

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ
КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИЦИОННЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С
МАГНИТОСТРИКЦИОННЫМ СЛОЕМ**

Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А., Микилян М.А.

Ключевые слова: Двухслойные магнитострикционные пластинки, колебания, изгиб.

Բաղրասարյան Գ.Ե., Դանոյան Է.Ա., Միկիլյան Մ.Ա.

**Մագնիսաստրիկցիոն շերտով կոմպոզիցիոն երկշերտ սալերի մագնիսաառաձգական
տատանումների խնդրի ձևակերպումը**

Հիմնաբառեր: Երկշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալեր, տատանումներ, ծռում

Աշխատանքը նվիրված է ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտում գտնվող մագնիսապես ակտիվ երկշերտ սալի տատանումների մաթեմատիկական մոդելավորմանը: Մալի շերտերից մեկը պատրաստված է դիէլեկտրիկ իզոտրոպ մագնիսաստրիկցիոն, իսկ մյուսը՝ դիէլեկտրիկ կոմպոզիցիոն նյութից, որի էլեկտրամագնիսական հատկությունները համարժեք են վակուումի հատկություններին: Բարակ սալերի և ֆերոմագնիսական մարմինների մագնիսաառաձգականության գծայնացված տեսությունների հիման վրա ստացված են դիտարկվող մագնիսաառաձգական համակարգի դինամիկական վարքը նկարագրող հիմնական հավասարումներն ու եզրային պայմանները: Դրանց հիման վրա ձևակերպված է մաթեմատիկական ֆիզիկայի համապատասխան խնդիրը, որը ցույց է տալիս, որ ա) եթե մագնիսական դաշտը ստացիոնար է, ապա այդպիսի դաշտերի ազդեցության տակ սալը ծռվում է, բ) իսկ եթե արտաքին մագնիսական դաշտը ոչ ստացիոնար է, ապա այն սալում գրգռում է ստիպողական մագնիսաառաձգական տատանումներ: Այսինքն՝ դիտարկվող անհամասեռ սալը ըստ ժամանակի հարմոնիկ մագնիսական դաշտում կարող է դառնալ գրգռումների տարածման աղբյուր: Հավասարման գործակիցներում և եզրային պայմաններում մասնակցում է կոմպոզիցիոն նյութի ամրավորման անկյունը, որը, էապես ազդում է նշված երևույթների վրա:

Baghdasaryan G.Y., Danoyan E.H., Mikilyan M.A.

**Statement of the problem of magnetoelastic vibrations of composite
double-layered plates with magnetostrictive layer**

Keywords: Two-layered magnetostrictive plates, Vibrations, Bending.

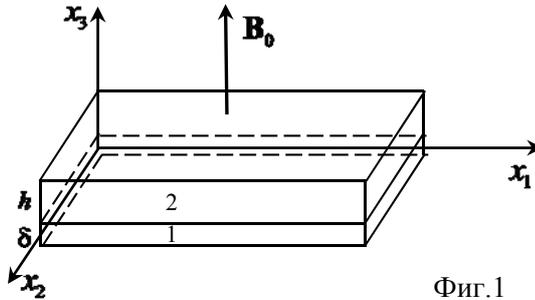
The work is devoted to mathematical modeling of vibrations of two-layered magnetoactive plate in a non-stationary magnetic field. Material of one of the layers of the plate is an isotropic magnetostrictive dielectric, and the other one - is made of a dielectric composite material whose electromagnetic properties are equivalent to the properties of a vacuum. Based on the theory of thin plates and on the linearized theory of magnetoelasticity of ferromagnetic bodies, basic equations and boundary conditions are obtained describing the dynamic behavior of magnetoelastic system under consideration. On this basis, the corresponding problem of mathematical physics is formulated, which shows (a) if magnetic field is a stationary, then the plate bends under the action of such fields; (b) if external magnetic field is non-stationary, then it stimulates the forced magnetoelastic vibrations of the plate. Thus, the examined inhomogeneous plate in a harmonic in time magnetic field that becomes a source of perturbation propagation. The angle of reinforcement of the composite layer is included in coefficients of equations and boundary conditions, which significantly affects these phenomena.

Введение

Работа посвящена математическому моделированию колебаний двухслойной магнитоактивной пластинки в нестационарном магнитном поле. Материал одного из слоёв пластинки является изотропным магнестрикционным диэлектриком, а другой изготовлен из диэлектрического композиционного материала, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума. На основе теории тонких пластин и линеаризованной теории магнитоупругости ферромагнитных тел получены основные уравнения и граничные условия, описывающие динамическое поведение рассматриваемой магнитоупругой системы. На этой основе сформулирована соответствующая задача математической физики, которая показывает: а) если магнитное поле стационарное, то под действием таких полей происходит изгиб пластинки, б) если же внешнее магнитное поле нестационарное, то оно возбуждает вынужденные магнитоупругие колебания пластинки. Т.е. рассматриваемая неоднородная пластинка в гармоническом во времени магнитном поле может стать источником распространения возмущений. В коэффициенты уравнений и граничных условий входит угол армирования композиционного слоя, который, по-видимому, будет существенно влиять на указанные явления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из двух однородных упругих слоев (фиг.1). Нижний слой пластинки изготовлен из изотропного диэлектрического магнестрикционного ферромагнитного материала и имеет толщину δ . Материал верхнего слоя является композиционным диэлектриком, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума. Верхний слой имеет толщину h .



Фиг.1

Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что координатная плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью магнестрикционного слоя. В слое с номером «1» (нижний слой) координата x_3 изменяется в интервале $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$, а в слое с номером «2» (верхний слой) – в интервале

$\frac{\delta}{2} \leq x_3 \leq \frac{\delta}{2} + h$. Считается, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения.

Пусть пластинка помещена в нестационарном поляризующем магнитном поле, который в отсутствие пластинки характеризуется магнитной индукцией $\mathbf{B}_0(0, 0, B_{03}(t))$. При помещении слоистой магнитоэластичной пластинки в магнитном поле происходит намагничивание слоёв пластинки, приводящее как к изменению характеристик магнитного поля во всем пространстве, так и к деформированию пластинки. Для получения уравнений и граничных условий магнитоупругости рассматриваемой пластинки в случае малых возмущений, следуя [1-4], представим характеристики магнитного поля в виде

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b}$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_* + \mathbf{m}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_* + \mathbf{h}$, где \mathbf{B}_* , \mathbf{M}_* и \mathbf{H}_* – соответственно, магнитная индукция, намагниченность и напряжённость магнитного поля недеформируемой пластинки, \mathbf{b} , \mathbf{m} , \mathbf{h} – добавления к указанным величинам, обусловленные деформацией пластинки. Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

Здесь, как в линейной теории магнитоупругости, считается, что добавления \mathbf{m} , \mathbf{b} , \mathbf{h} являются малыми по сравнению с соответствующими величинами, характеризующими магнитное поле недеформируемой пластинки. В работе [3], используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [1-6] и теории малых возмущений, путём линеаризации получены линейные уравнения и граничные условия, описывающие динамические процессы в указанной магнитоактивной среде.

Согласно сказанному, имеем следующие:

уравнения во внутренней области пластинки (в области занимаемым слоем с номером «1»)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_{ik}^{(1)}}{\partial x_i} + \mu_0 M_*^i \left(\frac{\partial H_{*k}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) + \mu_0 m_i \frac{\partial H_{*k}}{\partial x_i} = \rho_0^{(1)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\ \text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mu_0 (\mathbf{h} + \mathbf{m}); \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{ij}^{(1)} = s_0^{ij} + c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu_0 e_{ijk} m_k, \\ H_k = A^{kl} M_{*l} + g_{ikl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + A^{kl} m_l, \\ s_0^{ij} = \mu_0 M_{*j} M_{*k} + \frac{1}{2} \mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l}; \end{array} \right. \quad (2)$$

где s_{ik} – компоненты тензора напряжений; u_k – компоненты вектора упругих перемещений; h_k, m_k и b_k – компоненты векторов \mathbf{h}, \mathbf{m} и \mathbf{b} ; x_i – декартовы координаты; **уравнения движения во внутренней области (в области занимаемым слоем с номером «2»)** являются обычные уравнения линейной теории упругости

$$\frac{\partial s_{ik}^{(2)}}{\partial x_i} = \rho_0^{(2)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где $\{s_{ik}^{(2)}\}$ – тензор упругих напряжений в слое «2». Указанный композиционный слой состоит из $2n$ элементарных слоёв ортотропного композиционного материала, уложенных поочерёдно под углом $\pm\varphi$ к оси x_1 . И поэтому, материал этого слоя будет ортотропным, упругие характеристики B_{ij} которого в главных геометрических направлениях пластинки определяются через упругие характеристики B_{ij}^0 собственных слоёв в главных физических направлениях по известным формулам поворота [7] и имеют следующие представления [8]:

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11}^0 \cos^4 \varphi + 2B_0 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22}^0 \sin^4 \varphi, \\ B_{22} &= B_{11}^0 \sin^4 \varphi + 2B_0 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22}^0 \cos^4 \varphi, \\ B_{12} &= B_{12}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2B_0] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ B_{66} &= B_{66}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2B_0] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \end{aligned}$$

где

$$B_0 = B_{12}^0 + 2B_{66}^0.$$

В силу сказанного для материала слоя «2» имеют место следующие соотношения упругости:

$$\begin{aligned} s_{11}^{(2)} &= B_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + B_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ s_{22}^{(2)} &= B_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + B_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ s_{12}^{(2)} &= B_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \end{aligned} \quad (4)$$

уравнения во внешней области (в области вне магнитоэлектрического слоя пластинки)

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)}. \quad (5)$$

Здесь индекс «e» означает принадлежность к внешней среде;

условия сопряжения для напряжений на поверхности S_0 нижнего слоя пластинки, граничающего с вакуумом $\left(x_3 = -\frac{\delta}{2}\right)$

$$s_{ki}^{(1)} N_k^0 = [T_{ki}^{(e)} - T_{ki}] N_k^0, \quad (6)$$

условия сопряжения для напряжений на поверхности раздела слоёв $\left(x_3 = \frac{\delta}{2}\right)$

$$(s_{ki}^{(1)} - s_{ki}^{(2)}) N_k^0 = [T_{ki}^{(e)} - T_{ki}] N_k^0, \quad (7)$$

условия сопряжения для магнитных величин на поверхности S_0 нижнего слоя

$$[b_k - b_k^{(e)}] N_k^0 = [B_{*m} - B_{*m}^{(e)}] \frac{\partial u_k}{\partial x_m} N_k^0, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{mnk} \left\{ [h_n - h_n^{(e)}] N_m^0 - [H_{*n} - H_{*n}^{(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} N_i^0 \right\} = 0;$$

где T_{ki} и $T_{ki}^{(e)}$ – тензоры напряжений Максвелла для нижнего слоя и окружающей его среды, N_k^0 – компоненты вектора внешней нормали \mathbf{N}_0 к соответствующей поверхности нижнего слоя S_0 , ε_{ijk} – символ Ливи-Чивиты,

$$T_{ki}^{(e)} = \mu_0 H_{*k}^{(e)} H_{*i}^{(e)} - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} [\mathbf{H}^{(e)}]^2 + \mu_0 H_{*k}^{(e)} h_i^{(e)} + \mu_0 h_k^{(e)} H_{*i}^{(e)} - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{h}^{(e)}, \quad (9)$$

$$T_{ki} = H_{*k} B_{*i} - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}^2 + H_{*k} b_i + h_k B_{*i} - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H} \mathbf{h};$$

условия сопряжения для напряжений на поверхности верхнего слоя пластинки, граничащей с вакуумом $\left(x_3 = \frac{\delta}{2} + h\right)$

$$s_{ki}^{(2)} N_k^0 = 0. \quad (10)$$

Для коэффициентов $c_{ijkl}, e_{ijk}, g_{ijk}$, входящих в материальные уравнения (2) магнитоstrictionного слоя, имеют место следующие представления [1,4]:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} = & C_{ijkl} + \mu_0 A_{pq} M_{*r} M_{*j} \left(\delta_{ik} \delta_{pl} \delta_{rq} + \delta_{kl} \delta_{iq} \delta_{ir} + \delta_{lp} \delta_{iq} \delta_{kr} \right) + \\ & + \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} \left(\delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kl} + \delta_{iq} \delta_{jk} \delta_{pl} + \delta_{ik} \delta_{jq} \delta_{pl} \right) M_{*r} M_{*s} + \\ & + \mu_0 B_{pqrs} \left(\delta_{pk} \delta_{ql} \delta_{is} M_{*j} + \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{is} M_{*k} \right) M_{*r}, \end{aligned}$$

$$e_{ijk} = B_{ijkl} M_*^l + A_{mi} (\delta_{kj} M_{*m} + \delta_{mk} M_{*j}),$$

$$g_{ijk} = B_{jkpi} M_{*p} + A_{rs} (\delta_{is} \delta_{jk} M_{*r} + \delta_{rk} \delta_{is} M_{*j} + \delta_{ij} \delta_{sk} M_{*r}),$$

где C_{ijkl} , A_{kl}^{-1} и B_{ijkl} – соответственно, тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов.

Для магнитострикционного слоя пластинки, который в размагниченном состоянии изотропен по отношению как к магнитным, так и к упругим свойствам, справедливы равенства [2,9,10]:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad A_{kl} = \chi^{-1} \delta_{kl},$$

$$B_{ijkl} = e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$
(11)

где δ_{ij} – символ Кронекера, λ и μ – постоянные Ляме магнитострикционного слоя, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость, e_1, e_2 – магнитострикционные постоянные среды.

Для основных магнитострикционных материалов справедливы следующие неравенства: $\mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l} / \mu \ll 1$, $\chi e_i \gg 1$. В силу этих условий, когда вектор \mathbf{M}_* параллелен одному из осей координатной системы, для тензоров обобщённых упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов получаются следующие упрощённые представления [1,11]:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad g_{ijk} = B_{jkpi} M_{*p}, \quad e_{ijk} = B_{ijkl} M_{*l}.$$
(12)

К уравнениям (5) необходимо присоединить условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

Магнитные величины недеформированной пластинки, входящие в приведённые уравнения и условия, отмеченные символом «*», являются решением следующей задачи магнитостатики:

уравнения магнитостатики во внутренней области магнитострикционного слоя:

$$\text{rot } \mathbf{H}_* = 0, \quad \text{div } \mathbf{V}_* = 0, \quad \mathbf{V}_* = \mu_0 (\mathbf{H}_* + \mathbf{M}_*);$$
(13)

уравнения магнитостатики во внешней области магнитострикционного слоя:

$$\text{rot } \mathbf{H}_*^{(e)} = 0, \quad \text{div } \mathbf{V}_*^{(e)} = 0, \quad \mathbf{V}_*^{(e)} = \mu_0 \mathbf{H}_*^{(e)}, \quad \mathbf{M}_*^{(e)} = 0;$$
(14)

условие сопряжения на поверхности магнитострикционного слоя с вакуумом и условие на бесконечности:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_* - \mathbf{B}_*^{(e)}) \cdot \mathbf{N}^0 = 0, \quad (\mathbf{H}_* - \mathbf{H}_*^{(e)}) \times \mathbf{N}^0 = 0 \quad \text{при } x_3 = -\frac{\delta}{2} \\
\mathbf{H}_*^{(e)} \rightarrow \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \quad \text{при } |r| \rightarrow \infty;
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$ – напряжение заданного внешнего магнитного поля, в котором

помещается рассматриваемое тело.

2. Вывод двумерных уравнений колебаний тонкой двухслойной пластинки.

Для применения процедуры получения двумерных уравнений колебаний тонких пластин, необходимо знать характеристики (напряжённость, магнитная индукция и намагничённость) магнитного поля во всем пространстве. Их определяем, решая трёхмерные задачи математической физики, сформулированные в предыдущем параграфе. Решение указанных краевых задач, в случае пластин конечных размеров связано с серьёзными математическими трудностями. Численные решения этих задач для пластинки-полосы приведены в работе [12]. Анализ полученных в этой работе решений показывает, что характеристики магнитного поля для пластинки конечных размеров вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя, практически совпадают с соответствующими характеристиками для бесконечной полосы. На этом основании при определении характеристик магнитного поля пластинку будем считать бесконечной. Тогда, решение задачи (13)-(15) представится в виде:

$$\begin{aligned}
B_{*i}^{(e)} = 0, \quad B_{*i} = 0, \quad H_{*i}^{(e)} = 0, \quad H_{*i} = 0, \quad M_*^i = 0, \quad i = 1, 2; \\
B_{*3}^{(e)} = B_{03}, \quad H_{*3}^{(e)} = \frac{B_{03}}{\mu_0}, \quad M_{*3}^{(e)} = 0, \\
B_{*3} = B_{03}, \quad H_{*3} = \frac{B_{03}}{\mu_0 \mu_r}, \quad M_{*3} = H_{*3}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Для приведения трёхмерных уравнений колебания (1)-(3) к двумерным принимается гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [7], согласно которой имеем:

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2, t), \tag{17}$$

где $u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t), w(x_1, x_2, t)$ – перемещения точек срединной поверхности нижнего слоя пластинки.

Пользуясь формулами (2),(11),(12) и пренебрегая влияниями напряжения s_{33} , с уже принятой точностью $\frac{\mu_0 B_{ijkl} M_{*k} M_{*l}}{\mu} \ll 1$ получаем следующие выражения для

компонент $s_{11}^{(1)}$, $s_{22}^{(1)}$ и $s_{12}^{(1)}$ тензора магнитоупругих напряжений в магнитоупругом слое:

$$\begin{aligned} s_{11}^{(1)} &= (\bar{\lambda} + 2\mu)\varepsilon_{11} + \bar{\lambda}\varepsilon_{22} + \sigma h_3 + \frac{\sigma}{2\mu_0\mu_r} B_{03}, \\ s_{22}^{(1)} &= (\bar{\lambda} + 2\mu)\varepsilon_{22} + \bar{\lambda}\varepsilon_{11} + \sigma h_3 + \frac{\sigma}{2\mu_0\mu_r} B_{03}, \\ s_{12}^{(1)} &= 2\mu^{(1)}\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_3^0, \quad f = -\frac{\chi^2 e_1}{\mu_r} B_3^0 \\ \bar{\lambda} &= \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu}, \quad \lambda_1 = \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \\ \lambda_2 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \quad \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Компоненты же $s_{ij}^{(2)}$ тензора напряжения в слое с немагнитным композиционным материалом определяются согласно (4) с учётом (17).

Подставляя соотношения (18) и (4), соответственно, в уравнения (1)-(3) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учётом поверхностных условий (7)-(10), получим следующие двумерные уравнения колебаний рассматриваемой пластинки относительно u, v, w :

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_1(h_3) = X_1, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_2(h_3) = X_2, \\ L(u, v) + L_{33}w + L_3(h_3) = X_3. \end{cases} \quad (20)$$

В системе (20) L_{ii} , L_{12} , L_{21} , L_{33} – линейные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \left[(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)})\delta + B_{ii}h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left[\mu^{(1)}\delta + B_{66}h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}; \\ L_{12} = L_{21} &= \left[(\bar{\lambda}^{(1)} + \mu^{(1)})\delta + (B_{12} + B_{66})h \right] \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$L_{33} = -(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{\delta^3}{12} \Delta^2 -$$

$$-\frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} (B_{03})^2 \left[\left(1 - \frac{\chi}{\mu_r} \left(\frac{e_1 - 3e_2}{2} \right) \right) - \frac{d_2}{B_{03}} \right] \delta \Delta -$$

$$-\frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \left[B_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + B_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right],$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \theta(\delta, h) = 1 + 3 \left(1 + \frac{\delta}{h} \right)^2;$$

L_{i3} и $L(u, v)$ – операторы, учитывающие взаимовлияния слоёв пластинки на процесс колебания

$$L_{i3} = -\frac{h(h+\delta)}{2} \left[B_{ii} \frac{\partial^3 w}{\partial x_i^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j^2} \right];$$

$$L(u, v) = \frac{h(h+\delta)}{2} \left[B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \right. \quad (22)$$

$$\left. + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3} \right];$$

при этом, $i=1,2; j = \begin{cases} 2, & \text{если } i=1 \\ 1, & \text{если } i=2 \end{cases}$;

$L_k(h_3)$ – члены, учитывающие влияние индуцированного в пластинке магнитного поля \mathbf{h} :

$$L_i(h_3) = \left(\sigma + \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial h_3}{\partial x_i} dx_3, i=1,2; \quad (23)$$

$$L_3(h_3) = \left(\sigma + \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} x_3 \Delta h_3 dx_3 + \chi B_{03} \left(1 - \frac{d_1}{\mu_0 \mu_r} \right) \left(h_3 \Big|_{x_3=\frac{\delta}{2}} - h_3 \Big|_{x_3=-\frac{\delta}{2}} \right);$$

X_k – компоненты объёмной силы инерционного происхождения [7]

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left[\delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2}; \\
X_2 &= \left[\delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial t^2}; \\
X_3 &= \left[\left[\delta \rho^{(1)} + h \rho^{(2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^{(2)} h (h + \delta)}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] - \\
&\quad - \left(\rho^{(1)} \frac{\delta^3}{12} + \rho^{(2)} \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w.
\end{aligned} \tag{24}$$

3. Определение индуцированного магнитного поля

Для замыкания системы (20) следует определить компоненты h_i индуцированного магнитного поля во всем пространстве. С этой целью вводятся потенциальные функции $\varphi^{(j)}$ посредством

$$\mathbf{h}^{(j)} = \text{grad } \varphi^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2. \tag{25}$$

Здесь индекс $j = 0$ соответствует области $x_3 < -\delta/2$, причём $\varphi^{(0)}$ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta_3 \varphi^{(0)} = 0;$$

индекс $j = 1$ соответствует области $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$, причём $\varphi^{(1)}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\mu_0 \mu_r \Delta_3 \varphi^{(1)} = d_1 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_3^2} + (c - d_2) \Delta_2 w, \tag{26}$$

где Δ_2, Δ_3 – соответственно, двумерный и трёхмерный операторы Лапласа,

$$d_1 = -\frac{\chi^4 e_1^2}{\mu_r^2 (\lambda_3 + 2\mu)} B_{03}, \quad d_2 = \frac{\chi^2}{\mu_r} \left[\frac{e_1 - e_2}{2} - \frac{\lambda e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right] B_{03},$$

$$c = \frac{\chi^2 B_{03}}{2\mu_r} (e_1 - 3e_2);$$

индекс $j = 2$ соответствует области $\delta/2 \leq x_3$, причём $\varphi^{(2)}$ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta_3 \varphi^{(2)} = 0.$$

Указанные уравнения решаются при поверхностных условиях (8). Сформулированные указанным образом граничные задачи решаются в случае

бесконечной пластинки. В результате, найдены потенциальные функции $\varphi^{(j)}$ индуцированного магнитного поля. Ниже приводится только представление функции $\varphi^{(1)}$, необходимое для определения компоненты h_3 в магнитоотрицательном слое, которая входит в состав операторов (20)

$$\varphi^{(1)} = \left(\gamma_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_1 \right) w \operatorname{ch} \tilde{k} x_3 + \operatorname{sh} \tilde{k} x_3 \frac{a}{k} \left(\operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} \right) \frac{d_2}{\mu_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + F_0 w, \quad (27)$$

где

$$a = \frac{k}{n\tilde{k}}, \quad n = \mu_r - \frac{d_1}{\mu_0}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\mu_0 \mu_r - d_1}} k,$$

$$\delta_1 = \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} + a \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \quad \delta_2 = \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} + a \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2},$$

$$\gamma_1 = r \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta a}{2k} z \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2}, \quad \gamma_2 = r \operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta a}{2k} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2},$$

$$r = \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_{03} - F_0, \quad z = \frac{d_2 k^2}{\mu_0}, \quad F_0 = \frac{c - d_2}{\mu_0 \mu_r}.$$

Подставляя (27) в (25) для интересующей нас компоненты h_3 индуцированного магнитного поля при $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$, получается следующее выражение:

$$h_3 = \tilde{k} \left(\gamma_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \gamma_1 \right) w \operatorname{sh} \tilde{k} x_3 + \frac{d_2 a}{\mu_0} \frac{\tilde{k}}{k} \operatorname{ch} \tilde{k} x_3 \left(\operatorname{ch} \frac{\tilde{k} \delta}{2} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \operatorname{sh} \frac{\tilde{k} \delta}{2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right).$$

4. Граничные условия на торцах пластинки

На торцах пластинки можно рассматривать различные граничные условия. В частности, пусть на торце пластинки $x_1 = \operatorname{const}$ ($x_1 = 0$ или $x_1 = a$) имеют место следующие условия:

1) условия жёсткой заделки: $u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), из которых в силу (17) следует

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0. \quad (28)$$

2) отмеченный край свободен от внешних механических воздействий. Тогда, аналогично (6), получаются следующие условия (при $-\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2$):

$$s_{11} = \left((2\mu + \lambda_1) - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \varepsilon_{11} + \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu} \right) \varepsilon_{22} + \sigma h_3 + \frac{\sigma}{2\mu_0\mu_r} B_{03} = T_{11}^{(e)} - T_{11} \quad \text{при} \quad -\delta/2 \leq x_3 \leq \delta/2, \quad (29)$$

$$s_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\delta}{2} \leq x_3 \leq \frac{\delta}{2} + h;$$

$$u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad u_3 = w = 0. \quad (30)$$

Интегрируя условие (29) в пределах $[-\delta/2, \delta/2 + h]$ по x_3 , затем, умножая это же условие на x_3 и интегрируя в указанных пределах, получаем следующие условия при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$:

$$\left[(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)})\delta + B_{11}h \right] \frac{\partial u}{\partial x_1} - B_{11} \frac{h(h+\delta)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -\frac{\sigma\delta}{2\mu_0\mu_r} B_{03}, \quad (31)$$

$$(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{h(h+\delta)}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \left[(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \frac{\delta^3}{12} + B_{11} \frac{h^3}{12} \theta(\delta, h) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0;$$

а из условий (30), как и в предыдущем случае, получаем:

$$v = 0, \quad w = 0. \quad (32)$$

Аналогично, можно рассматривать граничные условия на торце пластинки $x_2 = \text{const}$.

Таким образом, задача колебаний двухслойных магнитоэластичных пластин в поперечном магнитном поле, когда хотя бы один из краёв свободен от внешних механических воздействий, приведена к решению системы (20) при краевых условиях (31) и (32). Легко заметить, что полученная краевая задача, так же, как и в [13], является неоднородной. А это значит:

а) если магнитное поле стационарное, то под действием таких полей происходит изгибание пластинки,

б) если внешнее магнитное поле нестационарное (в частности, $B(t) = B_0 + B_1 \cos \omega t$), то пластинка совершает вынужденные колебания. Т.е. неоднородная пластинка в гармоническом во времени магнитном поле становится источником распространения возмущений.

Если же края пластинки жёстко заделаны, то согласно (20) и (28), присутствие магнитного поля не деформирует пластинку ($u=0, v=0, w=0$) и с учётом (2) и (4)

приводит к появлению нормальных напряжений в пластинке, определяемых формулами:

$$s_{11} = s_{22} = \begin{cases} \frac{\sigma B_{03}}{2\mu_0\mu_r} & \text{при } -\frac{\delta}{2} \leq x_3 \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{\delta}{2} \leq x_3 \leq \frac{\delta}{2} + h \end{cases} \quad (33)$$

Особо отметим, что в условия (31) входит упругий коэффициент B_{11} , который зависит от угла армирования φ композиционного слоя. Следовательно, соответствующим выбором указанного угла можно оптимально регулировать колебательный процесс в пластинке, обусловленный магнитострикционным свойством первого слоя и присутствием магнитного поля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-2C149.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ. 1999. 439 с. (Baghdasaryan G.Y. Vibrations and stability of magnetoelastic systems. Yerevan. YSU Publishing House. 1999. 439 p.) (in Russian)
2. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин. //МТТ. 1992. № 3. С 87-94 (Bagdasaryan G.Y., Danoyan E.A. Mathematical modeling of vibrations of two-layered magnetostrictive plates. МТТ. 1992. №3. pp.87-94). (in Russian)
3. Багдасарян Г.Е. Математическое моделирование поведения возмущений в магнитострикционных средах. //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. №24. С.72-75. (Baghdasaryan G.E. Mathematical modeling of perturbation behavior in magnetostrictive media. Mat. methods and phys.-mech. fields. 1986. №24. P.72-75. (in Russian)
4. Pao Y.-H., Yen C.-S. //Int. J. Eng. Sci. 1973. V.11. №4. P.415-436.
5. Brown W.F. Magnetoelastic Interactions. N. Y. Springer-Verlag. 1966. 155p.
6. Maugin G.A. Continuum mechanics of electromagnetic solids. North-Holland-Amsterdam-New-York-Oxford-Tokyo. 1988. 560p.
7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с. (Ambartsumian S.A. General theory of anisotropic shells. М.: Nauka, 1974. 446p). (in Russian)
8. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269с. (Vasiliev V.V. Mechanics of constructions from composite materials. М.: Mechanical Engineering, 1988. 269p). (in Russian)
9. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. Изд. 2-е, переработанное. М.: Наука, 1979. 639с. (Sirotnin Yu.I., Shaskolskaya M.P. Foundations of crystal physics. 2nd Ed., revised. М.: Nauka, 1979. 639p). (in Russian)

10. Сыркин Л.Н. Пьезомагнитная керамика. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. Энергия. 1980. 205 с. (Syrkin L.N. Piezomagnetic ceramics. Ed. 2-nd, revised and supplemented. Energy. 1980. 205 s). (in Russian)
11. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Устойчивость магнитоупругих пластин в продольном магнитном поле. // Доклады НАН РА. 2015. Т.115. №3. С.218-226 (Bagdasaryan G.Y., Danoyan E.A. Stability of magnetostrictive rectangular plates in a longitudinal magnetic field. Reports of NAS RA, vol.115, № 3, 2015, pp.218-226.). (in Russian)
12. Bagdasaryan G.E., Philiposyan G.T. In: Proc. North American Conf. on Smart Structure and Materials (SPIE). USA. 1997, vol. 3039, pp.715-725.
13. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А., Микилян М.А. Математическое моделирование колебаний двухслойной магнитоупругой пластинки. // Доклады НАН РА. 2018. Т.118. №1. С.72-81 (Bagdasaryan G.Y., Danoyan E.A., Mikilyan M.A. Mathematical modeling of vibrations of a two-layer magnetostrictive plate. Reports of NAS RA, vol.118, №1, 2018, pp.72-81). (in Russian)

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – Академик НАН РА, Главный научн. сотр. Института механики НАН РА

Тел.: (060) 71 00 89; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Даноян Эдвард Айказович – Доцент Ереванского Государственного Университета

Тел.: (094) 344506; **E-mail:** edan@ysu.am

Микилян Марине Александровна – Доцент Российско-Армянского Университета, Старший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (091) 191129; **E-mail:** mikilyan@rau.am

Поступила в редакцию 24.03.2018