

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПО ПРОГНОЗУ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Агаловян Л.А., Тагворян В.В.

Ключевые слова: Неклассическая краевая задача, асимптотический метод, внешняя задача, слоистый пакет.

Aghalovyan L.A., Tagvoryan V.V.

**On a class of non-classical three-dimensional problems of the elasticity
theory for earthquake prediction**

Keywords: The non-classical boundary value problem, asymptotic method, the outer problem, layered packet.

A three-dimensional non-classical boundary-value problem of the theory of elasticity for a layered packet of orthotropic plates, which has essential importance in seismology is solved. The case, when the measuring devices used to obtain the values of the displacement vector components are placed between the layers of the packet with the numbers $(k-1)$ and (k) , and separation occurs between the layers with the numbers $(p-1)$ and (p) ($p > k$) is studied. An asymptotic solution of the outer problem is found. The case when the solution becomes mathematically exact is emphasized. An illustrative example is given.

Աղալովյան Լ.Ա., Թագվորյան Վ.Վ.

Երկրաշարժերի կանխատեսման վերաբերյալ առաձգականության տեսության ոչ դասական եռաչափ խնդիրների մեկ դասի մասին

Հիմնաբառեր. Ոչ դասական եզրային խնդիր, ասիմպտոտիկ մեթոդ, արտաքին խնդիր, շերտավոր փաթեթ:

Օրթոտրոպ սալերից բաղկացած շերտավոր փաթեթի համար ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է առաձգականության տեսության տարածական ոչ դասական եզրային խնդիր, որն ունի էական նշանակություն սեյսմոլոգիայում: Ուսումնասիրված է այն դեպքը, երբ չափիչ սարքերը, որոնց օգնությամբ ստացվում են տվյալներ տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների արժեքների վերաբերյալ, տեղադրված են փաթեթի $(k-1)$ -րդ և (k) -րդ շերտերի միջև, իսկ $(p-1)$ -րդ և (p) -րդ շերտերի միջև ($p > k$) առկա է խզում: Գտնված է արտաքին խնդրի ասիմպտոտիկական լուծումը: Ընդգծված է, թե երբ այդ լուծումը կհանդիսանա մաթեմատիկորեն ճշտագրիտ: Բերված է իլյուստրացիոն օրինակ:

Решена трёхмерная неклассическая краевая задача теории упругости для слоистого пакета из ортотропных пластин, которая имеет существенное значение в сейсмологии. Изучен тот случай, когда измерительные приборы, при помощи которых определяются значения компонент вектора перемещения, помещены между слоями пакета с номерами $(k-1)$ и (k) , а между слоями с номерами $(p-1)$ и (p) имеет место отрыв ($p > k$). Найдено асимптотическое решение внешней задачи. Подчёркнут случай, когда решение становится математически точным. Приведён иллюстрационный пример.

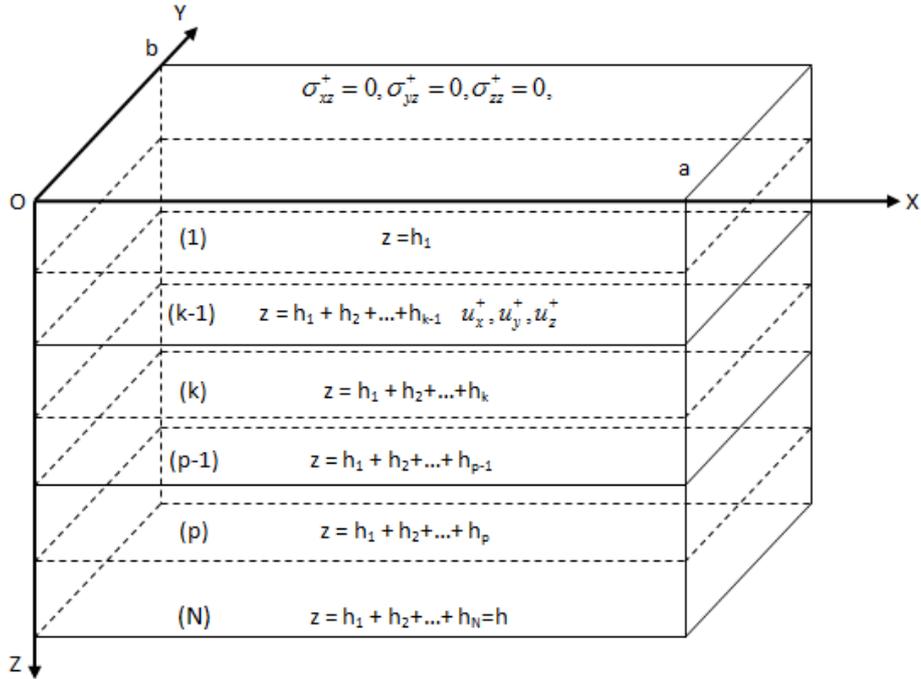
Введение. Слоистые структуры являются естественными и искусственными. Одними из естественных слоистых структур являются литосферные плиты Земли и отдельные блоки земной коры. Исследования по прогнозу землетрясений показали, что сильные землетрясения являются результатом тектонических движений литосферных плит Земли ($\approx 95\%$ землетрясений) [1-3]. Выделяют связанные с возникновением землетрясений две стадии тектонических движений: медленные (вековые) и быстротечные (скачкообразные). Вековые движения являются квазистатическими и могут длиться десятки лет, в результате, в литосферных плитах и

отдельных блоках земной коры накапливаются деформации, которые, достигнув критического значения порядка 10^{-4} , а по данным известного японского сейсмолога Rikitake [1] – порядка $4.7 \cdot 10^{-5}$, приводят к глобальному разрушению (землетрясению) и основная часть накопленной с годами огромной потенциальной энергии деформации выделяется в виде объёмных упругих продольных Р и сдвиговых S – волн, а также поверхностных волн Релея и Лява. Всегда скорость V_P больше скорости V_S . Фиксируя время прихода этих волн в заданную точку, по их разности удаётся установить расстояние очага землетрясения от заданной станции, а по данным трёх станций – его расположение.

Быстрые (скачкообразные) движения возникают в результате форшока, самого землетрясения и афтершока. Таким образом, землетрясение – есть результат глобального разрушения. Следовательно, для предсказания землетрясений необходимо найти напряжённо-деформированные состояния литосферных плит Земли и отдельных блоков земной коры, которые также являются слоистыми, и проследить за их изменением во времени. Поэтому, определение напряжённо-деформированных состояний таких слоистых структур представляет большой теоретический и практический интерес.

В середине двадцатого столетия были зафиксированы заметные деформации (перемещения точек) поверхности Земли до землетрясения [1]. Тогда же возникла естественная задача – используя эти данные, определить напряжённо-деформированное состояние (НДС) литосферной плиты или соответствующего блока земной коры и провести мониторинг его изменения во времени, по данным новых измерений с целью обнаружения критических деформационных состояний и мест их проявления. Возникающая задача оказалась неклассической задачей теории упругости, поскольку на лицевую поверхность приходится ставить шесть условий: поверхность свободна, т.е. три компоненты тензора напряжений равны нулю, но известны значения перемещений точек этой поверхности (три условия). В классической же задаче теории упругости на поверхности ставятся три условия. Асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений [4] позволил решить эту проблему [5].

Чтобы уменьшить влияние изменений внешних аномальных (в основном, атмосферных) факторов на данные истинно происходящих процессов внутри пакета (литосферной плиты), в сейсмологии начали измерительные приборы (наклонометры, деформографы и др.) помещать внутри пакета на некотором расстоянии от лицевой поверхности. С другой стороны, на основе периодически проводимых измерений и анализа соответствующего решения становится возможным обнаруживать место и время, когда прочность соединения между некоторыми слоями будет нарушена и будет происходить расслоение между отдельными слоями пакета и перераспределение НДС с последующим процессом накопления критических деформаций. В данной работе решена соответствующая квазистатическая задача теории упругости, когда измерительные приборы помещены внутри пакета, а между некоторыми слоями имеет место отрыв.



Фиг. 1 Слоистый пакет из ортотропных пластин

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Рассмотрим слоистый пакет из N ортотропных пластин, который моделирует поведение литосферных плит Земли и отдельных блоков земной коры в процессе подготовки землетрясений. Пакет занимает область $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h, h = h_1 + h_2 + \dots + h_N, \min(a, b) = l, h \ll l\}$, где h_n ($1 \leq n \leq N$) – толщины пластин (фиг.1).

Требуется найти решение уравнений и соотношений упругости (состояния) пространственной задачи теории упругости для слоистого пакета из N ортотропных пластин, когда лицевая поверхность $z = 0$ пакета свободна:

$$\sigma_{jz}^{(1)}(x, y, 0, t) = 0, \quad j = x, y, z, \quad (1.1)$$

между слоями до слоя с номером $(k-1)$ контакт полный:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(n-1)}(x, y, H_{n-1}, t) = \sigma_{jz}^{(n)}(x, y, H_{n-1}, t) \\ u_j^{(n-1)}(x, y, H_{n-1}, t) = u_j^{(n)}(x, y, H_{n-1}, t) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad 2 \leq n \leq k-1, \quad (1.2)$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n h_i, \quad 2 \leq n \leq k-2,$$

заданы значения перемещений точек поверхности контакта $z = H_{k-1}$ между слоями с номерами $(k-1)$ и (k) , как данные наклономеров и других измерительных средств:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(k-1)}(x, y, H_{k-1}, t) = \sigma_{jz}^{(k)}(x, y, H_{k-1}, t) \\ u_j^{(k-1)}(x, y, H_{k-1}, t) = u_j^{(k)}(x, y, H_{k-1}, t) = u_j^+(x, y, H_{k-1}, t) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad (1.3)$$

для последующих слоёв до слоя с номером $(p-1)$ контакт полный:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(n-1)}(x, y, H_{n-1}, t) = \sigma_{jz}^{(n)}(x, y, H_{n-1}, t) \\ u_j^{(n-1)}(x, y, H_{n-1}, t) = u_j^{(n)}(x, y, H_{n-1}, t) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad k+1 \leq n \leq p-1, \quad (1.4)$$

между слоями с номерами $(p-1)$ и (p) есть отрыв:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(p-1)}(x, y, H_{p-1}, t) = \sigma_{jz}^{(p)}(x, y, H_{p-1}, t) \\ u^{(p)}(x, y, H_{p-1}, t) - u^{(p-1)}(x, y, H_{p-1}, t) = k_1 f_1(x, y, H_{p-1}, t) \\ v^{(p)}(x, y, H_{p-1}, t) - v^{(p-1)}(x, y, H_{p-1}, t) = k_2 f_2(x, y, H_{p-1}, t) \\ w^{(p-1)}(x, y, H_{p-1}, t) = w^{(p)}(x, y, H_{p-1}, t) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad (1.5)$$

и при условиях полного контакта между всеми остальными слоями:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(n-1)}(x, y, H_{n-1}, t) = \sigma_{jz}^{(n)}(x, y, H_{n-1}, t) \\ u_j^{(n-1)}(x, y, H_{n-1}, t) = u_j^{(n)}(x, y, H_{n-1}, t) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad p+1 \leq n \leq N, \quad (1.6)$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n h_i, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

где σ_{jz} – компоненты тензора напряжений, u_x, u_y, u_z – компоненты вектора перемещения, f_1, f_2 – заданные функции, время t входит как параметр (квазистатическая задача), фиксирующий момент времени проведения измерений.

2. Асимптотическое решение задачи. Чтобы решить сформулированную задачу, в уравнениях и соотношениях трёхмерной задачи теории упругости ортотропного тела перейдём к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/l, \quad u = u_x/l, \quad v = u_y/l, \quad w = u_z/l, \quad (2.1)$$

В результате получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \zeta} + IF_x^{(k)} = 0, \quad (x, y; \xi, \eta) \\
& \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial \zeta} + IF_z^{(k)} = 0, \\
& \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \xi} = e_1^{(k)} + \alpha_{11}^{(k)} \theta^{(k)}, \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \eta} = e_2^{(k)} + \alpha_{22}^{(k)} \theta^{(k)}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \zeta} = e_3^{(k)} + \alpha_{33}^{(k)} \theta^{(k)}, \quad (2.2) \\
& \varepsilon^{-1} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \eta} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \xi} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}, \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}, \\
& e_m^{(k)} = a_{1m}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{2m}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{3m}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad m = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

где a_{ij} – постоянные упругости, α_{ij} – коэффициенты температурного расширения, $\theta^{(k)} = T^{(k)}(x, y, z, t) - T_0^{(k)}(x, y, z, t_0)$ – разность температур, F_j – объёмная сила, для случая учёта веса слоёв $F_x^{(k)} = F_y^{(k)} = 0$, $F_z^{(k)} = \rho_k g$, ρ_k – плотность, g – ускорение силы тяжести. Решение системы (2.2) складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I_b). Решение внешней задачи отыскивается в виде:

$$\sigma_{ij}^{(k)out} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}, \quad (i, j = x, y, z), \quad u^{(k)out} = \varepsilon^s u^{(k,s)}, \quad (u, v, w), \quad s = \overline{0, S}. \quad (2.3)$$

Обозначение $s = \overline{0, S}$ (Эйнштейна) означает, что в (2.3) и в последующем по повторяющемуся (немому) индексу S происходит суммирование от нуля до числа приближений S . Подставив (2.3) в (2.2) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε , получим новую систему, откуда однозначно определяются $\sigma_{ij}^{(k,s)}$, $u^{(k,s)}$, $v^{(k,s)}$, $w^{(k,s)}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz}^{(k,s)} &= \sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\
\sigma_{xx}^{(k,s)} &= -\frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{yy}^{(k,s)} &= -\frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[\frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad (2.4)$$

$$u^{(k,s)} = a_{55}^{(k)} \zeta \sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$v^{(k,s)} = a_{44}^{(k)} \zeta \sigma_{yz0}^{(k,s)} + v_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$w^{(k,s)} = \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta \sigma_{zz0}^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + \int_0^\zeta \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

где

$$\sigma_{jz*}^{(k,s)} = - \int_0^\zeta \left[F_j^{(k,s)} + \frac{\partial \sigma_{jx}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \quad j = x, y, z,$$

$$\sigma_{xx*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{22}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - A_{23}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right],$$

$$\sigma_{yy*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{11}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right],$$

$$u_*^{(k,s)} = \int_0^\zeta \left[a_{55}^{(k)} \sigma_{xz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta, \quad v_*^{(k,s)} = \int_0^\zeta \left[a_{44}^{(k)} \sigma_{yz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \quad (2.5)$$

$$w_*^{(k,s)} = \int_0^\zeta \left[a_{13}^{(k)} \sigma_{xx*}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{yy*}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right] d\zeta,$$

$$A_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2, \quad A_{13}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)},$$

$$A_{23}^{(k)} = a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}, \quad A_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} - a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)},$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = \alpha_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)}, \quad \gamma_{22}^{(k)} = \alpha_{22}^{(k)} a_{11}^{(k)} - a_{12}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)},$$

$$B_{11}^{(k)} = \alpha_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)} - a_{23}^{(k)} \gamma_{22}^{(k)}, \quad Q^{(k,m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0.$$

Решение (2.4) содержит $6N$ неизвестных функций $\sigma_{jz0}^{(k,s)}$, $u_0^{(k,s)}$, $v_0^{(k,s)}$, $w_0^{(k,s)}$, которые однозначно определяются из условий (1.1) - (1.6). Для первого слоя имеем:

$$\sigma_{jz0}^{(1,s)} = 0, \quad \sigma_{jz}^{(1,s)} = \sigma_{jz*}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z,$$

$$u^{(1,s)} = u_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.6)$$

$$v^{(1,s)} = v_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$w^{(1,s)} = w_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + \int_0^\zeta \frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1,s)} d\zeta + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

для величин слоёв до $(k-1)$ получаются:

$$\sigma_{jz}^{(n,s)} = \sigma_{jz0}^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - \sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) +$$

$$+ \sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z,$$

$$u^{(n,s)} = a_{55}^{(n)} \sigma_{xz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + a_{55}^{(n-1)} \zeta_{n-1} \sigma_{xz0}^{(n-1,s)} + u_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) +$$

$$+ u_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - u_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + u_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$v^{(n,s)} = a_{44}^{(n)} \sigma_{yz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + a_{44}^{(n-1)} \zeta_{n-1} \sigma_{yz0}^{(n-1,s)} + v_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) +$$

$$+ v_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - v_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + v_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.7)$$

$$w^{(n,s)} = \frac{A_{33}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \sigma_{zz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + \frac{A_{33}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}} \zeta_{n-1} \sigma_{zz0}^{(n-1,s)} +$$

$$+ \int_0^{\zeta_{n-1}} \left(\frac{B_{11}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}} \theta^{(n-1,s)} - \frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \theta^{(n,s)} \right) d\zeta + \int_0^\zeta \frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \theta^{(n,s)} d\zeta +$$

$$+ w_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - w_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) +$$

$$+ w_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad 2 \leq n \leq k-1,$$

для слоя с номером (k) имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz}^{(k,s)} &= \sigma_{jz0}^{(k-1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz^*}^{(k-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - \sigma_{jz^*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \\
&+ \sigma_{jz^*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\
u^{(k,s)} &= a_{55}^{(k)} \sigma_{xz0}^{(k,s)}(\zeta - \zeta_{k-1}) + u^{+(s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \\
&+ u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
v^{(k,s)} &= a_{44}^{(k)} \sigma_{yz0}^{(k,s)}(\zeta - \zeta_{k-1}) + v^{+(s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \\
&+ v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \tag{2.8} \\
w^{(k,s)} &= \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)}(\zeta - \zeta_{k-1}) + w^{+(s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - \int_0^{\zeta_{k-1}} \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta - \\
&- w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned}$$

для последующих слоёв до $(p-1)$, удовлетворив условиям полного контакта (1.4), снова получим формулы (2.7) с той разницей, что уже параметр n будет принимать значения $k+1 \leq n \leq p-1$.

Для слоя с номером (p) имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz}^{(p,s)} &= \sigma_{jz0}^{(p-1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz^*}^{(p-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) - \sigma_{jz^*}^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) + \\
&+ \sigma_{jz^*}^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\
u^{(p,s)} &= a_{55}^{(p)} \sigma_{xz0}^{(p,s)}(\zeta - \zeta_{p-1}) + a_{55}^{(p-1)} \zeta_{p-1} \sigma_{xz0}^{(p-1,s)} + k_1 f_1^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) + \\
&+ u_0^{(p-1,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(p-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) - u_*^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) + u_*^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
v^{(p,s)} &= a_{44}^{(p)} \sigma_{yz0}^{(p,s)}(\zeta - \zeta_{p-1}) + a_{44}^{(p-1)} \zeta_{p-1} \sigma_{yz0}^{(p-1,s)} + k_2 f_2^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) + \\
&+ v_0^{(p-1,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(p-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) - v_*^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) + v_*^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta), \tag{2.9} \\
w^{(p,s)} &= \frac{A_{33}^{(p)}}{A_{11}^{(p)}} \sigma_{zz0}^{(p,s)}(\zeta - \zeta_{p-1}) + \frac{A_{33}^{(p-1)}}{A_{11}^{(p-1)}} \zeta_{p-1} \sigma_{zz0}^{(p-1,s)} + \\
&+ \int_0^{\zeta_{p-1}} \left(\frac{B_{11}^{(p-1)}}{A_{11}^{(p-1)}} \theta^{(p-1,s)} - \frac{B_{11}^{(p)}}{A_{11}^{(p)}} \theta^{(p,s)} \right) d\zeta + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(p)}}{A_{11}^{(p)}} \theta^{(p,s)} d\zeta + \\
&+ w_0^{(p-1,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(p-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) - w_*^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta_{p-1}) + w_*^{(p,s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned}$$

для всех остальных слоёв, начиная с $(p+1)$, после удовлетворения условиям (1.6)

получаются снова формулы (2.7) с той разницей, что $p + 1 \leq n \leq N$.

Выведенные выше формулы (2.3) – (2.9) носят итерационный характер и позволяют найти значения всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной точностью во внешней задаче.

Если входящие в граничные условия и в условия контакта между слоями функции являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается на определённом приближении и получаем математически точное решение во внешней задаче. Повторив измерения в различные периоды времени t и проведя анализ соответствующего решения, становится возможным выявление мест и периода времени, когда возможны возникновения критических состояний и процесс может стать динамическим и быстротечным, приводящим к возникновению землетрясения. Вычислив потенциальную энергию деформации и проследив за её изменением во времени, можно составить представление о вероятной величине магнитуды ожидаемого землетрясения [2]. Решение внешней задачи, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности пакета. Чтобы устранить возникшую невязку, следует построить решение для пограничного слоя. Решение пограничного слоя имеет экспоненциально убывающий характер по мере удаления от боковой поверхности во внутрь пакета и устраняет возможную невязку на боковой поверхности. Решение для пограничного слоя строится описанным в [4] способом. Поскольку тангенциальные размеры пластинчатого пакета велики по сравнению с толщиной пакета, в вопросах сейсмологии оно обычно пренебрегается. Динамические быстротечные процессы (форшок, само землетрясение, афтершок) можно исследовать, как в работе [6].

3. О математически точных решениях. В качестве иллюстрации приведём математически точное решение для шестислойного пакета, когда между вторым и третьим слоями заданы значения перемещений точек, как данные измерений наклономеров и других измерительных средств, между четвёртым и пятым слоями есть отрыв, а между всеми остальными слоями – контакт полный.

Граничными условиями задачи будут:

$$\sigma_{jz}^{(1)}(x, y, 0, t) = 0, \quad j = x, y, z, \quad \zeta = 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) = \sigma_{jz}^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_1) \\ u_j^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) = u_j^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_1) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = \sigma_{jz}^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_2) \\ u_j^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = u_j^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_2) = u_j^+(\xi, \eta, \zeta_2) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_3) = \sigma_{jz}^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_3) \\ u_j^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_3) = u_j^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_3) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(5)}(\xi, \eta, \zeta_4) = \sigma_{jz}^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_4) \\ u^{(5)}(\xi, \eta, \zeta_4) - u^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_4) = k_1 f_1(\xi, \eta, \zeta_4) \\ v^{(5)}(\xi, \eta, \zeta_4) - v^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_4) = k_2 f_2(\xi, \eta, \zeta_4) \\ w^{(5)}(\xi, \eta, \zeta_4) = w^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_4) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(5)}(\xi, \eta, \zeta_5) = \sigma_{jz}^{(6)}(\xi, \eta, \zeta_5) \\ u_j^{(5)}(\xi, \eta, \zeta_5) = u_j^{(6)}(\xi, \eta, \zeta_5) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad (3.6)$$

где функции участвующие в граничных условиях имеют следующий вид:

$$u^+ = l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}), \quad (u, v, w), \quad \theta^{(k)} = 0, \quad \frac{1}{2} F_x^{(k)} = F_y^{(k)} = F_z^{(k)} = 0,$$

$$f_1(\xi, \eta, \zeta_4) = c_{11} + \xi c_{12} + \eta c_{13}, \quad f_2(\xi, \eta, \zeta_4) = c_{21} + \xi c_{22} + \eta c_{23},$$

Итерационный процесс обрывается на втором приближении, в результате имеем:

величины первого слоя: $(0 \leq \zeta \leq \zeta_1)$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{xx}^{(1)} &= \frac{1}{A_{11}^{(1)}} [a_{22}^{(1)} b_{2u} - a_{12}^{(1)} b_{3v}], \\ \sigma_{yy}^{(1)} &= \frac{1}{A_{11}^{(1)}} [a_{11}^{(1)} b_{3v} - a_{12}^{(1)} b_{2u}], \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \frac{1}{a_{66}^{(1)}} [b_{2v} + b_{3u}], \\ u_x^{(1)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_y^{(1)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_z^{(1)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) - h w_*^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta_1) + h w_*^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \\ &\quad - h w_*^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta_2) + h w_*^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (3.7)$$

величины второго слоя: $(\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2)$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{xx}^{(2)} &= \frac{1}{A_{11}^{(2)}} [a_{22}^{(2)} b_{2u} - a_{12}^{(2)} b_{3v}], \\ \sigma_{yy}^{(2)} &= \frac{1}{A_{11}^{(2)}} [a_{11}^{(2)} b_{3v} - a_{12}^{(2)} b_{2u}], \quad \sigma_{xy}^{(2)} = \frac{1}{a_{66}^{(2)}} [b_{2v} + b_{3u}], \\ u_x^{(2)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_y^{(2)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_z^{(2)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) - h w_*^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta_2) + h w_*^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

величины третьего слоя: $(\zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_3)$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{yz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)} = 0, \quad \sigma_{xx}^{(3)} &= \frac{1}{A_{11}^{(3)}} [a_{22}^{(3)} b_{2u} - a_{12}^{(3)} b_{3v}], \\
\sigma_{yy}^{(3)} &= \frac{1}{A_{11}^{(3)}} [a_{11}^{(3)} b_{3v} - a_{12}^{(3)} b_{2u}], \quad \sigma_{xy}^{(3)} = \frac{1}{a_{66}^{(3)}} [b_{2v} + b_{3u}], \\
u_x^{(3)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + hb_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_y^{(3)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + hb_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_z^{(3)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) - hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_2) + hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

величины четвертого слоя: ($\zeta_3 \leq \zeta \leq \zeta_4$)

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(4)} = \sigma_{yz}^{(4)} = \sigma_{zz}^{(4)} = 0, \quad \sigma_{xx}^{(4)} &= \frac{1}{A_{11}^{(4)}} [a_{22}^{(4)} b_{2u} - a_{12}^{(4)} b_{3v}], \\
\sigma_{yy}^{(4)} &= \frac{1}{A_{11}^{(4)}} [a_{11}^{(4)} b_{3v} - a_{12}^{(4)} b_{2u}], \quad \sigma_{xy}^{(4)} = \frac{1}{a_{66}^{(4)}} [b_{2v} + b_{3u}], \\
u_x^{(4)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + hb_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_y^{(4)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + hb_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_z^{(4)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) - hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_2) + hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) - \\
&\quad - hw_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) + hw_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

величины пятого слоя: ($\zeta_4 \leq \zeta \leq \zeta_5$)

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(5)} = \sigma_{yz}^{(5)} = \sigma_{zz}^{(5)} = 0, \quad \sigma_{xx}^{(5)} &= \frac{1}{A_{11}^{(5)}} [a_{22}^{(5)} (b_{2u} + k_1 c_{12}) - a_{12}^{(5)} (b_{3v} + k_2 c_{23})], \\
\sigma_{yy}^{(5)} &= \frac{1}{A_{11}^{(5)}} [a_{11}^{(5)} (b_{3v} + k_2 c_{23}) - a_{12}^{(5)} (b_{2u} + k_1 c_{12})], \\
\sigma_{xy}^{(5)} &= \frac{1}{a_{66}^{(5)}} [(b_{2v} + k_2 c_{22}) + (b_{3u} + k_1 c_{13})], \\
u_x^{(5)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + lk_1 (c_{11} + \xi c_{12} + \eta c_{13}) + hb_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_y^{(5)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + lk_2 (c_{21} + \xi c_{22} + \eta c_{23}) + hb_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_z^{(5)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) - hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_2) + hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) - \\
&\quad - hw_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) + hw_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta_4) - hw_*^{(5,1)} (\xi, \eta, \zeta_4) + \\
&\quad + hw_*^{(5,1)} (\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

величины шестого слоя: ($\zeta_5 \leq \zeta \leq 1$)

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(6)} = \sigma_{yz}^{(6)} = \sigma_{zz}^{(6)} = 0, \quad \sigma_{xx}^{(6)} &= \frac{1}{A_{11}^{(6)}} \left[a_{22}^{(6)} (b_{2u} + k_1 c_{12}) - a_{12}^{(6)} (b_{3v} + k_2 c_{23}) \right], \\ \sigma_{yy}^{(6)} &= \frac{1}{A_{11}^{(6)}} \left[a_{11}^{(6)} (b_{3v} + k_2 c_{23}) - a_{12}^{(6)} (b_{2u} + k_1 c_{12}) \right], \\ \sigma_{xy}^{(6)} &= \frac{1}{a_{66}^{(6)}} \left[(b_{2v} + k_2 c_{22}) + (b_{3u} + k_1 c_{13}) \right], \\ u_x^{(6)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + lk_1 (c_{11} + \xi c_{12} + \eta c_{13}) + hb_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_y^{(6)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + lk_2 (c_{21} + \xi c_{22} + \eta c_{23}) + hb_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_z^{(6)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) - hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_2) + hw_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) - \\ &\quad - hw_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) + hw_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta_4) - hw_*^{(5,1)} (\xi, \eta, \zeta_4) + \\ &\quad + hw_*^{(5,1)} (\xi, \eta, \zeta_5) - hw_*^{(6,1)} (\xi, \eta, \zeta_5) + hw_*^{(6,1)} (\xi, \eta, \zeta),\end{aligned}\tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}w_*^{(k,1)} (\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \zeta \left[b_{2u} (a_{13}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}) + \right. \\ &\quad \left. + b_{3v} (a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}) \right], \quad k = 1, 2, 3, 4;\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}w_*^{(k,1)} (\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \zeta \left[(b_{2u} + k_1 c_{12}) (a_{13}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}) + \right. \\ &\quad \left. + (b_{3v} + k_2 c_{23}) (a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}) \right], \quad k = 5, 6.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Заключение. Найдено решение трехмерной квазистатической задачи теории упругости для слоистого пакета, моделирующее поведение литосферных плит и блоков земной коры. Предполагается, что сейсмологические измерительные данные, позволяющие определить напряженно – деформированные состояния слоев пакета сняты с наклономеров и других измерительных средств, помещенных между слоями с номерами $(k-1)$ и (k) , а между слоями с номерами $(p-1)$ и (p) , $(p > k)$ есть тангенциальный отрыв. Получено асимптотическое решение внешней задачи, указаны случаи, когда получаются математически точные решения, приведен иллюстрационный пример для шестислойного пакета из ортотропных пластин.

Мониторинг найденного решения во времени позволяет проследить процесс подготовки землетрясений и прогнозировать возможность возникновения землетрясений и их магнитуды.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА (научный проект SCS 15T – 2C343).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рикитаке Т. Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1979. 390 с. // Rikitake T. Earthquake prediction. – Amsterdam: Elsevier, 1976. - 357 p. (In Russian).
2. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с. // Kasahara K. Earthquake Mechanics. М.: Mir, 1985. 264 p. (In Russian).
3. Ле Пишон К., Франшто Ж., Бонин Ж. Тектоника плит. М.: Мир, 1977. 288 с. // Pichon H. Le, Francheteau J., Bonnin J. Plate tectonics. М.: Mir, 1977. 288p. (In Russian).
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414 с. // Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. – Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p. (In Russian).
5. Aghalovyan L.A. On some classes of 3D boundary-value problems of statics and dynamics of plates and shells // Shell and membrane theories in mechanics and biology. – Switzerland: Springer International Publishing, 2015. P. 1-23.
6. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит Земли на основе данных сейсмостанций и GPS-систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды Международной конференции. Т.1. – Ереван: 2012. С.42-46. /Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., On dynamic conduct of Lithospheric Plates of the Earth on the base of the date of seismic stations and GPS systems. Proceedings of International Conference «Topical problems of continuum mechanics». V. 1. Yerevan: 2012. –P. 42-46. (In Russian).

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН Армении, доктор физ-мат. наук, заведующий отд. «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА.

Тел.: (37410) 529630; **E-mail:** lagal@sci.am

Тагворян Варужан Варданович – аспирант Института механики НАН РА.

Тел.: (37493) 805540; **E-mail:** varuzh1993@gmail.com

Поступила в редакцию 08.01.2018