

ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ

Василян Н.Г.

Ключевые слова: полубесконечная пластина-полоса, ортотропная пластина, обобщённые перерезывающие силы, распределённая нагрузка.

Vasilyan N.G.

Stress behaviour in corner points for orthotropic plate bending problem

Keywords: semi-infinite plate strip, orthotropic plate, generalized cutting forces, distributed load.

In this article is investigated bending problem of the orthotropic semi-infinite plate strip, when three edges of the plate are hinged, and the fourth edge goes to infinity. The plate is loaded with distributed load. Is applied the approach Nadai A., which says, that to go afar from the edge, the solution must seek solution of the cylindrical bending. There are investigated generalized cutting forces on fixed edge.

For particular case, when we have the sinusoidal distributed load, the static equilibrium equation is satisfied, in difference from the work of V.V Vasilyev, if we take into account generalized cutting forces.

Վասիլյան Ն.Գ.

Օրթոտրոպ սալի ծռման խնդիրներում լարումների վարքը անկյունային կետերում

Հիմնաբառեր՝ կիսանվերջ սալ-շերտ, օրթոտրոպ սալ, ընդհանրացված կտրող ուժեր, բաշխված բեռ:

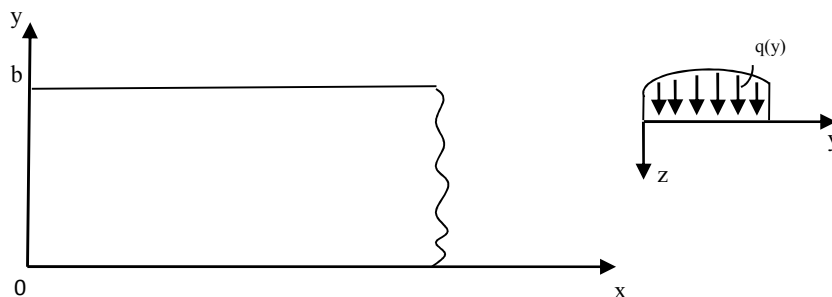
Հոդվածում ուսումնասիրված է օրթոտրոպ կիսանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդիրը, երբ սալի երեք կողմերը հողակապորեն ամրացված են: Սալի վրա ազդում է հավասարաչափ բաշխված բեռ: խնդրի լուծման ժամանակ կիրառված է Նադայի մոտեցումը, ըստ որի ամրացված եզրից հեռանալիս խնդրի լուծումը ձգտում է գլանային ծռման խնդրի լուծմանը: Ամրացված եզրի վրա ուսումնասիրված են ընդհանրացված կտրող ուժերը: Մասնավոր դեպքում դիտարկված է սինուսոիդալ բաշխված բեռի ազդեցության տակ սալի ծռման խնդիրը, որտեղ ցույց է տրված, որ ընդհանրացված կտրող ուժերի ներմուծմամբ սալի ստատիկ հավասարակշռության պայմանը բավարարվում է, ի տարբերություն այն խնդրի, որը դիտարկվել էր Վ.Վ.Վասիլևի աշխատանքում:

В статье исследована ортотропная полубесконечная пластина-полоса, когда три стороны пластины шарнирно закреплены, а для четвертой стороны, которая идёт в бесконечность, применён подход Надаи. Поверхность пластины загружена равномерно распределённой нагрузкой. Исследованы обобщённые перерезывающие силы на закреплённом крае. В частном случае синусоидально распределённой нагрузки показано, что, в отличие от работы В.В.Васильева, условие статического равновесия, с учетом обобщённых перерезывающих сил, удовлетворяется.

Введение Исторический интерес к тонким пластинам впервые проявили кораблестроители в начале прошлого столетия ввиду того, что сам корабль состоит из большого количества перегородок, геометрические размеры которых позволяют рассматривать их как тонкие плиты с жёстко закреплёнными краями. В классической теории пластин, которая основывается на допущениях прямых нормалей, первая формулировка краевой задачи была предложена ещё 200 лет тому назад С.Д.

Пуассоном [1]. Согласно этой формулировке, решение бигармонического уравнения теории изгиба пластин должно удовлетворять трём граничным условиям на контуре пластины, что находится в противоречии с порядком уравнения. Однако, Г.Р.Кирхгофф доказал, что трёх условий слишком много и что для полного определения решения уравнения прогиба достаточно двух условий. Он показал при этом, что два требования Пуассона (для крутящего момента и перерезывающей силы) должны быть заменены одним граничным условием, физический смысл которого был разъяснён Томсоном и Тэтом. Несмотря на то, что такая замена на всей остальной площади пластинки на распределении нагрузки не отражается, оно вызывает местное перераспределение напряжений на краю пластинки. В статье В.В.Васильева [2] исследована задача изгиба прямоугольной пластины, где удовлетворено условие статического равновесия: интеграл перерезывающей силы по контуру пластины равен интегралу распределённой по лицевой поверхности пластины нагрузки и, рассматривать обобщённые перерезывающие силы, не имеет смысла. Этой задачей был заинтересован и Мелешко В.В. [3], который также получил условие статического равновесия перерезывающих сил методом суперпозиции. В настоящей статье приведены результаты, которые показывают, что условие статического равновесия для обобщённых перерезывающих сил может быть удовлетворено, исходя от того, какую пластину мы исследуем.

1. В прямоугольной декартовой системе координат исследуем полубесконечную пластину-полосу постоянной толщины $2h$, которая занимает область $0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$ (фиг.1). На пластину действует распределённая нагрузка интенсивности $q(y)$.



Фиг.1. Полубесконечная пластина-полоса

Положим, что упругих свойства материала пластины обладают тремя плоскостями симметрии – пластина ортотропная. Если эти плоскости принять в качестве координатных плоскостей, то соотношения между компонентами напряжения и деформации можно будет представить следующими известными уравнениями [4]:

$$\sigma_x = E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y, \quad \sigma_y = E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x, \quad \sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}. \quad (1.1)$$

Предположим, что перпендикулярные к срединной плоскости пластин линейные элементы остаются прямыми и нормальными к изогнутой поверхности пластины после её изгиба. Воспользуемся выражениями компонентов деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.2)$$

При исследовании изгиба пластин рассмотрим только перпендикулярное перемещение [5]. Следовательно, для изгибающих и крутящих моментов:

$$M_x = \int_{-h}^h z \sigma_x dz = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_y = \int_{-h}^h z \sigma_y dz = -D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

$$H = -\int_{-h}^h z \sigma_{xy} dz = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad N_x = \int_{-h}^h \sigma_{xz} dz, \quad N_y = \int_{-h}^h \sigma_{yz} dz,$$

где

$$D_x = \frac{2E'_x h^3}{3}, \quad D_y = \frac{2E'_y h^3}{3}, \quad D_1 = \frac{2E'' h^3}{3}, \quad D_{xy} = \frac{2Gh^3}{3},$$

$$E'_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad E'_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad E'' = \frac{E_y \nu_{xy}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \quad (1.4)$$

характеризующие коэффициенты механических свойств материала пластины.

Подставляя (1.3) в уравнения равновесия, получим уравнение изгиба ортотропной пластинки [5]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(y), \quad (1.5)$$

где $H_1 = D_1 + 2D_{xy}$.

В частном случае, если пластина изотропная будем иметь

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad E'' = \frac{9E}{1 - \nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (1.6)$$

$$D_x = D_y = H_1 = D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)},$$

и получим уравнение изгиба пластин в известной форме $\Delta \Delta w = q / D$.

2. Предполагается, что края пластин $y = 0, b$ шарнирно закреплены, что позволяет решение уравнения (1.5) представить следующим образом [1]:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b} \quad (2.1)$$

Подставляя в (1.5), получим

$$D_x f_n^{IV} - 2H_1 \lambda_n^2 f_n^{II} + D_y \lambda_n^4 f_n = q_n \quad (2.2)$$

Разыскивая решение однородного дифференциального уравнения в виде

$$f_n(x) = A e^{r \lambda_n x}, \quad (2.3)$$

придем к характеристическому уравнению

$$D_x r^4 - 2H_1 r^2 + D_y = 0,$$

с решением

$$r^2 = \frac{H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{D_x} \quad (2.4)$$

В общем случае будем иметь четыре корня и общее решение задачи ортотропной полубесконечной пластины-полосы, у которого две стороны шарнирно закреплены, запишутся в виде

$$f_n(x) = A_n e^{-r_1 \lambda_n x} + B_n e^{-r_2 \lambda_n x} + C_n e^{r_1 \lambda_n x} + D_n e^{r_2 \lambda_n x} + \frac{q_n}{D \lambda_n^4}.$$

Применяя подход Надаи [6], согласно которому при удалении от кромки $x = 0$, решение задачи должно стремиться к решению цилиндрического изгиба:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{q_n}{D \lambda_n^4},$$

получим

$$f_n(x) = A_n e^{-r_1 \lambda_n x} + B_n e^{-r_2 \lambda_n x} + \frac{q_n}{D \lambda_n^4}. \quad (2.5)$$

Удовлетворяя граничным условиям на стороне $x = 0$, можно определить неизвестные коэффициенты A_n, B_n .

Очевидно, что характер корней (2.4) зависит от величины, вернее знака, подкоренного выражения $H_1^2 - D_x D_y$.

Рассматриваются три возможных случая:

а. $H_1^2 - D_x D_y > 0$

Тогда

$$r_{1,2} = \sqrt{\frac{H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{D_x}}$$

При предположении, что сторона $x = 0$ шарнирно закреплена, граничные условия будут иметь вид: $w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Удовлетворяя граничным условиям, найдем

неизвестные коэффициенты A_n, B_n и получим

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{D_y \lambda_n^4} \left[\frac{H_1 - B}{2B} e^{-\sqrt{\frac{H_1 + B}{D_x}} \lambda_n x} - \frac{H_1 + B}{2B} e^{-\sqrt{\frac{H_1 - B}{D_x}} \lambda_n x} + 1 \right] \sin \lambda_n y \quad (2.6)$$

где введено обозначение $B = \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}$.

Обобщенные перерезывающие силы для ортотропных пластин определяются формулами [1]

$$V_x(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad V_y(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.7)$$

где $H_2 = H_1 + 2D_{xy} = D_1 + 4D_{xy}$.

С учётом (2.6) обобщенные перерезывающие силы примут вид:

$$V_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2B\lambda_n} \frac{1}{D_y \sqrt{D_x}} \left[\sqrt{H_1 + B} (D_x D_y - H_2 (H_1 - B)) e^{-\sqrt{\frac{H_1 + B}{D_x}} \lambda_n x} + \sqrt{H_1 - B} (D_x D_y - H_2 (H_1 + B)) e^{-\sqrt{\frac{H_1 - B}{D_x}} \lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y; \quad (2.8)$$

$$V_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2B\lambda_n} \left[2B - (B + 2D_{xy}) e^{-\sqrt{\frac{H_1 + B}{D_x}} \lambda_n x} - (2H_1 + B + 2D_{xy}) e^{-\sqrt{\frac{H_1 - B}{D_x}} \lambda_n x} \right] \cos \lambda_n y$$

б. $H_1^2 - D_x D_y = 0$

Совпадает с изотропным случаем [7]. Поскольку в этом случае имеем кратный корень, представление (2.5) следует заменить на представление

$$f_n(x) = (A_n + xB_n) e^{-\lambda_n x} + \frac{q_n}{D\lambda_n^4}.$$

Если пластина на $x = 0$ стороне шарнирно закреплена, то получим

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{D\lambda_n^4} \left[1 - e^{-\lambda_n x} - \frac{\lambda_n x}{2} e^{-\lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y \quad (2.9)$$

Для обобщенных перерезывающих сил будем иметь выражения

$$V_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2\lambda_n} \left[(3 - \nu) e^{-\lambda_n x} + (1 - \nu) \lambda_n x e^{-\lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y, \quad (2.10)$$

$$V_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2\lambda_n} \left[2(1 - e^{-\lambda_n x}) + (1 - \nu) \lambda_n x e^{-\lambda_n x} \right] \cos \lambda_n y.$$

с. $H_1^2 - D_x D_y < 0$

Решение будет

$$f_n(x) = e^{-\alpha\lambda_n x} (A_n \sin \beta\lambda_n x + B_n \cos \beta\lambda_n x) + \frac{q_n}{D_y \lambda_n^4}. \quad (2.11)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\sqrt{D_x D_y + H_1}}{2D_x}, \quad \beta = \frac{\sqrt{D_x D_y - H_1}}{2D_x} \quad (2.12)$$

Удовлетворяя граничным условиям шарнирного закрепления, получим

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{D_y \lambda_n^4} \left[1 - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\lambda_n x + \cos \beta\lambda_n x \right) e^{-\alpha\lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y, \quad (2.13)$$

Для обобщенных перерезывающих сил получаем следующие выражения:

$$V_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n} \frac{H_2}{D_y} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \left[\left(1 + \frac{D_x}{H_2} (\alpha^2 + \beta^2) \right) \beta \cos \beta\lambda_n x + \left(1 - \frac{D_x}{H_2} (\alpha^2 + \beta^2) \right) \alpha \sin \beta\lambda_n x \right] e^{-\alpha\lambda_n x} \sin \lambda_n y \quad (2.14)$$

$$V_y(x, y) = \frac{1}{2\alpha\beta D_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n} \left[\alpha\beta D_y (1 - 2e^{-\alpha\lambda_n x} \cos \beta\lambda_n x) + \left(H_2 (\alpha^2 + \beta^2)^2 - D_y (\alpha^2 - \beta^2) \right) e^{-\alpha\lambda_n x} \sin \beta\lambda_n x \right] \cos \lambda_n y$$

А в середине закрепленного края:

$$V_x\left(0, \frac{b}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n} \frac{H_2}{D_y} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \left(\frac{D_2}{H_2} (\alpha^2 + \beta^2) + 1 \right) \sin \frac{\pi n}{2} \quad (2.15)$$

Значение обобщенной перерезывающей силы на концах закрепленного края пластины приведены в таб.1.

Таблица 1		
(x, y)	$(0, 0)$	$(0, b)$
$V_x(x, y)$	0	0
$V_y(x, y)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2\lambda_n}$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2\lambda_n} \cos \pi n$

Обобщённые перерезывающие силы в угловых точках принимают разные значения.

Из расчетов для разных материалов [4,5,8] получилось, что во всех случаях получается $H_1^2 - D_x D_y < 0$, то есть имеем третий случай. Величина перерезывающих сил в середине закрепленного края зависит от коэффициента γ , который зависит только от характеризующих коэффициентов механических свойств материала и имеет вид

$$\gamma = \frac{H_2}{D_y} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \left(\frac{D_2}{H_2} (\alpha^2 + \beta^2) + 1 \right) \quad (2.16)$$

Для исследуемых материалов значения γ приведены в табл.2

Таблица 2

	Кевлар 49	Стеклопластик АГ-4с	СВАМ	Торнел 40	Фанера 3 и 5 слойная
γ	1.87	1.22	1.26	0.59	2.33

Из (2.15) имеем $V_x(0, \frac{b}{2}) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n} \sin \frac{\pi n}{2}$.

В табл. 3 приведены значения обобщенных перерезывающих сил V_x для случая $q_n = q_0 = \text{const}$.

Таблица 3

Материал	Коэффициенты механических свойств	$V_x / q_0 b$
Кевлар 49 [8]	$E_x = 81,8 * 10^9 Pa, E_y = 5,1 * 10^9 Pa,$ $\nu_{xy} = 0,31, \nu_{yx} = 0,019$ $G = 1,82 * 10^9 Pa$	0,46
Стеклопластик АГ-4с[4]	$E_x = 2,1 * 10^9 Pa, E_y = 1,6 * 10^9 Pa,$ $\nu_{xy} = 0,07, \nu_{yx} = 0,092$ $G = 0,42 * 10^9 Pa$	0,305
СВАМ-стекловолокнистые анизотропные материалы [4]	$E_x = 3,05 * 10^9 Pa, E_y = 1,88 * 10^9 Pa,$ $\nu_{xy} = 0,195, \nu_{yx} = 0,12$ $G = 0,49 * 10^9 Pa$	0,315
Торнел 40: Углеродные[9]	$E_r = 1.61 * 10^9 Pa, E_z = 23 * 10^9 Pa,$ $\nu_{rz} = 0,021, \nu_{zr} = 0,3$ $G_{rz} = 2 * 10^9 Pa$	0.15
Фанера березовая 3 и 5 слойная[9]	$E'_x = 1,4 * 10^9 Pa, E'_y = 0,117 * 10^9 Pa,$ $E'' = 0,054 * 10^9 Pa, G = 0,12 * 10^9 Pa$	0,58

Исследование показывает, что случай $H_1^2 - D_x D_y > 0$ возможен, если можно будет найти материал, для которого: $\frac{E_y}{E_x} > \frac{1}{\nu_{xy}^2}$.

3. Рассмотрим случай, когда на пластину действует распределённая нагрузка интенсивностью $q(y) = q_0 \sin \frac{\pi y}{b}$. Для решения однородного дифференциального уравнения (1.5) получаются четыре корня и общее решение задачи ортотропной полубесконечной пластины-полосы, в зависимости от выражения $H_1^2 - D_x D_y$ принимает разные формы. Исследуем решение в зависимости от этого выражения.

а. $H_1^2 - D_x D_y > 0$

Следовательно, решение задачи получим в форме

$$w(x, y) = \frac{q_0}{2B D_y \lambda^4} \left[2B + (B - H_1) e^{-r_1 \lambda x} + (B + H_1) e^{-r_2 \lambda x} \right] \sin \lambda y. \quad (3.1)$$

где $\lambda = \pi/b$.

Обобщенные перерезывающие силы будут:

$$V_x(x, y) = -\frac{q_0}{2B \sqrt{D_y} \lambda} \left[(2D_{xy} - B) \sqrt{H_1 - B} e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}} \lambda x} + \right. \\ \left. + (2D_{xy} + B) \sqrt{H_1 + B} e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}} \lambda x} \right] \sin \lambda y$$

$$V_y(x, y) = \frac{q_0}{2B D_y \lambda} \left[2B D_y - (H_2 r_1^2 - D_y) (B - H_1) e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}} \lambda x} + \right. \\ \left. + (H_2 r_2^2 - D_y) (B + H_1) e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}} \lambda x} \right] \cos \lambda y \quad (3.2)$$

где введено следующее обозначение $B = \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}$.

б. $H_1^2 - D_x D_y = 0$, $w(x, y) = \frac{q_0}{D \lambda^4} \left[1 - e^{-\lambda x} - \frac{\lambda x}{2} e^{-\lambda x} \right] \sin \lambda y$ (3.3)

А для обобщенных перерезывающих сил

$$V_x(x, y) = \frac{q_0}{2\lambda} \left[(3 - \nu) e^{-\lambda x} + (1 - \nu) \lambda x e^{-\lambda x} \right] \sin \lambda_n y, \quad (3.4)$$

$$V_y(x, y) = \frac{q_0}{2\lambda} \left[2(1 - e^{-\lambda x}) + (1 - \nu)\lambda x e^{-\lambda x} \right] \cos \lambda y. \quad (3.5)$$

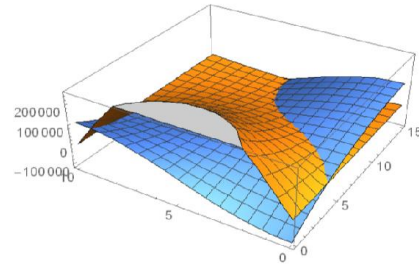
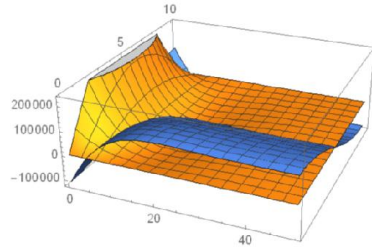
с. $H_1^2 - D_x D_y < 0$ В этом случае решение будет

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D_y \lambda^4} \left[1 + \left(\frac{H_1}{B^2} \sin \beta \lambda x - \cos \beta \lambda x \right) e^{-\alpha \lambda x} \right] \sin \lambda y, \quad (3.6)$$

Формулой (3.6) представляется прогиб полубесконечной пластины-полосы при нагружении синусоидальной нагрузкой $q(y) = q_0 \sin \lambda y$, когда три стороны пластины шарнирно закреплены, а четвертая сторона идет в бесконечность. Для обобщенных перерезывающих сил получаем следующие выражения:

$$V_x(x, y) = \frac{q_0 e^{-\alpha \lambda x}}{B_0 \lambda} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \left[\left(H_2 + \sqrt{D_x D_y} \right) \beta \cos \beta \lambda x + \left(H_2 - \sqrt{D_x D_y} \right) \alpha \sin \beta \lambda x \right] \sin \lambda y,$$

$$V_y(x, y) = \frac{q_0}{\lambda} \left[1 + e^{-\alpha \lambda x} \left(\frac{2D_{xy}}{B_0} \sin \beta \lambda x - \cos \beta \lambda x \right) \right] \cos \lambda y. \quad (3.7)$$



Приведены графики обобщенных перерезывающих сил $V_x(x, y)$, $V_y(x, y)$ для Кевлар 49, при нагрузке $q(y) = q_0 \sin \pi y/b$. В угловых точках пластины разность этих функций принимает значение отличное от нуля, т.е. в угловых точках пластины имеем скачок напряжений.

Как видно, $V_x(x, y)$ изменяется равномерно и в угловых точках пластины принимает значение ноль, а $V_y(x, y)$ изменяется неоднородно, и эта неоднородность изменяет свою форму и держится в таком виде по всей оставшейся длине пластины, начиная с $1.5b$ длины пластины.

(а) (б)
Фиг.2. Графики обобщенных перерезывающих сил.

А в середине закрепленного края имеем:

$$V_x\left(0, \frac{b}{2}\right) = \frac{q_0 \beta}{B_0 \lambda} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \left(H_2 + \sqrt{D_x D_y} \right), \quad V_y\left(0, \frac{b}{2}\right) = 0 \quad (3.8)$$

Перерезывающие силы будут:

$$N_x(x, y) = \frac{q_0 e^{-\alpha \lambda x}}{B_0 \lambda} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \left[\left(H_1 + \sqrt{D_x D_y} \right) \beta \cos \beta \lambda x + \right. \\ \left. + \left(H_1 - \sqrt{D_x D_y} \right) \alpha \sin \beta \lambda x \right] \sin \lambda y, \\ N_y(x, y) = \frac{q_0}{\lambda} \left[1 - e^{-\alpha \lambda x} \cos \beta \lambda x \right] \cos \lambda y. \quad (3.9)$$

(3.10)

На фиг.2 приведены графики обобщенных перерезывающих сил, показывающие особенность поведения напряжений в угловых точках пластины.

Заключение: Таким образом, при изгибе ортотропной полубесконечной пластины-полосы, когда три стороны шарнирно закреплены, получаем концентрацию обобщенных перерезывающих сил на закреплённом краю. В статье получены значения обобщенных перерезывающих сил для разных ортотропных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.:Физматлит, 1963. 636с.
2. Васильев В.В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона-Тэта в классической теории пластин. Механика Твёрдого Тела, N 5, 2012, с.98-107.
3. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность //Мат. Методы и физ.-мех.-ие поля, 2004, Т47, N03
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. –М.-Л.:Гостехиздат, 1947.
6. Nadai A. Elastische Platten, Берлин, 1925,с.72.
7. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности, шарнирно закреплённого края. «Young Scientists School-Conference» MECHANICS-2013. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. С.69-73.
8. Справочник по композиционным материалам. Под ред. Дж.Любина, кн. 1, М., Машиностроение, 1988, -448с.
9. <http://mash-xxl.info>

Сведения об авторе:

Василян Нарине Гургеновна – научн. сотр. Института механики НАН Армении, канд. физ.-мат. наук

Тел.: (+374 91)707939, (+374 10)624802;

Адрес: Даниела Варужана, 9, кв.29. Ереван, Армения, 0060.

E-mail: narine@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 07.12.2017