ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика

УДК 539.3

О ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, двухслойная анизотропная пластинка, смешанные условия, неполный контакт, внутренняя задача, геометрическая нелинейность.

Սարգսյան Ն.Ս. , Խաչատրյան Ա.Մ.

Երկշերտ անիզոտրոպ սալի երկչափ հավասարումների մասին առաձգականության երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

Հիմնաբառեր` ասիմպտոտիկ մեթոդ, երկշերտ անիզոտրոպ սալ, խառը պայմաններ, ոչ լրիվ կոնտակտ, ներքին խնդիր, երկրաչափորեն ոչ գծային

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա` առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև` ոչ լրիվ կոնտակտի պայմաններ:

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M.

On two-dimentional equations two-layer anisotropic plate on the bace of geometrically nonlinear equations of with incomplete (partial) contact between the layers

Key words: asymptotic method two-layer anisotropic plate, mixed conditions, non-full contact, interior problem, geometrically nonlinear

Asymptotic method is applied and two-dimensional linear differential equations with partial derivatives from geometrically nonlinear equations of three-dimensional problem of elasticity theory for two-layer anisotropic plate are received. In the one surface of plate are given values of tensor of stress and in the other surface - mixed conditions of elasticity theory. Between the layers incomplete (partial) contacts conditions are given. Full stress state of plate is formed as sum of main (internal) and boundary stress states.

Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв задан закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений. Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний.

Введение. Многие прикладные задачи для слоистых структур приводят к рассмотрению случаев неполного контакта между слоями. Например, сейсмологические наблюдения указывают, что динамические характеристики отражённых и преломлённых волн на сейсмических границах не всегда соответствуют представлениям о границе, как о жёстком контакте между двумя средами. Для описания полей сейсмологических волн, образующих на тонких границах, используют условия, отличные от условий жёсткого контакта, в частности, учитывающие скачок тангенциальных смещений [1,2].

Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета, в целом [4]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [5,6]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [7]. Вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, когда на её верхней и нижней лицевых плоскостях заданы значения соответствующих компонентов тензора напряжений, рассмотрен в [10]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой – условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, изложены в [11]. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной и многослойной анизотропной термоупругой пластинки в линейной постановке приведены в [12,13]. Решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной анизотропной пластинки в нелинейной постановке асимптотическим методом построено в работе [14], а для двухслойной пластинки при полном контакте слоёв – в работе [15].

В настоящей работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче двухслойной пластинки в нелинейной постановке, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, на нижней – смешанные условия теории упругости, а на плоскости раздела слоёв – условия неполного контакта (задан закон распределения разности тангенциальных перемещений).

1. Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, \quad -h_2 \le z \le h_1\}$, где a – длина, b – ширина, составленная из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя и $k = 1,2$. Общая толщина полосы – $2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Условия на лицевых плоскостях задаются формулами:

$$\begin{gathered}
\sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{+}(x, y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{+}(x, y),\ \sigma_{z} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{z}^{+}(x, y), \quad z = h_1 \\
w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^{-}(x, y),\ \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{-}(x, y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{-}(x, y), \quad z = -h_2
\end{gathered} \tag{1.1}$$

На плоскости раздела $z = 0$ заданы следующие условия неполного контакта**:**

$$\begin{gathered}
\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)},\quad \sigma_{z}^{(1)} = \sigma_{z}^{(2)},\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)},\ w^{(1)} = w^{(2)} \\
u^{(2)} = u^{(1)} + f_1(x, y),\ v^{(2)} = v^{(1)} + f_2(x, y),
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта слоёв (1.2) и условиях на боковой поверхности пластинки. Краевые условия на торцах $x=0,a$ и $y=0,b$ – пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [8,9]. В этих уравнениях введём безразмерные переменные $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\varsigma = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки $(h << l)$.

Выбор асимптотики и вывод двумерных уравнений. Решение внутренней задачи ищется в виде [3,7]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \qquad (1.3)$$

где $Q^{(k)}(\xi,\eta,\zeta)$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – номер приближения, k – номер слоя, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$:

$$q_k = 3 \quad \text{для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \ q_k = 4 \quad \text{для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \qquad (1.4)$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [11-13]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [14,15]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3), с учётом (1.4), в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, нелинейные уравнения теории упругости анизотропного тела, для определения $Q^{(k)}(\xi,\eta,\zeta)$ получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_1^{*(k,s)} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_2^{*(k,s)} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_3^{*(k,s)} = 0
\end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi}+U_{\xi}^{(k,s-3)}+V_{\xi}^{(k,s-3)}+W_{\xi}^{(k,s-1)}=a_{11}\sigma_x^{(k,s)}+a_{12}\sigma_y^{(k,s)}+a_{13}\sigma_z^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{14}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{15}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta}+U_{\eta}^{(k,s-3)}+V_{\eta}^{(k,s-3)}+W_{\eta}^{(k,s-1)}=a_{12}\sigma_x^{(k,s)}+a_{22}\sigma_y^{(k,s)}+a_{23}\sigma_z^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{24}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \varsigma}+U_{\varsigma}^{(k,s-3)}+V_{\varsigma}^{(k,s-3)}+W_{\varsigma}^{(k,s-1)}=a_{13}\sigma_x^{(k,s-2)}+a_{23}\sigma_y^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{33}\sigma_z^{(k,s-4)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-3)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-3)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-2)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \varsigma}+U_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}+V_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}+W_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}=a_{14}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(k,s-1)}+$$

$$+a_{34}\sigma_z^{(k,s-3)}+a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{54}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+a_{64}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \varsigma}+U_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}+V_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}+W_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}=a_{15}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(k,s-1)}+$$

$$+a_{35}\sigma_z^{(k,s-3)}+a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi}+U_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+V_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}=a_{16}\sigma_x^{(k,s)}+a_{26}\sigma_y^{(k,s)}+$$

$$+a_{36}\sigma_z^{(k,s-2)}+a_{46}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

где

$$\sigma_1^{*(k,s)}=\sigma_{11}^{(k,s-3)}+\sigma_{12}^{(k,s-2)},\ \sigma_2^{*(k,s)}=\sigma_{22}^{(k,s-3)}+\sigma_{21}^{(k,s-2)},\ \sigma_3^{*(k,s)}=\sigma_{33}^{(k,s-4)}+\sigma_{13}^{(k,s-2)}$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\left[\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \sigma_x^{(k,s-i)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \varsigma}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \xi}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \sigma_y^{(k,s-i)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \varsigma}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \varsigma}\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi^2}\sigma_x^{(k,s-i)}+ \qquad (1.6)$$

$$\left.+\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta^2}\sigma_y^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi\partial \eta}\sigma_{xy}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi\partial \varsigma}\sigma_{xz}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta\partial \varsigma}\sigma_{yz}^{(k,s-i)}\right]$$

$$\sigma_{12}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \varsigma^2}\sigma_z^{(k,s-i)}+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \varsigma}\frac{\partial \sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial \varsigma}\right]\quad (1,2,3;\mathrm{U,V,W};\ \xi,\eta,\varsigma)$$

$$U_{\xi}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\xi},\quad U_{\xi\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta}\quad (U,V,W)$$

$$U_{\eta}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad U_{\zeta\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad (U,V,W)$$

$$U_{\zeta}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta},\quad U_{\xi\zeta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\quad (U,V,W).$$

Решив систему (1.5), получим:

$$\sigma_{z}^{(k,s)}=\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{z}^{*(k,s)},\ U^{(k,s)}=u^{(k,s)}+u^{*(k,s)},\ (U,V,W),$$

$$\sigma_{x}^{(k,s)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+a_{3}^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{x}^{*(k,s)},$$

$$(x,y;\ 1,2;\ a,b) \tag{1.7}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=B_{16}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+c_{3}^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{xy}^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)}=-\left[L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}\right]\zeta-\left(a_{3}^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\xi}+c_{3}^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\eta}\right)\zeta+$$

$$+\sigma_{xz0}^{(k,s)}+\sigma_{xz}^{*(k,s)},\qquad (x,y;\ 1,2;\ a,b)$$

где дифференциальные операторы $L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам:

$$L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)=B_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\ (1,2;\xi,\eta)$$

$$L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)=B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(B_{12}^{(k)}+B_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{1.8}$$

а коэффициенты $B_{ij}^{(k)},a_{i}^{(k)},b_{i}^{(k)},c_{i}^{(k)}$ – по известным формулам [4,5,7].

$\sigma_{xz0}^{(k,s)},\sigma_{yz0}^{(k,s)},\sigma_{z0}^{(k,s)},u^{(k,s)},v^{(k,s)},w^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1) и (1.2).

Величины со звездочками, входящие в формулы (1.7), как обычно, известны для каждого приближения s, поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены (1.6), обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи.

Величины со звездочками определяются по формулам:

$$\sigma_{z}^{*(k,s)}=-\int_{0}^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial\eta}+\sigma_{3}^{*(k,)}\right)d\zeta,$$

$$u^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\Big(a_{15}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(k,s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(k,s-1)}+a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}-\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-U_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}-V_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}-W_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}\Big)d\zeta$$

$$v^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\Big(a_{14}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(k,s-1)}+a_{34}\sigma_z^{(k,s-1)}+a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{45}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{46}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}--\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}-U_{\eta\zeta}^{(k,s-3)}-V_{\eta\zeta}^{(k,s-3)}-W_{\eta\zeta}^{(k,s-3)}\Big)d\zeta$$

$$w^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\Big(a_{13}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{23}\sigma_y^{(k,s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(k,s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}-U_{\zeta}^{(s-2)}-V_{\zeta}^{(s-2)}-W_{\zeta}^{(s-2)}\Big)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)}=B_{11}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{12}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{16}\omega^{*(k,s)}+a_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+a_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_y^{*(k,s)}=B_{12}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{22}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{26}\omega^{*(k,s)}+b_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+b_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+b_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)}=B_{16}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{26}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{66}\omega^{*(k,s)}+c_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+c_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+c_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)}=-\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(k,s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial\eta}+\sigma_1^{*(k,s)}\right)d\zeta,\ \ (1,2;\ x,y;\ \xi,\eta) \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)}=\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\xi}+U_{\xi}^{(k,s-3)}+V_{\xi}^{(k,s-3)}+W_{\xi}^{(k,s-3)},$$

$$\varepsilon_2^{*(k,s)}=\frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\eta}+U_{\eta}^{(k,s-3)}+V_{\eta}^{(k,s-3)}+W_{\eta}^{(k,s-3)},$$

$$\omega^{*(k,s)}=\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\xi}+U_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+V_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)}\equiv 0$ при $s<k$.
Удовлетворив условиям неполного контакта (1.2), получим:

$$\sigma_{z0}^{(1,s)}=\sigma_{z0}^{(2,s)},\ \sigma_{xz0}^{(1,s)}=\sigma_{xz0}^{(2,s)},\ \sigma_{yz0}^{(1,s)}=\sigma_{yz0}^{(2,s)}$$
$$w^{(1,s)}=w^{(2,s)}=w^{(s)},\ u^{(2,s)}=u^{(1,s)}+f_1^{(s)}(\xi,\eta),\ v^{(2,s)}=v^{(1,s)}+f_2^{(s)}(\xi,\eta) \tag{1.10}$$

где

$$f_k^{(0)}(\xi,\eta)=f_k(l\xi,l\eta),\ f_k^{(s)}(\xi,\eta)=0\ \ s>0,\ k=1,2.$$

С учётом (1.10), удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(s)}, v^{(s)}$:

$$L_{11}\left(C_{ij}\right)u^{(1,s)}+L_{12}\left(C_{ij}\right)v^{(1,s)}+L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_1^{(s)}(\xi,\eta)+L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_2^{(s)}(\xi,\eta)=p_1^{(s)}$$

$$L_{12}\left(C_{ij}\right)u^{(1,s)}+L_{22}\left(C_{ij}\right)v^{(1,s)}+L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_1^{(s)}(\xi,\eta)+L_{22}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_2^{(s)}(\xi,\eta)=p_2^{(s)} \quad (1.11)$$

Обобщённые нагрузки $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ определяются по формулам:

$$p_1^{(s)}=-\left(\sigma_{xz}^{+(s)}-\sigma_{xz}^{-(s)}\right)-\left(a_3^{(1)}\zeta_1-a_3^{(2)}\zeta_2\right)\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\xi}\right]-$$

$$-\left(c_3^{(1)}\zeta_1-c_3^{(2)}\zeta_2\right)\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\eta}\right]+ \quad (1.12)$$

$$+\left(\sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\varsigma_1)-\sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi,\eta,\varsigma_2)\right), \quad \left(1,2;\ x,y;\ \xi,\eta;\ a_3^{(k)},b_3^{(k)}\right)$$

Система уравнений (1.11) при $f_1(\xi,\eta)=f_2(\xi,\eta)=0$ совпадает с соответствующей системой двухслойной пластинки с поверхностными условиями (1.1) при полном контакте между слоями [15].

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)},\sigma_{yz0}^{(k,s)},\sigma_{z0}^{(k,s)},\ w^{(s)}$ определяются по формулам:

$$w^{(s)}=\frac{1}{l}w^{-(s)}-w^{*(2,s)}(\xi,\eta,\varsigma_2),$$

$$\sigma_{z0}^{(k,s)}=\sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\varsigma_1) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)}=\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi,\eta)-\sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\varsigma_1)+\left(L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)}+L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)}\right)+$$

$$+a_3^{(1)}\zeta_1\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\xi}\right]+$$

$$+c_3^{(1)}\zeta_1\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\eta}\right];\ \left(x,y;\ \xi,\eta;u^{(1,s)},v^{(1,s)};a_3^{(k)},b_3^{(k)}\right)$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)},\sigma_{yz}^{\pm(0)},\sigma_z^{\pm(0)}=\sigma_{xz}^{\pm},\sigma_{yz}^{\pm},\sigma_z^{\pm};\ w^{-(0)}=w^{-};\ w^{-(s)},\sigma_{xz}^{\pm(s)},\sigma_{yz}^{\pm(s)},\sigma_z^{\pm(s)}=0, s>0$$

$$\varsigma_1=h_1/h,\ \varsigma_2=-h_2/h,\ h=(h_1+h_2)/2.$$

Операторы $L_{ij}\left(C_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам:

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right)=C_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2C_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+C_{66}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\quad\left(1,2;x,y;\xi,\eta\right)$$

$$L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)=C_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(C_{12}^{(k)}+C_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+C_{26}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\tag{1.14}$$

Жёсткости определяются следующим образом:

$$C_{ij}^{(k)}=\left(-1\right)^{k+1}B_{ij}^{(k)}\varsigma_k, C_{ij}=C_{ij}^{(1)}+C_{ij}^{(2)}.\tag{1.15}$$

2. Нежёсткий контакт. Остановимся более подробно на модели нежёсткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем**:** принимается, что существует тонкий слой толщиной h_0 с исчезающе малой сдвиговой жёсткостью G_0 между контактирующими средами. Отношение $\chi=\lim\limits_{\substack{h_0\to 0\\ G_0\to 0}}\frac{h_0}{G_0}$ может принимать любое значение от 0 до ∞**.** Предельному случаю $\chi=0$ соответствует жёсткий контакт, другому предельному случаю $\chi\to\infty$ – скользящий контакт.

Для промежуточного состояния принимаются [1,2]

$$u^{(2)}-u^{(1)}=f_1^{(s)}=\chi_1\frac{l}{h}\sigma_{xz}\left(z=0\right),\ v^{(2)}-v^{(1)}=f_1^{(s)}=\chi_2\frac{l}{h}\sigma_{yz}\left(z=0\right).\tag{2.1}$$

Постоянные χ_1,χ_2 имеют размерность м^3/Н и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии $z=\text{const}$ и изотропных материалов имеет место соотношение $\chi_1=\chi_2$.

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда, из (1.2) и (2.1) следует:

$$f_1^{(s)}\left(\xi,\eta\right)=\chi_1\sigma_{xz0}^{(k,s)},\quad f_2^{(s)}\left(\xi,\eta\right)=\chi_2\sigma_{yz0}^{(k,s)}.\tag{2.2}$$

Подставив значения $f_1^{(s)}(\xi,\eta)$ и $f_2^{(s)}\left(\xi,\eta\right)$ из (2.2) в (1.12) с учётом (1.14), получим систему дифференциальных уравнений с частными производными для определения $u^{(1,s)}$ и $v^{(1,s)}$.

$$\begin{aligned}\overline{L}_{11}\left(C_{ij}\right)u^{(1,s)}+\overline{L}_{12}\left(C_{ij}\right)v^{(1,s)}&=\overline{p}_1^{(s)}\\ \overline{L}_{21}\left(C_{ij}\right)u^{(1,s)}+\overline{L}_{22}\left(C_{ij}\right)v^{(1,s)}&=\overline{p}_2^{(s)},\end{aligned}\tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned}\overline{L}_{11}\left(C_{ij}\right)&=\left[L_{11}\left(C_{ij}\right)+\chi_1L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)+\chi_2L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\right]\\ \overline{L}_{12}\left(C_{ij}\right)&=\left[L_{12}\left(C_{ij}\right)+\chi_1L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)+\chi_2L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\right]\\ \overline{L}_{22}\left(C_{ij}\right)&=\left[L_{22}\left(C_{ij}\right)+\chi_1L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)+\chi_2L_{22}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\right]\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\overline{p}_1^{(s)} = p_1^{(s)} - \left[\chi_1 L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi,\eta) + \chi_2 L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{yz}^{+(s)}(\xi,\eta)\right] +$$
$$+\left[\chi_1 L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta_1) + \chi_2 L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\sigma_{yz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\right] -$$
$$-\chi_1 L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\left(a_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi} + c_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)\zeta_1 - \tag{2.5}$$
$$-\chi_2 L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\left(b_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta} + c_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right)\zeta_1$$
$$\left(1,2;x,y;\xi,\eta;u^{(1,s)},v^{(1,s)};\ a_3^{(k)},b_3^{(k)}\right)$$

Заметим, что операторы $\overline{L}_{ij}\left(C_{ij}\right)$ по сравнению с операторами $L_{ij}\left(C_{ij}\right),(i,j=1{,}2)$, имеют четвёртый порядок. Таким образом, в отличие от случая полного контакта, контакт (1.2) приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и, как следствие, увеличению числа произвольных констант в решении внутренней задачи. Значения этих постоянных могут быть определены из граничных условий при $x=0,a$ и $y=0,b$ с привлечением решения пограничного слоя. Для удовлетворения граничным условиям следует применить приближённые методы, например, метод наименьших квадратов, метод Трефца и др. [16].

В случае, когда коэффициенты $\chi_1=\chi_2=0$, система уравнений (2.3) совпадает с системой, соответствующей той же задаче для двухслойной пластинки при полном контакте слоёв [15].

Отметим, что при $s=0$ правые части системы уравнений (2.3), т.е. обобщённые нагрузки $\overline{p}_1^{(s)}$ и $\overline{p}_2^{(s)}$, не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s>0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений. Как видно из формул (1.6), нелинейность проявляется, начиная с приближения $s\geq 2$. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

Систему уравнений (2.3) можно свести к решению одного уравнения восьмого порядка. Применив к обеим частям первого уравнения оператор $\overline{L}_{22}$, а ко второму – $\left(-\overline{L}_{12}\right)$ и сложив, получим уравнение

$$\left(\overline{L}_{11}\overline{L}_{22} - \overline{L}_{12}^2\right)u^{(s)} = \overline{L}_{22}\overline{p}_1^{(s)} - \overline{L}_{12}\overline{p}_2^{(s)}. \tag{2.6}$$

В заключении отметим, что здесь рассмотрена лишь внутренняя задача. Вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи можно осуществить указанным в [7] способом.

Заключение. В работе найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, а на плоскости раздела слоёв – закон распределения разностей тангенциальных перемещений. Построено решение внутренней задачи и показано, что когда на плоскости раздела слоёв задан закон распределения разности тангенциальных перемещений, то это приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений. Также показано, что члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, проявляются в последующих приближениях и будут существенными особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов А.А., Ермаков С.Ю., Фролов Е.Н., Янковская Т.Б. Исследование отражения - преломления упругих волн на границе нежесткого контакта и контакта с трением.// Росс. АН. Физика земли. 1993. №11. С. 37-44. Anisimov A.A., Ermakov S.Yu., Frolov E.N., Yankovskaya T.B. Investigation of the hatching-refraction of elastic waves at the boundary of a non-rigid contact and contact with friction. // The Russian Academy of Sciences. Physics of the Solid earth.1993. №11. pp. 37-44 (in Russian).
2. Подъяпольский С.Г. Отражение и преломление на границе двух упругих границ в случае нежесткого контакта.// Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1963. №4. С.525-531. Podyapolskij S.G. Etachment and refraction on the boundary of two elastic boundaries in the case of a nonrigid contact.// Izv. Academy of Science USSR, ser. geophysical. 1963. №4. pp. 525-531.
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962 Vol.26. Issue 4, pp 668-686 (in Russian).
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. M.: Gostekhizdat. 1957. 463p. (in Russian).
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360p.(in Russian).
6. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ. 1972. Т.8. Вып.6. С.3-17. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. The present state of the theory of multilayer shells. //PM. 1972. Vol.8. Issue 6, pp. 3-17 (in Russian).
7. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. Aghalovian L.A. Asimptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London.World Scientific Publ. 2015. 376p.(in Russian).
8. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 211с. Novozhilov V.V. The foundations of non-linear theory of elasticity. L.-M. OGIZ, 1948. 211p. (in Russian).
9. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988. Chernykh K.F., Litvenenkova Z.N. The theory of large elastic

deformations. L .: Publishing. LSU, 1988. (in Russian).
10. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22. Aghalovian L.A., Baghdasaryan Yu.M., Khachatryan A.M. On determination of stress-stran state of sandwich-type plates with general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. Issue 3, pp. 10-22 (in Russian).
11. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-volue problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Yerevan. 2005. 468p. (in Russian).
12. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С. 3-11. Aghalovian L.A., Tovmasyan A.B. Asymptotic solution of mixed tree-dimensional interior problem for anisotropic thermoelastic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1993. Vol. 59. Issue 3-4, pp. 3-11 (in Russian).
13. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки. //Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 08-12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. С.229-233. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asymptotic solution of mixed tree-dimensional interior problem for anisotropic plate. //Proceedings of International Conferens «Topical Problems of Continiuum Mechanics». Tsaghkadzor, Armenia. October 08-12, 2012. Vol.2 pp. 229-233 (in Russian).
14. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение трёхмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 42-49. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of tree dimetion interior problem of anisotropic thermoelasticity plate on basis of geometrical non-linear theory of elasticity. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2010. Vol. 66. Issue 1, pp. 42-49 (in Russian).
15. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при полном контакте между слоями// Изв. АН Армении. Механика. 2017. Т.70. №1. С.64-73. Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimensional equations two-layer anisotropic plate, with full contact between the layers//Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. Vol. 70. Issue 1, pp. 64-74 (in Russian).
16. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940с. Lure A.I. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1970. 940p. (in Russian).

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович –д. ф.-м. н., проф. каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.
Тел.: (+37497) 20-19-49, (+37499) 21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru
Саргсян Нарине Суреновна – преподаватель каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 21-00-78. **E-mail:** narine_sargsyan_2012@mail.ru

Поступила в редакцию 28.02.2018