зависит от остальных параметров задачи. Смещение границы γ_* в направлении более широких пластинок (5.1) свидетельствует о более ярко выраженном дестабилизирующем действии приложенных сжимающих сил N_x к кромкам $x = 0$ и $x = a$ пластинки, нежели в случае нагружённой панели силами N_y, приложенными к кромкам $y = 0$ и $y = b$ [14].

В табл. 3–5 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости обтекаемой сжатой прямоугольной пластинки, характеризующие наиболее представительные случаи зависимостей приведённых критических скоростей локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) = V_{loc.div}(n,\nu,\beta_x^2)$ (табл. 3) и дивергенции панели $V_{crdiv} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)^{-1} = V_{crdiv}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$ (табл. 4,5) от «существенных» параметров системы «пластинка – поток» при $n = 1$.

Таблица 3

ν / β_x^2	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0	295.777	169.893	143.905	114.913	79.668
0.1	272.401	154.859	130.544	102.949	70.296
0.2	248.204	139.813	117.091	91.462	59.301
0.3	223.899	124.323	103.736	80.058	51.422
0.4	199.323	109.625	90.432	68.537	42.071
0.5	175.529	94.404	77.186	57.264	33.016
0.6	151.111	80.060	64.291	46.354	–
0.7	127.068	65.157	51.367	–	–
0.8	103.317	59.003	–	–	–
0.9	80.234	–	–	–	–

Из данных табл. 3 видно, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν при фиксированном значении коэффициента напряжения β_x^2, а с ростом коэффициента напряжения β_x^2 в промежутке $[0, 0.9]$ – убывает, примерно, в 2.4 – 3.7 раза в зависимости от фиксированного значения коэффициента Пуассона ν: при больших значениях ν убывает в менее раз. Это указывает на существенную дестабилизацию равновесного состояния сжатой достаточно широкой пластинки при обтекании, в сравнении с достаточно широкой обтекаемой панели с ненагружёнными краями $(\beta_x^2 = 0)$ [13].

В табл. 3 символом «–» обозначено значение приведенной скорости локализованной дивергенции, соответствующее скорости $V(q_0^l)$, где q_0^l – нижняя граница интервала допустимых значений (4.1): $q_0^l = \left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2 - 1)^2 + 3}\right)\Big/3$.

Как следует из результатов численного анализа дисперсионных уравнений (3.1), (3.6) и (3.8), в случае достаточно длинных панелей, у которых $\gamma \le \gamma_{**} = 0.01$, уравнения (3.1), (3.6) и (3.8) равносильны с точностью до весьма малого порядка при всех допустимых значениях остальных параметров системы. Это, в силу условия (3.18), означает, что обтекаемые достаточно длинные сжатые пластинки при малых сверхзвуковых скоростях также являются неустойчивыми, как и обтекаемые достаточно длинные пластинки, растянутые или с ненагруженными краями [13– 15}.

А из эквивалентности величин $(q + 1 - \beta_x^2)$ и $(q + 1)$, в силу условий (3.5) и $(\beta_x^2)_{cr} < 1.56$ (табл. 1), следует тождественность уравнения (3.6) и соответствующих дисперсионных уравнений пластинок с ненагружёнными краями [13], а также, сжатых и растянутых пластинок по направлению, перпендикулярному к скорости потока газа [14,15], с точностью до порядка 10^{-5} малости и менее.

Таблица 4

β_x^2 \ γ	0. 4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.0	$\begin{Bmatrix} 7.794 \\ 6.761 \\ 6.304 \\ 5.675 \\ 4.559 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 14.650 \\ 12.613 \\ 11.705 \\ 10.448 \\ 8.406 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 25.806 \\ 21.795 \\ 20.227 \\ 18.054 \\ 14.209 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 45.587 \\ 36.233 \\ 33.787 \\ 29.549 \\ 23.065 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 81.466 \\ 59.421 \\ 54.087 \\ 46.171 \\ 35.167 \end{Bmatrix}$
0.1	$\begin{Bmatrix} 7.050 \\ 6.011 \\ 5.593 \\ 4.947 \\ 3.828 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 13.342 \\ 11.259 \\ 10.521 \\ 9.235 \\ 7.203 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 23.793 \\ 20.105 \\ 18.181 \\ 15.958 \\ 12.391 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 41.236 \\ 33.028 \\ 30.560 \\ 26.244 \\ 19.993 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 73.262 \\ 54.651 \\ 48.937 \\ 41.807 \\ 30.928 \end{Bmatrix}$

0.2	6.312 5.257 4.859 4.203 3.134	12.042 9.960 9.202 8.001 6.039	21.549 17.742 16.233 14.065 10.578	27.678 29.831 27.329 23.359 17.136	67.340 49.323 43.916 36.897 26.730
0.3	5.575 4.558 4.161 3.521 –	10.686 8.671 7.960 6.877 4.875	19.314 15.708 14.327 12.258 8.664	33.994 26.633 24.079 20.436 14.498	60.400 47.167 39.133 32.466 22.704
0.4	4.836 3.844 3.440 – –	9.446 7.575 6.825 5.668 3.735	17.334 13.655 12.393 10.335 6.919	30.637 23.423 21.148 17.443 11.685	54.612 38.690 34.453 27.955 18.437
0.5	4.135 – – – –	8.199 6.344 5.612 4.499 –	15.356 11.853 10.532 8.451 –	25.395 20.617 18.171 14.653 –	48.335 34.204 29.587 23.453 –
0.6	3.435 – – – –	6.998 5.167 4.524 – –	13.372 10.013 8.729 – –	23.883 17.597 15.207 – –	42.643 29.436 25.161 19.382 –
0.7	– – – – –	– – – – –	– – – – –	20.698 – – – –	36.976 24.714 – – –

Таблица 5

γ / β_x^2	0.9	1.0	1.2	1.5	1.8
0.0	512.688 96.889 83.771 70.046 51.111	522.740 156.951 128.462 102.093 72.910	608.685 323.260 256.210 194.600 135.374	975.760 595.153 498.939 391.691 268.880	1692.580 990.818 843.082 670.172 464.624
0.1	501.407 88.449 76.142 63.166 45.758	506.388 143.090 115.774 92.001 65.077	576.166 291.473 232.340 174.491 118.286	908.312 540.615 453.790 348.621 236.605	1544.176 909.354 765.145 602.418 408.853

0.2	$\begin{Bmatrix} 486.248 \\ 81.946 \\ 68.544 \\ 57.667 \\ 40.682 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 490.124 \\ 127,248 \\ 104.280 \\ 82.139 \\ 56.517 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 540.250 \\ 263.812 \\ 204.967 \\ 154.388 \\ 102.257 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 834.802 \\ 486.848 \\ 403.990 \\ 309.474 \\ 204.601 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1417.628 \\ 816.627 \\ 686.689 \\ 534.771 \\ 355.222 \end{Bmatrix}$
0.3	$\begin{Bmatrix} 476.969 \\ 70.862 \\ 63.401 \\ 49.304 \\ 33.789 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 469.102 \\ 111.550 \\ 92.384 \\ 72.725 \\ 47.653 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 504.910 \\ 233.053 \\ 181.524 \\ 135.432 \\ 85.644 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 748.594 \\ 438.037 \\ 359.687 \\ 272.618 \\ 173.549 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1269.186 \\ 731.197 \\ 607.546 \\ 466.903 \\ 296.308 \end{Bmatrix}$
0.4	$\begin{Bmatrix} 463.844 \\ 63.485 \\ 53.346 \\ 42.619 \\ 27.607 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 455.466 \\ 98.096 \\ 80.251 \\ 62.180 \\ 39.661 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 473.851 \\ 202.470 \\ 158.178 \\ 115.845 \\ 71.527 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 685.187 \\ 381.342 \\ 312.663 \\ 232.150 \\ 141.989 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1136.163 \\ 643.024 \\ 529.582 \\ 398.260 \\ 245.357 \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 450.768 \\ 55.205 \\ 46.563 \\ 35.964 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 439.495 \\ 84.686 \\ 69.202 \\ 57.720 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 439.620 \\ 172.256 \\ 134.006 \\ 97.132 \\ 56.382 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 616.179 \\ 329.337 \\ 266.306 \\ 194.151 \\ 111.428 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 994.404 \\ 550.564 \\ 454.911 \\ 335.493 \\ 192.548 \end{Bmatrix}$
0.6	$\begin{Bmatrix} 437.741 \\ 46.869 \\ 39.316 \\ 29.460 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 421.273 \\ 71.897 \\ 58.489 \\ 43.452 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 398.896 \\ 146.337 \\ 119.136 \\ 78.121 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 535.305 \\ 277.480 \\ 220.957 \\ 156.447 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 867.481 \\ 446.910 \\ 374.949 \\ 270.340 \\ - \end{Bmatrix}$
0.7	$\begin{Bmatrix} 426.618 \\ 36.781 \\ 32.639 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 403.194 \\ 59.876 \\ 47.476 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 362.561 \\ 115.304 \\ 88.763 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 456.370 \\ 225.203 \\ 175.922 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 731.993 \\ 382.620 \\ 301.052 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$

Следовательно, первоначальное напряжённое состояние оказывает незначительное влияние на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой достаточно длинной пластинки ($\gamma \le 0.01$) при всех допустимых значениях коэффициента напряжения: $\beta_x^2 \in [0, (\beta_x^2)_{cr})$ (табл.1).

При сверхзвуковой скорости потока газа $V(\tilde{q}_0) \approx 76.37 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1} \ge V_{por}$, примерно, на порядок и более превышающей пороговое значение $V_{por} = a_0 M_0$, достаточно длинные пластинки ($\gamma \le \gamma_{**} = 0.01$) как и бесконечно удлинённая пластинка ($\gamma = 0$), будучи неустойчивыми, становятся устойчивыми, после чего вновь теряют устойчивость при скорости $V \ge V_{crdiv} \approx 484.77 \cdot D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$.

В табл. 4 и 5 представлены значения приведённой критической скорости дивергенции $\left\{V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\right\}$ панели умеренных размеров $\gamma \in (0.2, 2)$ при некоторых значениях параметров $\beta_x^2 \in [0, (\beta_x^2)_{cr})$ и коэффициента Пуассона ν, в которых значения приведённой скорости дивергенции, взятые в фигурные скобки, соответствуют значениям: 0.125, 0.25, 0.3, 0.375 и 0.5 коэффициента Пуассона соответственно.

Как следует из данных табл. 4 и 5, приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, зависящая от параметров γ, β_x^2 и ν, меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, возрастает с ростом γ в интервале $(0.2, 2)$ примерно на два порядка при всех фиксированных значениях β_x^2 и ν, а с ростом β_x^2 в интервале $[0, 0.7)$ убывает примерно в $2-2.5$ раза при фиксированных значениях γ и ν.

Из сопоставления данных, приведённых в табл. 1, 4 и 5, следует, что при всех значениях $\gamma \in (0.2, 2)$ и ν обтекание приводит к «скачкообразному» росту коэффициента напряжения β_x^2, примерно, в $1.5-2$ раза.

Вследствие этого приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ «скачкообразно» падает в $1.5-2.5$ раза, в сравнении с критической скоростью дивергенции панели с ненагружёнными краями (I-ая строка табл. 4 и 5), что свидетельствует о существенной дестабилизации, оказываемым первоначальным напряжённым состоянием на плоскую форму равновесия пластинки при обтекании. Наиболее ярко эффект дестабилизации проявляется при значениях $\gamma \geq 1.8$ и $\nu = 0.3$ (табл. 3–5).

Следует отметить, что анализ численных результатов работы проведён для стальной пластинки, у которой отношение $2ha^{-1}$ (или $2hb^{-1}$) равно 0.015.

Таким образом, приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, а также критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, являются убывающими функциями от коэффициента напряжения β_x^2 при фиксированных значениях остальных параметров.

5. Основные результаты. В работе получено аналитическое решение задачи статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, сжатой по направлению сверхзвукового потока газа, набегающим на её свободный край.

А также, с целью получения корректной и полной оценки влияния первоначального напряжённого состояния на невозмущённое состояние равновесия пластинки при обтекании, исследована задача статической неустойчивости невозмущённого состояния равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки, нагружённой сжимающими силами, расположенными вдоль свободного и противоположного к нему шарнирно закреплённого краёв, и найдено её аналитическое решение.

Сформулировано в виде простого алгебраического критерия необходимое условие потери статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия пластинки в форме локализованной неустойчивости (необтекаемая пластинка) и в форме локализованной дивергенции (обтекаемая пластинка).

Показана возможность потери статической устойчивости необтекаемой пластинки в форме локализованной неустойчивости и, соответственно, обтекаемой пластинки в форме локализованной дивергенции.

Найдены критические значения сжимающего напряжения, зависящие от коэффициента Пуассона и отношения сторон панели, при которых плоская форма равновесия необтекаемой пластинки теряет устойчивость как в форме неустойчивости панели, так и в форме локальной неустойчивости. Найдена граница перехода от одной формы неустойчивости к другой.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости: дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Определены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия обтекаемой пластинки теряет статическую устойчивость в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции в зависимости от параметров системы «пластинка–поток» в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба. При этом, как оказалось, обтекание приводит к «скачкообразному» росту коэффициента напряжения, примерно, в $1.5-2$ раза.

Установлено, что граница перехода от неустойчивости панели к локальной неустойчивости и от дивергенции панели к локализованной дивергенции в случае необтекаемых и обтекаемых пластинок, соответственно, одна и та же: обтекание не приводит к изменению границ между соответствующими формами статической неустойчивости.

Однако, в данном случае, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими силами, направленными по потоку газа, приводит к смещению указанной границы в направлении возрастания параметра отношения сторон панели, в сравнении с обтекаемой панелью с ненагружёнными краями [13], как и с панелью, нагружённой сжимающими силами, направленными перпендикулярно к потоку газа [14]. Это свидетельствует о более ярко выраженном дестабилизирующем действии на устойчивость системы «пластинка–поток».

Таким образом, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими силами, направленными по потоку газа, приводит к существенной дестабилизации плоской формы равновесия прямоугольных пластинок умеренных размеров и достаточно широких, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа в отличие от достаточно длинных пластинок. При этом, при больших значениях параметра отношения сторон панели, примерно порядка одной десятой и более, с ростом коэффициента напряжения приведённая критическая скорость дивергенции панели «падает», примерно, в $1.5-2.5$ раза, а приведённая критическая скорость локализованной дивергенции – $2.4-3$ раза при фиксированных значениях остальных параметров в сравнении с соответствующими скоростями ненагружённой панели. А при меньших значениях параметра отношения сторон пластинки, порядка менее одной десятой, соответствующим достаточно длинным прямоугольным пластинкам, первоначальное напряжённое состояние оказывает незначительное влияние на поведение пластинки при обтекании сверхзвуковым потоком газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем..– М.: Физматгиз. 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. Moscow: Physmathgiz. 1963. 880 p. (In Russian).
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. Moscow: Science. 1961. 329p. (In Russian).
3. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин. // Докл. АН СССР. 1954. Т.95. № 3. С.38 – 46. Ishlinskii A.Yu. About the same limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates. // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V.95. № 3. Pp.38-46. (In Russian).
4. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С.231–243. Movchan A.A. On stability of a panel moving in a gas.// Proceed. of USSR Academy of Sciences. PMM. 1957. V.21. № 2. Pp.231-243. (In Russian).
5. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods.// Moscow: Science. Physmathlit. 1995. 320 p.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968. Strength. Stability. Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I. A. Birger and Ya. G. Panovko. – Moscow.: Mechanical Engineering. 1968.
7. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells.- M.: Science.2006.247 p. (In Russian).
8. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122. Novichkov Yu.N. A flutter of plates and shells. Results of science and technology Mechanics of deformable solids. – Moscow: Science. 1978. V.11. Pp. 67-122. (In Russian).
9. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755. Ilyushin A.A. Law of plane sections at high supersonic velocity // PMM. 1956. V. 20. No. 6. Pp. 733-755. (In Russian).
10. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P. 1109–1118.
11. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave.// Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960, v. 6, № 1, pp. 124–126. (In Russian).
12. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34. (Proceed. NAS of Armenia. Mechanics. 2012. V.65(1). P. 29–34.)
13. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. //

Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т.67, №2, с.12- 42. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V. 67(2). P. 12–42. (In Russian).

14. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т.70. №4. С.12–34. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70(4). P.12–34. (In Russian).
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции растянутой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 2, с.37–58. Belubekyan M.V., S.R. Martirosyan. On divergence of the stretched panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2018. V. 71(2). P.37–58. (In Russian).
16. Белубекян М.В., Саакян А.А. О локализованной неустойчивости свободного края опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки при различных условиях закрепления четвертой стороны// МТТ. 2018. № 3. С.61–66. Belubekyan M.V., Sahakyan A.A. On the localized instability of a free edge supported on two opposite sides of a rectangular plate under various conditions of fixing the fourth side // Mechanics of Solids. 2018. № 3. P. 61–66. (In Russian).
17. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А. , Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38. Baghdasaryan G.E., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Marzocca P. Effect of supersonic flow on the character of amplitude-frequency dependence of nonlinear vibrations of flexible plates.// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2013. V.66. № 3. Pp. 24–38.(In Russian).
18. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер нелинейных колебаний гибких пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа// Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. № 4. С. 20–40. Baghdasaryan G.E., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. Character of nonlinear vibrations of elastic plates streamlined by a supersonic gas flow.// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2016. V.69. № 4. P.20-40. (In Russian).

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096; **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 30.08.2018 г.