ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика
УДК 539.3

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Амбарцумян С.А.

Ключевые слова: изотропный материал, ортотропная электропроводность, неоднородная деформация, малые возмущения, линейные функциональные связи.

Ambartsumian S.A.

Theoretical Basics of the Orthotropic Electrical Conductivity of Isotropic Materials

Key words: isotropic material, orthotropic electrical conductivity, inhomogeneous deformation, small perturbations, linear functional connections.

The problem of the influence of deformation properties of elastic elements on specific electric resistance of isotropic electrically conductive materials is considered. It is shown that when in isotropic elastic elements inhomogeneity of elastic deformation is taken into account the electric current density is changed, which in its turn leads to anisotropy of electrical conductivity of material. The anisotropic properties of electrical conductivity σ_i along material anisotropy principal axes are characterized by both of deformation influence and new physical constants α_i .

Համբարձումյան Ս.Ա.

Իզոտրոպ նյութերի օրթոտրոպ էլեկտրահաղորդականության տեսական հիմունքները

Հիմնաբառեր. իզոտրոպ նյութ, օրթոտրոպ էլեկտրական հաղորդականություն, անհամասեռ դեֆորմացիա, փոքր գրգռումներ, գծային ֆունկցիոնալ կապեր:

Դիտարկվում է էլեկտրական հաղորդիչ նյութերից իզոտռոպ առաձգական տարրերի դեֆորմացիոն հատկությունների ազդեցությունը նյութի էլեկտրական դիմադրության վրա: Ցույց է տրվում, որ դեֆորմացիայի անհամասեռությունը ըստ նյութի անիզոտրոպիայի առանցքների բերում է էլեկտրական հոսանքի խտության փոփոխությունների, որոնք էլ իրենց հերթին հանգեցնում են նյութի էլեկտրական հաղորդականության անիզոտրոպայի: Անիզոթրոպ էլեկտրական հաղորդականությունը նյութի անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքների վրա σ_i բնութագրվում է դեֆորմացիայի անհամասեռությամբ եւ նոր՝ ֆիզիկական α_i գործակիցների ազդեցությամբ:

Рассматривается задача влияния деформативных свойств упругих элементов на удельное электрическое сопротивление изотропных электропроводящих материалов. Показывается, что при учёте неоднородности упругой деформации в изотропных упругих элементах меняется плотность электрического тока, что, в свою очередь, приводит к анизотропии электропроводности материала. Анизотропия электропроводности σ_i по главным осям анизотропии материала характеризуется влиянием деформации и новыми физическими постоянными α_i .

Введение. Прецизионные эксперименты [1÷3] показывают, что в однородных электропроводящих материалах коэффициент электропроводности $\sigma = R^{-1}$ (R - удельное электрическое сопротивление), линейно зависит не только от величины деформации

[1,2,5], но и от знака этой деформации. В работе [6] исследуется влияние изменения объёмного расширения металлических материалов на величину удельного электрического сопротивления. Приводятся решения задач для токопроводов с учётом зависимости электропроводности от изменения поперечного сечения.

1. Основные утверждения. Классические уравнения электродинамики при отсутствии поверхностных токов и сторонних зарядов в гауссовой системе координат имеют вид [3-5]:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\ \vec{B} = 0,$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\ \vec{D} = 4\pi\rho_e, \tag{1.1}$$

где $\overline{E}$ – вектор напряжённости электрического поля, $\overline{H}$ – вектор напряжённости магнитного поля , $\overline{B}$ – вектор магнитной индукции, $\overline{J}$ – вектор плотности полного электрического тока, ρ_e – плотность электрического заряда, c – электродинамическая постоянная , t – время.

Уравнения (1.1) частично замыкаются материальными представлениями [4-5]

$$\vec{B} = \mu\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\vec{V}\times\vec{E},$$
$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\vec{V}\times\vec{B}, \tag{1.2}$$

где μ – магнитная проницаемость, ε – диэлектрическая постоянная, $\vec{V} = \partial\vec{\mathrm{u}}/\partial t$ – вектор скорости перемещения частиц тела $\vec{\mathrm{u}}=(\mathrm{u,v,w})$. Для полного замыкания системы уравнений (1.1) предлагается совершенно новое представление для компонент вектора плотности электрического тока $\overline{J}\left(i_1,\, i_2, i_3\right)$,

$$i_1 = \sigma\left(1 - \alpha_1\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}\right) + \rho_e\vec{V}$$
$$i_2 = \sigma\left(1 - \alpha_2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}\right) + \rho_e\vec{V} \tag{1.3}$$
$$i_3 = \sigma\left(1 - \alpha_3\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}\right) + \rho_e\vec{V}$$

где σ – коэффициент электропроводности недеформирумого изотропного тела, α_i – новые постоянные, характеризующие влияние деформации на коэффициент электропроводности σ, в частности, при

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}>0,\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}>0,\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}>0,\qquad \alpha_i=\alpha_\rho$$
$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}<0,\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}<0,\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}<0,\qquad \alpha_i=\alpha_c \tag{1.4}$$

где $\mathrm{u}(x,y,z)$, $\mathrm{v}(x,y,z)$, $\mathrm{w}(x,y,z)$ – компоненты перемещения, α_c – новый коэффициент при деформации сжатия, α_ρ – новый коэффициент при деформации растяжения.

Для полного замыкания общей системы приведём также соответствующие уравнения движения [3-5]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+R_j=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\qquad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$
$$\sigma_{ij}=2G\,\varepsilon_{ij}+\delta_{ij}\lambda\,\varepsilon_{ij},\qquad i,j=1,2,3\Leftrightarrow x,y,z \tag{1.5}$$

где σ_{ij}– компоненты тензора напряжения, ρ– плотность материала, $G=E/2(1+\nu)$, $\lambda=\nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$ – постоянные Ламе (E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона), $\vec{F}_j$ – объёмная сила, которая при наличии электрического тока и электрического заряда имеет вид [5]

$$\vec{F}_j=\frac{1}{c}\left(\dot{\vec{\eta}}+\vec{B}\right)+\rho_e^{\vec{E}}. \tag{1.6}$$

2. Соотношения при малых возмущениях. Ограничиваясь исследованием электромагнитных полей при малых возмущениях [2], векторы возмущённого электрического поля, а также вектор соответствующего перемещения, будут представлены следующим образом [4]:

$$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{h},\qquad \vec{E}=\vec{e},\qquad \vec{B}=\vec{B}_0+\vec{b}$$
$$\vec{D}=\vec{d},\qquad \vec{j}=\vec{j}',\qquad \vec{\mathrm{u}}=\vec{\mathrm{u}}_0+\vec{\mathrm{u}}' \tag{2.1}$$

где

$$\vec{h}(h_1,h_2,h_3),\qquad \vec{e}(e_1,e_2,e_3),\qquad \vec{b}(b_1,b_2,b_3),$$
$$\vec{d}(d_1,d_2,d_3),\qquad \vec{j}(j_1,j_2,j_3),\qquad \vec{\mathrm{u}}'(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}) \tag{2.2}$$

(в дальнейшем штрихи над $\vec{j}$ и $\vec{\mathrm{u}}$ опускаются).

Согласно (2.1), преобразуя соотношения (1.2), (1.3), получим следующие линейные функциональные связи для возмущённого магнитного поля:

$$\vec{b}=\mu\vec{h}-\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\frac{\partial\vec{\mathrm{u}}}{\partial t}\times\vec{H}_0,\ \vec{d}=\varepsilon\vec{e}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\frac{\partial\vec{\mathrm{u}}}{\partial t}\times\vec{H}_0, \tag{2.3}$$

а также, следующие нелинейные представления:

$$\vec{i}_1 = \sigma\left(1-\alpha_1\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)J_1,\ \ \vec{i}_2 = \sigma\left(1-\alpha_2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)J_2,$$
$$\vec{i}_3 = \sigma\left(1-\alpha_3\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)J_3,\ \ \vec{J} = \overline{e} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t}\times H_0 \qquad (2.4)$$

Линейные уравнения электродинамики для среды (вакуума), окружающей электропроводящее тело, имеют вид [4]

$$\operatorname{rot}\ h^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial e^{(e)}}{\partial t},\ \operatorname{rot} e^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h^{(e)}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\ h^{(e)} = 0,\ \operatorname{div} e^{(e)} = 0. \qquad (2.5)$$

Граничные условия на поверхности, которая разделяет внутреннюю и внешнюю области (вакуум), имеют следующий вид [4]:

$$n\times\left[H^{(e)} - H\right] = -\frac{v_n}{c}\left[E^{(e)} - \varepsilon E\right]$$
$$n\times\left[E^{(e)} - E\right] = -\frac{v_n}{c}\left[H^{(e)} - \mu H\right], \qquad (2.6)$$

где V_n – макроскопические скорости поверхности контакта двух сред при малости изменения вектора нормали поверхности разрыва двух областей

$$\vec{\mathrm{n}} = \vec{\mathrm{n}} + \vec{\mathrm{n}}', \qquad (2.7)$$

где $\vec{\mathrm{n}}'$ – малое возмущение нормали.

Представляя объёмные силы электродинамического происхождения при условии отсутствия сторонних токов и сторонних зарядов, согласно (1.5) и (2.4), получим [3-5]:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial z} + \rho K_1 = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z} + \rho K_2 = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \qquad (2.8)$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z} + \rho K_3 = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2}$$

При этом, для объёмных сил электродинамического происхождения, согласно (2.4), будем иметь:

$$\rho K_1 = \frac{\sigma}{c}\left(1-\alpha_1\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)R_1$$
$$\rho K_2 = \frac{\sigma}{c}\left(1-\alpha_2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)R_2$$
$$\rho K_3 = \frac{\sigma}{c}\left(1-\alpha_3\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)R_3,\quad \overline{R} = \mu\overline{J}\times\overline{H}_0 \qquad (2.9)$$

Заключение. Показывается, что неоднородность упругих осевых удлинений (сжатия) в изотропных упругих элементах приводит к изменениям плотности электрического тока по этим осям. Это, в свою очередь, приводит к анизотропии электропроводности материала. На основании вышеизложенной общей теории ортотропной электропроводности изотропных материалов можно решать, интересные с точки зрения приложений, многочисленные конкретные задачи. При этом, вводом новых безразмерных коэффициентов α_i, задачи электромагнитоупругости становятся нелинейными. Учёт этих безразмерных характеристик материала архиважен для композиционных материалов со сеточной анизотропией.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Елецкий А.В.** Транспортные свойства углеродных нанотрубок. //Успехи Физических Наук, (2009), т.179, №3, стр.226-242., **Eletskii A.V.** Transport properties of carbon nanotubes. Uspekhi Pizicheskikh nauk, (2009) vol.179, №3, pp.226-242, DOI 10.3367/UFNr.0179.200903a.0225 (in Russian)
2. **Улыбин А.В.** Применение резистивного электроконтактного метода для мониторинга состояния стальных конструкций. //Инженерно-строительный журнал, (2010), №7, стр. 21-24. **Ulybin A.V.** Application of a Resistive Electro Contact Method for Monitoring the State of Steel Structures, Magazine of Civil Engineering, (2010), № 7, pp.21-24, (in Russian).
3. **Созыкин С.А., Бескачко В.П.** Зависимость электрического сопротивления углеродной нанотрубки с металлическим типом проводимости от механического нагружения и интеркалирования серой. //Вестник Южно-Уральского университета: Сер. Математика, Механика, Физика, (2011), вып. 5, стр.115-119, **Sozikin S.A., Beskachko V.P.** Electrical Resistance of Carbone Nanotube with a Metallic Type of Conductivity During Mechanical Loading and Intercalation by Sulfur, Bulletin of the South Ural University: Ser. Mathematics, Mechanics, Physics; (2011), vol.5, pp. 115-119, (in Russian).
4. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.**, Колебание и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1992. **Ambartsumyan S.A., Belubekyan M.V.** Oscillation and stability of current-carrying elastic plates, (1992), Yerevan: Publishing house of the National Academy of Sciences of Armenia, (in Russian)..
5. **Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.** Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. Москва: Наука, 1977. **Ambartsumian S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekyan M.V.** Magneto elasticity of Thin Shells and Plates. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian).
6. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** О проблеме электромагнитоупругости тел с «ортотропной» электропроводностью. //Доклады НАН Армении, (2017), том.117. №2, стр.132-138. **Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V.** On the Electro magneto elasticity Problem of the Body with «Orthotropic» Electro conductivity, Reports of the NAS of Armenia, (2017), vol.117, №2, pp.132-138, (in Russian).

About autor:

Segrey A. Ambartsumian – Institute of Mechanics of NAS of Armenia,
E-mail: samb@gmail.com