ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика

УДК 539.3

ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ МИКРОПОЛЯРНОГО МАТЕРИАЛА СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Жамакочян К.А., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярная упругость, стеснённое вращение, тонкая пластинка, прикладная теория, метод конечных элементов.

Ժամակոչյան Ք.Ա., Սարգսյան Ս.Հ.

Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար նյութից պատրաստված առաձգական բարակ սալերի կիրառական մոդելը և վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրառությունը

Հիմնաբառեր: միկրոպոլյար առաձգականություն, կաշկանդված պտույտներ, բարակ սալ, կիրառական տեսություն, վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Աշխատանքում դիտարկվում են սալի բարակ տիրույթում կաշկանդված պտույտներով եռաչափ միկրոպոլյար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրները: Հիմք ընդունելով նախկինում մշակված վարկածները՝ կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալի կաշկանդված պտույտներով կիրառական տեսությունը, որում հաշվի են առնված լայնական սահքային դեֆորմացիաները: Ստացված է էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումը և կառուցված է համապատասխան վարիացիոն ֆունկցիոնալը: Միկրոպոլյար սալի կաշկանդված պտույտներով եզրային խնդիրների համար (ստատիկա և սեփական տատանումներ) մշակված է վերջավոր էլեմենտների մեթոդը: Ստացված են համապատասխան թվային արդյունքները, որոնց անալիզի օգնությամբ հաստատվում են նյութի միկրոպոլյարության հաշվառման հիմնական առանձնահատկությունները:

Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H.

Applied model of elastic thin plates made from micropolar material with constrained rotation and application of the finite element method

Key words: micropolar elasticity, constrained rotation, thin plate, applied theory, finite element method

In the present paper boundary value problems of three-dimensional micropolar theory of elasticity with constrained rotation are considered in thin region of the plate. On the basis of the previously developed hypotheses an applied theory of micropolar thin plates with constrained rotation is constructed, where transverse shear strains are taken into account. The energy balance equation is obtained and the corresponding variation functional is constructed. The finite element method is developed for the boundary problems (statics and natural oscillation) of micropolar plates with constrained rotation. On the basis of the analysis of the corresponding numerical results main properties of the micropolarity of the material are established.

В работе рассматриваются краевые задачи трёхмерной микрополярной теории упругости с стеснённым вращением в тонкой области пластинки. Принимая в основу ранее разработанные гипотезы, построена прикладная теория микрополярных тонких пластин с стеснённым вращением, при которой учитываются поперечные сдвиговые деформации. Получено уравнение баланса энергии и построен соответствующий вариационный функционал. Для краевых задач (статики и собственных колебаний) микрополярных пластин с стеснённым вращением разработан метод конечных элементов. Приведены соответствующие численные результаты, при помощи анализа которых устанавливаются основные свойства учёта микрополярности материала.

Введение. Наряду с моделью трёхмерной моментной (несимметричной, микрополярной) среды со свободным вращением братьев Э. и Ф. Коссера [1] и начиная со статьи [2], разрабатывались также двух- и одномерные обобщённые модели, т.е., фактически, модели стержней, пластин и оболочек. Предложенная в [2] модель стала одной из наиболее общих моделей оболочек и метод её построения (прямой метод) получил дальнейшее развитие в работах [3-12]. Этот метод с самого начала трактует оболочку, как материальную поверхность, пластинку – как материальную плоскость, стержень – как материальную линию и устанавливает законы их деформирования под действием обобщённых внутренних и внешних сил. Как видно, по существу, этот метод игнорирует пространственную структуру оболочки (пластинки) по толщине, стержня – по сечению и не даёт конструктивных приёмов восстановления объёмных полей перемещений, деформаций и напряжений в указанных тонких телах.

Указанные неопределённости раскрывает другой аппроксимационный способ построения моделей уменьшённой размерности для деформируемых тонких тел, за исходную принимая трёхмерную формулировку задачи. Уменьшение размерности достигается той или иной аппроксимацией объёмного поля перемещений по направлениям малых размеров тел. В этом направлении можем указать два основных метода: асимптотический метод и метод гипотез. Понятно, что с точки зрения инженерных приложений предпочтителен метод гипотез. С математической точки зрения целесообразно принятие таких гипотез, которые адекватно описывают основные свойства асимптотического решения трёхмерной задачи в тонких областях.

В работах [13-18] на основе асимптотических свойств решений трёхмерной микрополярной теории упругости со свободным вращением в тонких областях [19] сформулированы достаточно общие гипотезы и построены прикладные теории микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. В работах [20,21] развивается метод конечных элементов решения краевых задач статики и динамики микрополярных упругих тонких стержней и пластин со свободным вращением.

Наряду с трёхмерной теорией микрополярной упругости со свободным вращением, начиная с шестидесятых годов прошлого века, развивалась также теория микрополярной упругости со стеснённым вращением [22-25].

В работах [26-29] на основе кинематических гипотез Бернулли, Кирхофа или Кирхофа Лява, построены прикладные модели изгибной деформации микрополярных упругих тонких стержней, пластин и пологих оболочек со стеснённым вращением.

В работе [30], используя аналогичные гипотезы, построена прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением.

В данной работе на основе гипотез работ [13-17] построена прикладная теория микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением, при которой учитываются деформации поперечных сдвигов. Получено уравнение баланса энергии и построен общий вариационный функционал. Далее развивается метод конечных элементов для решения краевых задач прикладной теории статики и свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением. Рассматриваются конкретные задачи изгиба и собственных колебаний микрополярных тонких пластин, которые решаются методом конечных элементов. Приводятся конкретные численные результаты, на основе анализа которых устанавливаются эффективные свойства микрополярных материалов по сравнению с их классическими аналогами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим микрополярную изотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, как тонкое трёхмерное тело. Оси x_1 и x_2 декартовой системы координат отнесём к срединной плоскости пластинки, ось x_3 будет перпендикулярна к этой плоскости.

Будем исходить из основных уравнений трёхмерной микрополярной (моментной, несимметричной) статической теории упругости со стеснённым вращением:

уравнения равновесия (движения):

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0\left(\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}\right),\ \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_3}+\sigma_{23}-\sigma_{32}=0\left(J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}=0\left(\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}\right),\ \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}+\sigma_{31}-\sigma_{13}=0\left(J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}\right),\quad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0\left(\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}\right),\ \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial x_3}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0\left(J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}\right);$$

физические соотношения упругости:

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{11}-\nu\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)\right),\ \varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}=\frac{\sigma_{13}+\sigma_{31}}{2\mu},$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{22}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{33}\right)\right),\ \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=\frac{\sigma_{23}+\sigma_{32}}{2\mu},\quad (2)$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{33}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\right),\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{\sigma_{12}+\sigma_{21}}{2\mu},$$

$$\chi_{11}=\frac{\mu_{11}}{2\gamma},\qquad \chi_{22}=\frac{\mu_{22}}{2\gamma},\qquad \chi_{33}=\frac{\mu_{33}}{2\gamma},$$

$$\chi_{21}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{21}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{12},\quad \chi_{12}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{12}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{21},$$

$$\chi_{31}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{31}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13},\quad \chi_{13}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{31},\quad (3)$$

$$\chi_{32}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{32}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{23},\quad \chi_{23}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{23}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{32};$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\qquad \varepsilon_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\qquad \varepsilon_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{13}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}+\frac{\partial V_3}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{23}=\frac{\partial V_3}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial x_3},\quad (4)$$

$$\chi_{11}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1},\quad \chi_{22}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2},\ \chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3},\quad \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\ \chi_{21}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2},$$
$$\chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\ \chi_{31}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3},\ \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2},\ \chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3},\quad \vec{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{V},\tag{5}$$

$$\omega_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right),\ \omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right),\quad \omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right).\tag{6}$$

Здесь (V_1,V_2,V_3) – компоненты вектора перемещения; $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ –компоненты вектора вращения; $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}$ – компоненты тензора деформации; $\chi_{11},\chi_{22},\chi_{33},\chi_{12},\ \chi_{21},\chi_{13},\chi_{23},\chi_{31},\chi_{32}$ – компоненты тензора изгиба- кручений; $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{13},\ \sigma_{31},\sigma_{23},\ \sigma_{32}$ – компоненты тензора силовых напряжений; $\mu_{11},\mu_{22},\mu_{33},\mu_{12},\mu_{21},\mu_{13},\mu_{31},\mu_{23},\mu_{32}$ – компоненты тензора моментных напряжений; $E,\nu,\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)},\gamma,\varepsilon$ – упругие коэффициенты изотропного микрополярного материала; ρ – плотность материала; J – мера инерции материала при вращении.

На лицевых плоскостях $(x_3=\pm h)$ будем считать, что заданы значения напряжений $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32}$, а на боковой поверхности, в общем случае, могут быть заданы: либо напряжения (силовые и моментные), либо перемещения и повороты, либо смешанные условия.

В случае динамической задачи будем считать заданными начальные условия для величин: $V_1,V_2,V_3,\dfrac{\partial V_1}{\partial t},\dfrac{\partial V_2}{\partial t},\dfrac{\partial V_3}{\partial t}$ при $t=0$.

Известным образом из уравнений (1)-(5) можем перейти к уравнению баланса энергии трёхмерной микрополярной теории упругости со стеснённым вращением:

$$W=A,\tag{7}$$

где W – потенциальная энергия деформации:

$$W=\iint_{(S)}\int_{-h}^{h}W_0\,dx_1dx_2dx_3,\tag{8}$$

A – работа внешних силовых и моментных напряжений; W_0 – плотность потенциальной энергии деформации

$$W_0=\frac{1}{2}\Bigg[\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2\right)+\frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\right)+$$
$$+\mu\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2\right)+2\gamma\left(\chi_{11}^2+\chi_{22}^2+\chi_{33}^2\right)+(\gamma+\varepsilon)\chi_{21}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{12}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{12}\chi_{21}+\tag{9}$$
$$+(\gamma+\varepsilon)\chi_{31}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{13}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{31}\chi_{13}+(\gamma+\varepsilon)\chi_{32}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{23}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{32}\chi_{23}\Bigg].$$

Наша цель, считая, что пластинка тонкая, построить прикладную теорию изгиба микрополярной пластинки и разрабатывать метод конечных элементов для решения граничных задач именно этой прикладной теории. Отметим, что в задаче изгиба пластинки: V_3, ω_1, ω_2 – чётные по x_3-функции, а V_1, V_2, ω_3 – нечётные по x_3-функции.

Отметим, что задачи плоского напряжённого состояния тонкой микрополярной пластинки рассмотрены в работах [22-25].

2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты, деформации, изгиб-кручения, силовые и моментные напряжения.

Примем следующие достаточно общие гипотезы [14]:

1) Кинематическая гипотеза Тимошенко: в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной плоскости волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной плоскости.

Принятую гипотезу математически можем записать так: тангенциальные перемещения распределены по толщине пластинки по линейному закону, а нормальное перемещение не зависит от поперечной координаты x_3, т.е.

$$V_i = x_3\psi_i\left(x_1, x_2, t\right), \quad i = 1,2; \qquad V_3 = w\left(x_1, x_2, t\right). \tag{10}$$

В этом случае для углов вращения точек тела получим:

$$\omega_1 = \Omega_1\left(x_1, x_2, t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right), \quad \omega_2 = \Omega_2\left(x_1, x_2, t\right) = \frac{1}{2}\left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1}\right),$$
$$\omega_3 = x_3\iota\left(x_1, x_2, t\right), \qquad \iota = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right). \tag{11}$$

2) Предположение о тонкостенности пластинки (т.е. примем следующее приближённое равенство: $1 + \frac{2h}{a} \approx 1$, где $2h$ – толщина пластинки, a – линейный наименьший размер пластинки в плане);

3) Силовое напряжение σ_{33} в обобщённом законе Гука для $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ можно пренебречь относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22};

4) В выражении для χ_{i3} (из (3)) будем пренебрегать моментным напряжением μ_{3i}, относительно $\mu_{i3}(i = 1,2)$.

5) Для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} $(i = 1,2)$ сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}\left(x_1, x_2, t\right) \quad (i = 1,2). \tag{12}$$

После определения указанных величин, значение σ_{3i} $(i = 1,2)$ окончательно определим, соответственно, как сумму значения (12) и результата интегрирования первого и второго из (1) уравнений равновесия (движения), для каждого из этих интегралов потребовав условие, чтобы усреднённое по толщине пластинки величина была равна нулю.

Изучение задачи изгиба микрополярной упругой пластинки на основе принятых выше гипотез начнём с определения компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений.

Имея формулы для перемещений (10) и поворотов (11), используя выражения (4) и (5) для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений, будем иметь:

$$\varepsilon_{11}=x_3K_{11},\ \varepsilon_{22}=x_3K_{22},\ \varepsilon_{12}=x_3K_{12},\ \varepsilon_{13}=\Gamma_{13},\ \ \varepsilon_{23}=\Gamma_{23},\ \varepsilon_{33}=0,\ \chi_{11}=k_{11},$$
$$\chi_{22}=k_{22},\ \chi_{33}=k_{33},\ \chi_{12}=k_{12},\ \chi_{21}=k_{21},\ \chi_{13}=x_3l_{13},\ \chi_{23}=x_3l_{23},\ \chi_{31}=0,\ \chi_{32}=0, \tag{13}$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\ K_{22}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\ K_{12}=K_{21}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2},\ \Gamma_{13}=\psi_1+\frac{\partial w}{\partial x_1},\ \Gamma_{23}=\psi_2+\frac{\partial w}{\partial x_2},$$
$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},\ k_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},\ k_{33}=\iota,\ k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},\ \ k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2},\ l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial x_1},\ \ l_{23}=\frac{\partial\iota}{\partial x_2}. \tag{14}$$

Теперь перейдём к изучению силовых и моментных напряжений в пластинке.
Используя гипотезы 3), 4) и 5), на основе выражений обобщённого закона Гука (2), (3) и уравнений равновесия, для силовых и моментных напряжений получим:

$$\sigma_{11}=x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left(K_{11}+\nu K_{22}\right),\ \sigma_{22}=x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left(K_{22}+\nu K_{11}\right), \tag{15}$$

$$\sigma_{12}+\sigma_{21}=2\mu x_3K_{12},\ \sigma_{13}+\overset{0}{\sigma}_{31}=2\mu\Gamma_{13},\ \sigma_{23}+\overset{0}{\sigma}_{32}=2\mu\Gamma_{23}, \tag{16}$$

$$\mu_{11}=2\gamma k_{11},\quad \mu_{22}=2\gamma k_{22},\mu_{33}=2\gamma k_{33},\quad \mu_{21}=\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{21}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12},$$
$$\mu_{12}=\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{21},\quad \mu_{13}=x_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13},\ \ \mu_{23}=x_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}, \tag{17}$$

$$\sigma_{33}=-x_3\left[\left(\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}\right)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right], \tag{18}$$

$$\sigma_{31}=\overset{0}{\sigma}_{31}+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_3^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overset{1}{\sigma}_{21}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)\quad\left(1\leftrightarrow 2\right), \tag{19}$$

$$\mu_{31}=-x_3\left(\frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}\right)+x_3\left(\overset{0}{\sigma}_{32}-\sigma_{23}\right)+J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2},$$
$$\mu_{32}=-x_3\left(\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}\right)+x_3\left(\sigma_{13}-\overset{0}{\sigma}_{31}\right)+J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}, \tag{20}$$

Легко убедиться, что используя выражения для напряжений $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32}$, можем удовлетворить граничным условиям на плоскостях $x_3=\pm h$ (при изгибе):

$$\sigma_{33}\big|_{x_3=\pm h} = \pm\frac{1}{2}q_3, \sigma_{31}\big|_{x_3=\pm h} = \frac{1}{2}q_1 \quad (1\to 2), \quad \mu_{31}\big|_{x_3=\pm h} = \pm\frac{1}{2}m_1 \quad (1\to 2). \tag{21}$$

3. Прикладная теория изгибной деформации микрополярных пластин со стеснённым вращением.

Для построения прикладной теории микрополярной пластинки вводим интегральные по её толщине усреднённые характеристики: усилия, моменты и гипермоменты:

$$\begin{gathered} N_{i3} = \int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dx_3, \quad N_{3i} = \int_{-h}^{h}\sigma_{3i}dx_3, \quad M_{ii} = \int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ii}dx_3, \quad H_{ij} = \int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ij}dx_3, \\ L_{ii} = \int_{-h}^{h}\mu_{ii}dx_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^{h}\mu_{ij}dx_3, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^{h}x_3\mu_{i3}dx_3, \quad i=1,2. \end{gathered} \tag{22}$$

На основе формул для напряжений $(\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32})$, удовлетворяя граничным условиям (21), приходим к уравнениям равновесия (движения) прикладной теории микрополярной упругости со стеснённым вращением для тонкой пластинки:

$$\begin{gathered} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = \left(2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) - q_3, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{21}}{\partial x_2} - N_{31} = \left(\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right) - q_1 h, \\ \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - N_{32} = \left(\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right) - q_2 h, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + N_{23} - N_{32} = \left(2Jh\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}\right) - m_1, \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + N_{31} - N_{13} = \left(2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}\right) - m_2, \\ \left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}\right) - H_{21} + H_{12} = 0 \ \left(2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Соотношения упругости прикладной моментной теории изгиба тонких пластин со стеснённым вращением получим на основе выражений закона Гука в виде (15)-(17):

$$\begin{gathered} M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}+\nu K_{22}), \quad M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22}+\nu K_{11}), \\ H_{12}+H_{21} = \frac{4\mu h^3}{3}K_{12}, \quad N_{13}+N_{31} = 4h\mu\Gamma_{13}, \quad N_{23}+N_{32} = 4h\mu\Gamma_{23}, \\ L_{11} = 4h\gamma k_{11}, \ L_{22} = 4h\gamma k_{22}, \\ L_{12} = 2h[(\gamma+\varepsilon)k_{12} + (\gamma-\varepsilon)k_{21}], \quad L_{21} = 2h[(\gamma+\varepsilon)k_{21} + (\gamma-\varepsilon)k_{12}], \end{gathered} \tag{24}$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}\right],\quad \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}\right].$$

К уравнениям (23) и (24) следует присоединить геометрические соотношения (14).

Уравнения равновесия (движения) (23), соотношения упругости (24) и геометрические соотношения (14) определяют модель микрополярной упругой тонкой пластинки со стеснённым вращением. К этой основной системе уравнений следует присоединить граничные условия (и начальные условия в случае динамики). Какие граничные условия можем ставить на контуре срединной плоскости пластинки? Это будет видно ниже, когда получим формулу для вычисления работ усилий и моментов на указанном контуре.

Если в соответствующем уравнении трёхмерной теории (7) примем во внимание формулы для перемещений (10), поворотов (11), деформаций и изгиб-кручений (13), можем получить уравнение баланса энергии прикладной теории микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением:

$$\tilde{W}=\tilde{A}, \tag{25}$$

где $\tilde{W}$ – потенциальная энергия деформации, $\tilde{A}$ – работа внешних усилий и моментов.

Потенциальная энергия деформации определяется соотношением:

$$\tilde{W}=\iint\limits_{(S)}\tilde{W}_0 ds, \tag{26}$$

где (S) – область занимаемой срединной плоскостью пластинки, $\tilde{W}_0$ – плотность потенциальной энергии деформации микрополярной пластинки при изгибе, выражающемся следующей формулой:

$$\tilde{W}_0=\frac{1}{2}\left[\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{11}^2+K_{22}^2+2\nu K_{11}K_{22}\right)+\frac{2\mu h^3}{3}K_{12}^2+2\mu h(\Gamma_{13}^2+\Gamma_{23}^2)+\right.$$
$$+4\gamma h(k_{11}^2+k_{22}^2+k_{33}^2)+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{21}^2+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}^2+ \tag{27}$$
$$\left.+4h\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12}k_{21}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}^2+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}^2\right],$$

а работа внешних распределённых усилий и моментов определяется по формуле:

$$\tilde{A}=\iint\limits_{(S)}\left[\left(hp_1\psi_1+hp_2\psi_2+p_3w\right)+\left(m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+\iota hm_3\right)\right]ds+$$
$$+\int\limits_{l_1}\left[\left(M_{11}\psi_1+M_{12}\psi_2+N_{13}w\right)+\left(L_{11}\Omega_1+L_{12}\Omega_2+\Lambda_{13}\iota\right)\right]dl+ \tag{28}$$
$$+\int\limits_{l_2}\left[\left(M_{21}\psi_1+M_{22}\psi_2+N_{23}w\right)+\left(L_{21}\Omega_1+L_{22}\Omega_2+\Lambda_{23}\iota\right)\right]dl.$$

Вариационный принцип Лагранжа для прикладной теории микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением можем записать так:

$\delta\widetilde{\Pi} = 0$, где $\widetilde{\Pi} = \widetilde{W} - \widetilde{A}$. (29)

4. Матрица жёсткости конечного элемента микрополярной упругой пластинки со стеснённым вращением.

Получение уравнений метода конечных элементов в перемещениях и поворотах основано на вариационном принципе Лагранжа (29).

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент. Основными кинематическими параметрами в задаче об изгибе микрополярной пластинки со стеснённым вращением являются перемещение точки срединной плоскости w; углы поворота нормального к срединной плоскости линейного элемента в плоскостях x_1x_3 и x_2x_3 – ψ_1, ψ_2. Будем аппроксимировать распределение принятых основных кинематических переменных по элементу прямоугольника срединной плоскости пластинки элемента полиномами. Для прогиба $w(x_1, x_2)$ необходимо положить:

$$w(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \\ + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3, \quad (30)$$

а для ψ_1, ψ_2 имеем совершенно аналогичные выражения, что и для w, но с другими постоянными коэффициентами, обозначение которых начинается с α_{13} в ψ_1 и заканчивается α_{36} в выражении для ψ_2.

Вектор узловых кинематических параметров конечного четыреёхузлового элемента $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}$ в общем виде представим так: $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e} = \{\boldsymbol{\delta}_i\}^\mathbf{T}$, где $\boldsymbol{\delta}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ – вектор неизвестных i-го узла; «Т» – символ операции транспонирования. При этом,

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i} = \left\{ \mathbf{w}_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i}, \boldsymbol{\psi}_{1\mathbf{i}}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i}, \boldsymbol{\psi}_{2\mathbf{i}}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i} \right\}^T.$$

Дальнейшие преобразования выполним в соответствии с алгоритмом вывода матрицы жёсткости конечных элементов (МКЭ).

Реализуя вариационный алгоритм теории МКЭ, придём к системе уравнений равновесия для конечного элемента пластины:

$$\mathbf{K_e}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e} = \mathbf{F_e}, \quad (31)$$

где $\mathbf{K_e}$ – матрица жёсткости конечного элемента микрополярной пластины размерностью 36×36; $\mathbf{F_e}$ – вектор эквивалентных узловых сил и моментов; $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}$ – вектор узловых кинематических параметров конечного элемента.

Уравнения равновесия всей пластины в матричном представлении можем представить так:

$$\mathbf{K}_\Sigma \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{F}_\Sigma, \quad (32)$$

где $\mathbf{K}_\Sigma$ – глобальная матрица жёсткости микрополярной пластины; $\mathbf{F}_\Sigma$ – глобальный вектор эквивалентных узловых сил и моментов всей пластины; $\boldsymbol{\Delta}$ – глобальный вектор узловых неизвестных:

$$\boldsymbol{\Delta} = \{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, ..., \boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}, ..., \boldsymbol{\delta}_\mathbf{N}\}^\mathbf{T},$$

где N – общее число узлов в системе.

Из решения глобальной системы уравнений равновесия, полученного с учётом граничных условий, определим распределения узловых параметров по срединной плоскости пластинки.

5. Модельный расчёт микрополярных упругих пластин со стеснённым вращением.

В качестве примера рассмотрим микрополярную квадратную пластину, которая шарнирно опёрта по всем четырём сторонам и изгибается нормальной нагрузкой $p_3 = \text{const}$, (в этом случае $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 \neq 0,\ m_1 = 0,\ m_2 = 0,\ m_3 = 0$). Для граничных условий шарнирного опирания имеем:

$$w = 0,\quad M_{11} = 0,\quad L_{12} = 0,\quad \Omega_1 = 0,\quad \psi_2 = 0,\quad \Lambda_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a$$

$$w = 0,\quad M_{22} = 0,\quad L_{21} = 0,\quad \Omega_2 = 0,\quad \psi_1 = 0,\quad \Lambda_{23} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0; a. \qquad (33)$$

После построения матрицы жёсткости $\mathbf{K}_\Sigma$ и вектора эквивалентных узловых сил и моментов $\mathbf{F}_\Sigma$, с учётом граничных условий (33) составим систему линейных алгебраических уравнений, соответствующих рассматриваемой задаче, при разных числах разбивания пластинки на конечные элементы.

Весьма важно знать, какая точность может быть достигнута в рассматриваемой задаче при уменьшении размеров элементов. Отметим, что ошибку в этой модельной задаче можем оценивать сравнением численного решения с известным точным решением (которое можно получить в виде тригонометрического ряда Фурье [14]).

Расчёты выполнены при следующих данных: $p_3 = 0.5 \cdot 10^{-3} \dfrac{кгс}{см^2}$, $a = b = 10см, h = 0.1см,\ E == 3060 \dfrac{кгс}{см^2}$, $\mu = 1093 \dfrac{кгс}{см^2}$, $\nu = 0.399,\quad \gamma = 2.4кгс,$ $\varepsilon = 2.4кгс$.

Таблица 1. Максимальные прогибы микрополярной и классической пластинки

	Микрополярная пластинка			Классическая пластинка			$\dfrac{w_{\max}^{класс} - w_{\max}^{мик}}{w_{\max}^{класс}} \cdot 100\%$
	Точное значение	2×2	4×4	Точное значение	2×2	4×4	
$w_{\max}$ см	0.006	0.0051	0.0058	0.008	0.072	0.008	27,5 %

Как видно из приведённых значений табл.1, учёт микрополярности материала пластинки в расчётах приводит к повышению жёсткости по сравнению с классическим случаем материала.

5.Динамическая задача микрополярной упругой пластинки со стеснённым вращением.

Общий вид функционала полной механической энергии (сумма потенциальной энергии деформации и кинетической энергии) микрополярно-упругой пластинки выражается так:

$$\tilde{U} = \iint\limits_{(S)} \left(\tilde{W}_0 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot w + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \cdot \psi_1 + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \cdot \psi_2 + \right.$$
$$\left. + Jh \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2} \cdot \Omega_1 + Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \cdot \Omega_2 + \frac{Jh^3}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} \cdot \iota \right) dS. \quad (34)$$

При свободных колебаниях основные кинематические функции задачи представим так:

$$w(x_1, x_2) = \left(\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \right.$$
$$\left. + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3 \right) \sin \omega t, \quad (35)$$

где ω – частота собственных колебаний. Для ψ_1, ψ_2 имеем совершенно аналогичные выражения, что и для w, но с другими постоянными коэффициентами, начиная от α_{13} (для ψ_1) и заканчивая α_{36} (для ψ_2).

Подставляя (35) в (34), задача минимизации функционала (34) приводится к нахождению минимума функции тридцать шесть независимых переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_{36}} = 0 \quad (\text{k} = 1,2,3,...,36).$$

Вычислив соответствующие частные производные, приходим к следующему матричному уравнению:

$$\left(K - \omega^2 M \right) \cdot \{\delta\} = 0, \quad (36)$$

где K – матрица жёсткости конечного элемента, M – матрица масс конечного элемента.

Таблица 2. Наименьшая частота свободного колебания ω

		Микрополярная пластинка сек$^{-1}$			Классическая пластинка сек$^{-1}$		
$a = b$ ($м$)	h ($м$)	Точное значение	2×2	4×4	Точное значение	2×2	4×4
$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$0{,}84 \cdot 10^6$	$0{,}74 \cdot 10^6$	$0{,}79 \cdot 10^6$	$0{,}74 \cdot 10^6$	$0{,}65 \cdot 10^6$	$0{,}69 \cdot 10^6$
10^{-7}	$0{,}5 \cdot 10^{-9}$	$1{,}34 \cdot 10^{11}$	$0{,}94 \cdot 10^{11}$	$0{,}98 \cdot 10^{11}$	$2{,}99 \cdot 10^9$	$2{,}73 \cdot 10^9$	$2{,}99 \cdot 10^9$
10^{-8}	$0{,}5 \cdot 10^{-10}$	$1{,}34 \cdot 10^{12}$	$0{,}94 \cdot 10^{12}$	$0{,}98 \cdot 10^{12}$	$2{,}99 \cdot 10^{10}$	$2{,}73 \cdot 10^{10}$	$2{,}99 \cdot 10^{10}$

Для определения частот свободных колебаний делается обращение матрицы жёсткости K и составляется вековое уравнение:

$$\left| K^{-1} M - \frac{1}{\omega^2} E \right| = 0.$$

Приводим результаты численных вычислений, данные задачи таковы:

$E = 2 \cdot 10^{11} \dfrac{H}{м^2}$, $\mu = 7 \cdot 10^{10} \dfrac{H}{м^2}$, $\nu = 0.3$, $\gamma = 24H$, $\varepsilon = 24H$; плотность и мера инерции при вращении материала: $\rho = 7700 \dfrac{кг}{м^3}$, $J = 5.3 \cdot 10^{-6} \dfrac{кг}{м}$.

Как видно из приведённых таблиц, учёт микрополярности материала пластинки приводит к повышению расчётной собственной частоты, а в области наноразмеров, эти частоты находятся в терагерцовом диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. et F. Theorie des deformables. Paris: Herman et Fils. 1909. 226 p.
2. Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells //Arch.Ration. Mech. Anal. 1957. Vol.1. №1. P.295-323.
3. Green A.E., Naghdi P.M., Wainwright W.L. A general theory of Cosserat surface//Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. Vol.20. №4. P. 287-308.
4. Rubin M.B. Cosserat theories: shells, rods and points. Dordrech: Kluwer Acad. Publ. 2000. 480 p.
5. Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория упругих простых оболочек//Успехи механики. 1988. Том 11. № 4. С.107-148. Altenbach Kh., Zhilin P.A. General theory of elastic simple shells// Successes of mechanics. 1988. Volume 11. № 4. P.107-148.
6. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. СПБ.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 167 с. Zhilin P.A. Applied mechanics. Basics of the theory of shells. Publishing of Polytechnic University. 2006. 167 pp.
7. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. On vectorially parametrized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum//International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol.46. P.2477-2480.
8. Шкутин Л.И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Изд-во «Наука». 1988. 128 с. Shkutin L.I. Mechanics of deformations of flexible bodies. Novosibirsk: Publishing «Nauka». 1988. 128 pp.
9. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2009. «On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography». // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
10. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates// Z Angew. Math. Mech. (ZAMM). 2009. V.89. № 4. P. 242-256.
11. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. М.: Изд-во «Наука». 2008. 287 с. Eremeev V.A., Zubov L.M. Mechanics of Elastic Shells. M.: Publishing «Nauka». 2008. 287 pp.
12. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек// В. сб.: «Прочность и вязко-упруго-пластичность». Механика деформируемого тела. М.: Изд-во «Наука». 1986. С.106-112. Palmov V.A. The simplest consistent system of equations in the theory of thin elastic shells. in Proceedings: Strength and Viscosity-Elastic-Plasticity. Mechanics of a deformable body. M.: Publishing «Nauka». 1986. P. 106-112.

13. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. № 1. P.98-108.
14. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С. 148-155. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics //Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012.Vol.53. №2. P.275-282.
15. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells// Journal of Physical Mezomechanics. 2012. Vol.15. № 1-2. P. 69-79.
16. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. Академии Наук России. 2011. Т.436. №2. С.195-198. Sargsyan S.H. The General Dynamic Theory of Micropolar Elastic Thin Shells// Doklady Physics, 2011. Vol.56. № 1. P.39-42.
17. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and Variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells// International Journal of Mechanics. 2014. Vol.8. P.93-100.
18. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011.Vol. 15. P.91-100.
19. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells// Advances in Pure Mathematics. August - 2015. Vol.5. №10. P.629-642.
20. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин// Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т.9. №3. С.375-383. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. The finite element method for calculation of bending of micropolar elastic thin plates //Computational continuum mechanics. 2016. V.9. № 3. P.375-383.
21. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Матрица жесткости конечного элемента микрополярной упругой тонкой пластинки// Известия НАН Армении. Механика 2017. Т.70. №1. С.22-39. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Stiffness matrix of the finite element of micropolar elastic thin plate//Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V.70. №1. P. 22-39.
22. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С.89-112. Koiter V.T. Moment stresses in the theory of elasticity// Mechanics. Period. sat. trans. inostr. articles. 1965. № 3. P.89-112.
23. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений// Механика. Период. сб. Перев. Иностр. Статей. 1964. №4. С. 115-128. Mindlin R.D. Influence of moment stresses on stress concentration // Mechanics. Period. Sat. trans. foreign articles. 1964. №4. P. 115-128.
24. Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости// Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. №4. С.80-114. Mindlin R. D., Tirsten G.F. Effects of moment stresses in the linear theory of elasticity// Mechanics. Period. Sat. Trans. foreign articles. 1964. № 4. P.80-114.

25. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевск. ун-та. 1965. 162с. Savin G.N. Basics of the plane moment theory of elasticity. Kiev: Publishing of Kiev. University. 1965. 162c.
26. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // Прикладаная механика. Тр. Америк. об-ва инж.-механиков. Серия Е. 1964. Т.31. №4. С.149-150. Hoffmek O. About bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses// Applied mechanics. Tr. Americas. Society of engineer-mechanics. Series E. 1964. V.31. № 4. P.149-150.
27. Винокуров Л.П., Деревянко Н.И. Построение основных уравнений для расчета стержней (без кручения) с учётом моментных напряжений // Прикладная механика. 1966. Т.2. № 3. С.72-79. Vinokurov L.P., Derevyanko N.I. Construction of basic equations for the calculation of rods (without torsion) with considering the moment stresses // Applied Mechanics. 1966. T.2. № 3. P.72-79.
28. Геворкян Г.А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений // Прикладная механика. 1966. Т.2. №10. С.36-43. Gevorkyan G.A. About bending of plates with considering the moment stresses// Applied Mechanics. 1966. T.2. №10. P.36-43.
29. Ганиев Н.С. К теории пологих оболочек с учетом моментных напряжений // В сб. «Исследования по теории пластин и оболочек». Казань: 1970. №6-7.С.200-207. Ganiev N.S. To the theory of shallow shells with considering the moment stresses //Studies on the theory of plates and shells. Kazan: 1970. № 6-7. P.200-207.
30. Саркисян С О. Общая теория тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости со стесненным вращением // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященной 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 года. С. 231-235. Sargsyan S.H. General theory of thin shells on the basis of asymmetric elasticity theory with constrained rotation// Elasticity and inelasticity. Proceedings of the International Scientific Symposium on the Problems of Mechanics of Deformable Bodies dedicated to the 100th anniversary of the birth of A.A. Ilyushin. Moscow. 20-21 January 2011. P. 231-235.

Сведения об авторах:

Жамакочян Кнарик Араратовна – аспирант Ширакского гос. университета им. М. Налбандяна.
Тел: (093)873294. **E-mail:** knarikzhamakochyan@mail.ru.

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н, проф., зав.кафедрой Высшей математики Гюмрийского госпединститута им. М.Налбандяна
Тел.: (091)15 16 98; **E-mail:** slusin@yaoo.com

Поступила в редакцию 28.09.2017