ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика

УДК 539.3

О ДИВЕРГЕНЦИИ РАСТЯНУТОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НАБЕГАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, растягивающие усилия, стабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գերձայնային գազի հոսքում ձգված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ կայունություն, ձգող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ձգված ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին, բեռնված ձգող ուժերով: Ցույց է տրված թիթեղի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում տեղայնացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և տեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On divergence of the stretched panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge

Key words: stability, the stretching forces, stabilizing effect, divergence of the panel, localized divergence, supersonic overrunning**.**

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of the stretching forces at the hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the stretching forces leads to the stabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

В линейной постановке исследуется зависимость форм потери статической устойчивости растянутой тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем от характера начального напряжённого состояния в предположении, что пластинка обтекается сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. Показана возможность потери устойчивости невозмущённой формы равновесия пластинки как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции в окрестности её свободного края. Установлено, что начальное напряжённое состояние, характеризуемое растягивающими усилиями, приводит при обтекании, в основном, к существенной стабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

Введение. Как известно [1(с.285), 2 (с.245), 3, 4], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, на много мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

Следует отметить, что не меньший интерес для практических приложений представляет рассмотрение задач устойчивости пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, при равномерном растяжении усилиями, расположенными в срединной поверхности пластинок.

Исследованию зависимости форм потери устойчивости от характера начального напряжённого состояния пластин и оболочек как необтекаемых, так и обтекаемых, посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях и в статьях [1, 2, 5, 6–8].

В предлагаемой статье в линейной постановке исследуется задача статической устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, равномерно растянутой в одном направлении вдоль шарнирно закреплённых краёв и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.

С помощью графоаналитических и численных методов исследования получено точное решение поставленной задачи устойчивости. Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка-поток» на область устойчивости и на области статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия растянутой пластинки теряет устойчивость в сверхзвуковом потоке газа, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции соответственно. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Установлена зависимость, при которой невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели или в виде локализованной дивергенции от характера начального напряжённого состояния, от скорости обтекающего её потока газа и от остальных «существенных» параметров системы «пластинка-поток». При этом, неожиданностью оказалась зависимость границы перехода из области дивергенции панели в область локализованной дивергенции – критическое значение коэффициента отношения сторон пластинки – от коэффициента напряжения.

Показано своеобразное влияние начального напряжённого состояния на невозмущённую форму равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки: начальное напряжённое состояние может привести как к существенному «скачкообразному» росту, так и к незначительному росту значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции в сравнении с соответствующими значениями обтекаемой панели с ненагруженными краями [16].

А сравнительный анализ полученных результатов с результатами работы [17] показал, что в задаче статической устойчивости обтекаемой прямоугольной пластинки при умеренных и больших значениях отношения сторон: ширины (сторона пластинки по потоку) к длине, наличие растягивающих усилий приводит к существенной стабилизации в отличие от сжимающих усилий, приводящих к дестабилизации.

Данная работа дополняет цикл работ, посвящённых изучению своеобразного действия составляющих нагрузки – сил различной природы: консервативных и неконсервативных на поведение динамической системы «пластинка-поток». В частности, следует отметить работы [16–19].

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V.

Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. При этом, пластинка растянута вдоль краев $y = 0$ и $y = b$ растягивающими силами $N_y = 2h\sigma_y$, σ_y – растягивающие усилия, которые предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [9, 10]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль кромок $y = 0$ и $y = b$ пластинки растягивающими силами $N_y = 2h\sigma_y$.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба растянутой тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [2 , 4]

$$D\Delta^2 w - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2(с. 27,101)]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{при } x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0\,,\ y = b\,; \tag{1.4}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагруженными краями $y = 0$ и $y = b$. Иными словами, требуется определить значения скорости потока газа V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2)-(1.4).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы панели, растянутой усилиями σ_y и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2)–(1.4) для прогиба $w(x, y)$.

Следует заметить, что в работах [19 – 21] в нелинейной постановке исследована задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки с нагруженными шарнирно закреплёнными краями.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка-поток» рассмотрим класс решений уравнения (1.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.2)–(1.4), в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x) \cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}. \tag{2.1}$$

где C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b; r – корни характеристического уравнения

$$r^4 - 2r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 + \beta_y^2 = 0 \tag{2.2}$$

или

$$(r^2 - 1)^2 = -\alpha_n^3 r - \beta_y^2, \tag{2.3}$$

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}\,,\ \beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h\sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2}\,,\ \alpha_n^3 > 0\,,\ \beta_y^2 > 0\,, \tag{2.4}$$

соответствующему дифференциальному уравнению (1.1).

Здесь, параметр α_n^3 характеризует неконсервативную составляющую нагрузки, а параметр β_y^2 – консервативную составляющую нагрузки.

Исследуем уравнение (2.2) при различных значениях $\alpha_n^3 > 0$, $\beta_y^2 > 0$.

Сведём характеристическое уравнение (2.2) с помощью преобразований Феррари [11] к двум квадратным уравнениям:

$$\begin{gathered} r^2 + \sqrt{2(q+1)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 - \beta_y^2} = 0, \\ r^2 - \sqrt{2(q+1)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 - \beta_y^2} = 0 \end{gathered}, \tag{2.5}$$

где q – параметр скорости потока газа V, являющийся действительным корнем кубического уравнения

$$8\cdot(q+1)(q^2-1-\beta_y^2)-\alpha_n^6=0\,,\ \ \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\,,\ \beta_y^2=2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2}\,, \quad (2.6)$$

откуда легко определяются выражения корней r_i характеристического уравнения (2.2):

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1)}\,, \quad (2.7)$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1)}\,. \quad (2.8)$$

В соответствии с условием (2.6) легко показать, что для всех $\beta_y^2\ge 0$ при значениях $q\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)$ корни $r_{1,2}$ характеристического уравнения (2.2), определяемые выражениями (2.7), являются отрицательными числами:

$$r_1<0\,,\ \ r_2<0\,; \quad (2.9)$$

а при значениях $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,\ (-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\right)$ – комплексно сопряжёнными числами с отрицательной вещественной частью:

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{0.5(q-1)-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}}\,,\ \ \mathrm{Re}\,r_1<0\,,\ \mathrm{Re}\,r_2<0\,. \quad (2.10)$$

Корни $r_{3,4}$, определяемые выражениями (2.8), в соответствии с условием (2.6), являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью при всех значениях $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,\infty\right)$ и $\beta_y^2\ge 0$.

В соответствии с выражениями (2.7), (2.8) и (2.8), (2.10) общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \ q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,\infty\right),\ \beta_y^2\ge 0\,. \quad (2.11)$$

А в соответствии с соотношением (2.6), скорость потока газа V для достаточно длинных пластинок $a\ll b$ и для прямоугольных пластинок умеренных размеров определится выражением

$$V=2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,, \quad (2.12)$$

а в случае достаточно широких прямоугольных пластин $a\gg b$ – соответственно, выражением

$$V=2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1} \quad (2.13)$$

при всех $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,\infty\right)$ и $\beta_y^2\ge 0$.

Здесь γ – параметр отношения ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma = ab^{-1}. \tag{2.14}$$

Как известно [3,5,13,14], необходимым условием потери статической устойчивости невозмущённого равновесного состояния как полубесконечной пластины-полосы ($\gamma \to \infty$ или $a \to \infty$), так и достаточно широкой прямоугольной пластинки $(a \gg b)$ в форме локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x = 0$, является условие затухания колебаний на крае $x = a$:

$$\lim_{x \to a} w(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in [0, b], \text{ когда } a \to \infty \text{ или } a \gg b. \tag{2.15}$$

Так как для весьма широких пластинок $(a \gg b)$ и для полубесконечной пластины-полосы $(\gamma = \infty)$ в общем решении (2.11) можно, считая $C_3 = C_4 = 0$, удовлетворять только первым двум граничным условиям (1.2), то условие (2.15), очевидно, имеет место, когда

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0,\ r_1 \in R,\ r_2 \in R; \tag{2.16}$$

$$\operatorname{Re} r_1 < 0,\ \operatorname{Re} r_2 < 0,\ r_1 \in W,\ r_2 \in W. \tag{2.17}$$

Учитывая условия (2.9) и (2.10), следует, что необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется при всех значениях $q \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}, \infty\right)$ как в случае обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(a \gg b)$, так и обтекаемой полубесконечной пластины-полосы ($a \to \infty$).

Иными словами, существует возможность потери статической устойчивости обтекаемых достаточно широких пластинок или пластины-полосы в форме локализованной дивергенции на свободном крае $x = 0$, когда $q \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}, \infty\right)$.

При этом, в соответствии с условием $C_3 = C_4 = 0$, общее решение (2.11) представится в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} \exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2} \exp(\mu_n r_2 x) \right) \cdot \sin(\mu_n y), \tag{2.18}$$

где r_1 и r_2 определяются выражениями (2.7) и (2.10), в которых допустимыми значениями параметра скорости $q(V)$ являются, соответственно, следующие интервалы:

$$q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 + 3\beta_y^2})/3, \infty \right),\ q \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2},\ (-1 + 2\sqrt{4 + 3\beta_y^2})/3 \right). \tag{2.19}$$

Нетрудно показать, что необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется также и при отсутствии обтекания как в случае достаточно широких прямоугольных пластинок, так и полубесконечной пластины-полосы.

В самом деле, при отсутствии обтекания $V = 0$ ($\alpha_n^3 = 0$) характеристическое уравнение (2.2) перепишется в виде

$$(r^2-1)^2+\beta_y^2=0\,, \tag{2.20}$$

имеющего при всех $\beta_y^2>0$ пару комплексно сопряжённых корней, определяемых выражениями:

$$r_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{0.5\cdot(\sqrt{1+\beta_y^2}+1)}\pm i\cdot\sqrt{0.5\cdot(\sqrt{1+\beta_y^2}-1)}\,. \tag{2.21}$$

В соответствии с условиями (2.17) следует, что при отсутствии обтекания в случае достаточно широких растянутых прямоугольных пластинок и растянутой полубесконечной пластины-полосы необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется при всех значениях $\beta_y^2\ge 0$.

Таким образом, необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется как в случае обтекаемых, так и необтекаемых достаточно широких растянутых прямоугольных пластин, а также в случае полубесконечной пластины-полосы при всех значениях $\beta_y^2\ge 0$. При этом, в случае обтекаемых пластин необходимое условие (2.15) выполняется только при значениях

$$q(V)\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\,\infty\right),\ \ \beta_y^2\ge 0\,. \tag{2.22}$$

Заметим, что графоаналитический метод анализа характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.3), в пространстве «существенных» параметров $M=\left\{q(V),n,\gamma,\beta_y^2,\nu\right\}$ системы «пластинка-поток» показал, что достаточные признаки статической неустойчивости могут выполняться в более узком интервале изменения параметра скорости $q(V)$ в сравнении с интервалом (2.22):

$$q(V)\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)\subset\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\,\infty\right),\ \beta_y^2\ge 0\,. \tag{2.23}$$

3. Исследуем достаточные признаки статической неустойчивости растянутой прямоугольной пластинки – дисперсионные уравнения при значениях параметра скорости (2.22) как при обтекании, так и при отсутствии обтекания.

Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_i, $i=\overline{1,4}$ характеристического уравнения (2.2) определяются, соответственно, выражениями (2.7), (2.8) и (2.8), (2.10), в граничные условия (1.2)–(1.4), получаем соответствующие однородные системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}.

Приравненный к нулю определитель этих систем уравнений – характеристический определитель приводит к дисперсионным уравнениям относительно «существенных» параметров $q(V)$, n, γ, β_y^2, ν исходной задачи устойчивости системы «пластинка-поток», описываемых при значениях $q(V)\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)$ и $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\ (-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\right)$, соответственно, соотношениями:

$$F_1(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2)= \tag{3.1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2(q+1)}\cdot\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2\right\}\cdot B_1B_2-\\
&-\sqrt{2(q+1)}\cdot\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2\right\}\cdot B_1B_2\cdot\\
&\cdot\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+\ 2\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\right.\right.\\
&-(2q^2-4q+1)(q+1)+\ (q-1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\cdot\beta_y^2-\\
&-2((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2)\nu+\\
&\left.+(q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\,\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+\\
&\left.+2\sqrt{2(q+1)}(q+1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot\\
&\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\ +2\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+\right.\right.\\
&+(2q^2-4q+1)(q+1)-(q-1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\beta_y^2+\\
&+2((2q-1)(q+1)+q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2)\nu-\\
&\left.-(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\,\nu^2\right]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-\\
&\left.-\sqrt{2(q+1)}\cdot(3(q^2-1)-2\beta_y^2)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\cdot\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot\\
&\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)=0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_2(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2)= \qquad\qquad (3.2)\\
&= \sqrt{2(q+1)}\cdot\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2\right\}\cdot\tilde{B}_1\tilde{B}_2-\\
&-\sqrt{2(q+1)}\cdot\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2\right\}\cdot\tilde{B}_1\tilde{B}_2\cdot\\
&\cdot\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+\ 2\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot\\
&\cdot\left\{2(q+1)\sqrt{2(q+1)(q^2-1-\beta_y^2}\cdot\cos(\pi n\gamma\tilde{B}_1)\cdot\cos(\pi n\gamma\tilde{B}_2)-\right.\\
&-(3q^2-3-2\beta_y^2)\sqrt{2(q+1)(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\sin(\pi n\gamma\tilde{B}_1)\cdot\sin(\pi n\gamma\tilde{B}_2)+\\
&-\tilde{B}_1\left[(q+1)q(q-2)+(q-1)(q^2-1-\beta_y^2)+(4q^2+2q-1-\beta_y^2)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+\right.\\
&\left.+2(2q^2+q-1-\beta_y^2+q\sqrt{q-1-\beta_y^2})\nu-(q+1-\sqrt{q-1-\beta_y^2})\,\nu^2\right]\cdot
\end{aligned}
$$

$$\cdot\cos(\pi n\gamma\tilde{B}_1)\cdot\sin(\pi n\gamma\tilde{B}_2)-$$

$$-\tilde{B}_2\Big[(q+1)q(q-2)+(q-1)(q^2-1-\beta_y^2)-(4q^2+2q-1-\beta_y^2)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+$$

$$+2(2q^2+q-1-\beta_y^2-q\sqrt{q-1-\beta_y^2})\nu-(q+1+\sqrt{q-1-\beta_y^2})\nu^2\Big]\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi n\gamma\tilde{B}_1)\cdot\cos(\pi n\gamma\tilde{B}_2)\}=0 \text{ при } q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\ (-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right);$$

где

$$B_1(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1)},\ \tilde{B}_1(q)=\sqrt{0.5(q-1)-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}}, \qquad (3.3)$$

$$B_2(q)=\tilde{B}_2(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1)}.$$

Здесь β_y^2 – коэффициент напряжения, характеризующий растягивающие силы, определяемый выражением (2.4); $q(V)$ – параметр скорости V потока газа – действительный корень кубического уравнения (2.6); γ – параметр отношения сторон пластинки, определяемый выражением (2.14); ν – коэффициент Пуассона.

В соответствии с выражениями (2.7) и (2.8), в силу условий (2.9) и (2.10), очевидно, что

$$B_1(q)>0,\ B_2(q)>0 \text{ при всех } q\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3,\infty\right),\ \beta_y^2\ge 0; \qquad (3.4)$$

$$\tilde{B}_1(\text{q})>0,\ \tilde{B}_2(q)>0 \text{ при всех } q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right),\ \beta_y^2\ge 0. \qquad (3.5)$$

В уравнениях (3.1) и (3.2) предполагается, что $\gamma\in(0,\infty)$. В соответствии с обозначением (2.14), значения $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки: при условии $\gamma=0$ пластинка удлинённая, а при условии $\gamma=\infty$ имеем полубесконечную пластину-полосу.

Далее, подставляя общее решение исходной задачи устойчивости в виде (2.18), в котором корни r_1 и r_2 определяются, соответственно, выражениями (2.7) и (2.10), в граничные условия (1.2), получаем две однородные системы алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2}. Приравненный к нулю определитель этих систем уравнений приводит к следующим дисперсионным уравнениям локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ как обтекаемой достаточно широкой пластинки $\gamma\gg 1$, так и обтекаемой полубесконечной пластинки-полосы $\gamma=\infty$, соответствующим условиям (2.19) соответственно:

$$K_1(q,\nu,\beta_y^2)=0,\ q\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3,\infty\right); \qquad (3.6)$$

$$K_2(q,\nu,\beta_y^2)=0,\ q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right). \qquad (3.7)$$

При этом оказалось, что для всех $\beta_y^2 \geq 0$ и коэффициента Пуассона ν уравнения (3.6) и (3.7) тождественны и описываются следующим соотношением:

$$K_1(q,\beta_y^2,\nu) = K_2(q,\beta_y^2,\nu) =$$

$$= \left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 = 0\,. \tag{3.8}$$

Легко показать, что

$$\lim_{\gamma\to\infty} F_1\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = K_1(q,\nu,\beta_y^2)\,,\ q \in \left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right), \tag{3.9}$$

$$\lim_{\gamma\to\infty} F_2\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = K_2(q,\nu,\beta_y^2)\,,\ q \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\right) \tag{3.10}$$

для всех значений параметров β_y^2, n и коэффициента Пуассона ν.

Полученные результаты численных исследований уравнений (3.2) и (3.7), описываемым выражением (3.8), проведённых при всех допустимых значениях параметров системы «пластинка-поток»: n, ν, $\gamma \in [0,\infty]$, $\beta_y^2 \geq 0$, $q(V) \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\right)$, показали, что

$$F_2(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) > 0\,,\ K_2(q,\nu,\beta_y^2) > 0\,, \tag{3.11}$$

т.е. уравнения (3.2) и (3.7) в интервале $\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\right)$ не имеют действительных корней $q = q(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)$ и $q = q(\gamma,\nu,\beta_y^2)$, соответственно.

Следовательно, достаточные условия неустойчивости (3.2) и (3.7) не выполняются. Это означает, что система «пластинка-поток» в случае, в котором характеристическое уравнение (2.2) имеет пару комплексно сопряжённых корней, определяемых выражениями (2.8) и (2.10), не теряет статической устойчивости.

Подставляя общее решение (2.11), в котором корни r_i, $i=\overline{1,4}$ определяются выражениями (2.21), в граничные условия (1.2)–(1.4) и, приравнивая к нулю определитель однородной системы уравнений четвёртого порядка относительно постоянных C_{nk}, получаем дисперсионное уравнение

$$F_3\left(n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = \left(\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)^2 - 2\cdot\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)\cdot\nu - \left(1-\nu\right)^2\right)\cdot \tag{3.12}$$

$$\cdot\left(1-\exp\left(-2\sqrt{2(1+\sqrt{1+\beta_y^2}}\cdot\pi n\gamma\right)\right) = 0\,,$$

являющимся достаточным признаком статической неустойчивости необтекаемой растянутой прямоугольной пластинки. А переходя к пределу в выражении (3.12) при условии $\gamma \to \infty$, получаем уравнение

$$K_3(\nu,\beta_y^2) = \lim_{\gamma\to\infty} F_3\left(n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = \tag{3.13}$$

$$=\left(\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)^2-2\cdot\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)\cdot\nu-(1-\nu)^2\right)=0,$$

определяющее достаточное условие локальной неустойчивости необтекаемой полубесконечной пластины-полосы.

Нетрудно показать, что при всех значениях параметров n,γ, ν и $\beta_y^2\geq 0$ достаточные условия статической неустойчивости (3.12) и (3.13) не выполняются.

В самом деле, запишем уравнение (3.13) в виде

$$\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}-\nu\right)^2-1+2(1-\nu)\cdot\nu=0. \tag{3.14}$$

Отсюда, в силу очевидных соотношений: $\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}-\nu\right)^2>1$, $(1-\nu)\nu>0$ и

$1-\exp\left(-2\sqrt{2(1+\sqrt{1+\beta_y^2}}\cdot\pi n\gamma\right)>0$, следует справедливость неравенств

$$F_3(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)>0,\ K_3(\nu,\beta_y^2)>0. \tag{3.15}$$

Следовательно, уравнения (3.12) и (3.13) не имеют решения на множестве действительных чисел.

Таким образом, достаточные условия статической неустойчивости (3.12) и (3.13) не выполняются: необтекаемая растянутая прямоугольная пластинка $\gamma\in(0,\infty)$ и полубесконечная пластина-полоса $\gamma\to\infty$ не теряют статической устойчивости при всех значениях параметров n, $\beta_y^2\geq 0$ и коэффициента Пуассона ν, что вполне согласуется с физическим смыслом рассматриваемой модели задачи устойчивости.

Непосредственной подстановкой значения $\beta_y^2=0$ в уравнения (3.1) и (3.8) легко можно убедиться в их тождественности соответствующим дисперсионным уравнениям, полученным в работах [14, 15] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины-полосы с ненагруженными краями.

Замечание. Несмотря на то, что корни (2.10) характеристического уравнения системы (2.2), являясь комплексно сопряжёнными числами с отрицательной вещественной частью, удовлетворяют необходимому условию локализованной неустойчивости (2.15) по сути, однако, такое описание корней не отражает физической сущности явления локализованной неустойчивости. А также свидетельством этому является невыполнимость достаточных признаков локализованной неустойчивости (3.7) и (3.13) – отсутствие решения соответствующих дисперсионных уравнений.

4. А теперь, перейдём к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки при допустимых значениях параметра скорости потока газа $q(V)$ в интервале

$$q(V)\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3,\infty\right). \tag{4.1}$$

Исследуем дисперсионные уравнения (3.1) и (3.8) при значениях (4.1) и при всех допустимых значениях остальных «существенных» параметров системы «пластинка-поток».

В пространстве «существенных» параметров $M = \left\{ q(V), n, \gamma, \beta_y^2, \nu \right\}$ рассматриваемой системы «пластинка-поток» введём в рассмотрение область устойчивости M_0 и области статической неустойчивости M_1, M_2, соответственно, соответствующие дивергенции растянутой панели и локализованной дивергенции.

Учитывая условие (4.1), в соответствии с соотношениями (3.1), (3.6) и (3.8) область устойчивости $M_0 \in M$ невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка-поток» будет определяться неравенствами:

$$F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) > 0\frac{1}{2}, \quad K_1(q, \nu, \beta_y^2) > 0. \tag{4.2}$$

Границами области устойчивости M_0 в пространстве её параметров M являются гиперповерхности:

$$F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = 0, \tag{4.3}$$

$$K_1(q, \nu, \beta_y^2) = 0, \tag{4.4}$$

где функции $F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ и $K_1(q, \beta_y^2, \nu)$ определяются выражениями (3.1) и (3.8), соответственно

Из способа разбиения пространства параметров M исходной задачи на области устойчивости и статической неустойчивости, очевидно, что области неустойчивости M_1, M_2 определяются, соответственно, соотношениями:

$$F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) < 0, \tag{4.5}$$

$$K_1(q, \nu, \beta_y^2) < 0. \tag{4.6}$$

На границе (4.3) области устойчивости M_0 невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет статическую устойчивость в форме дивергенции панели, а на границе (4.4) – в форме локализованной дивергенции.

Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$, полученные подстановкой значений первых корней $q_{cr.div.}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ уравнения (4.3) в выражение (2.12), разграничивают области устойчивости M_0 и статической неустойчивости в форме дивергенции панели M_1.

При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в форме дивергенции панели. В растянутой прямоугольной пластинке при обтекании возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её формы – пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_y^2)$, полученные подстановкой значений корня $q_{loc.div.} = q_{loc.div}(\nu, \beta_y^2)$ уравнения (4.4) в выражение (2.13), разграничивают области устойчивости M_0 и статической неустойчивости M_2 в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ достаточно широкой пластинки.

При скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к неустойчивости в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края растянутой достаточно широкой пластинки. В ней вследствие обтекания возникают дополнительные напряжения, приводящие к «выпучиванию» узкой полосы вдоль её свободного края $x=0$.

Границей между областями статической неустойчивости M_1 и M_2 является гиперповерхность

$$\lim_{\gamma\to\gamma_*} F_1(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) = K_1(q,\nu,\beta_y^2) = 0\,,\ \gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2) \in (0,\infty) \qquad (4.7)$$

при всех значениях $q(V) \in \left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)$, n, β_y^2 и коэффициента Пуассона ν.

Здесь $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$ – граничное значение параметра γ, разграничивающее области неустойчивости в форме дивергенции панели M_1 и в форме локализованной дивергенции M_2 при фиксированных значениях остальных параметров рассматриваемой задачи устойчивости: при значениях $\gamma < \gamma_*$ возможна потеря статической устойчивости только в форме дивергенции панели, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ – в форме локализованной дивергенции. При этом, уравнение (3.1) при значениях $\gamma < \gamma_*$ имеет бесконечное число действительных корней $q_{cr.div}^{(i)}(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)$, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ – один корень, равный корню $q_{loc.div}(\nu,\beta_y^2)$ уравнения (3.8), в силу условия (4.7):

$$q_{cr.div} = q_{loc.div}\,. \qquad (4.8)$$

Таким образом, как в случае полубесконечной пластины-полосы $\gamma \to \infty$ [14], достаточно широкая прямоугольная пластинка, у которой $\gamma \geq \gamma_*$, при значениях скорости потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$.

5. С помощью численных методов анализа найдены первые корни $q_{cr.div}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n,\gamma,\beta_y^2,\nu)$ уравнения (3.1) и корни $q_{\text{loc}.div} = q_{\text{loc}.div}(\beta_y^2,\nu)$ уравнения (3.8) при различных значениях параметров n, β_y^2, γ и ν.

Подстановкой значений $q_{cr.div}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n,\gamma,\beta_y^2,\nu)$ и $q_{\text{loc}.div} = q_{\text{loc}.div}(\beta_y^2,\nu)$ в выражения (2.12) и (2.13) соответственно, находим соответствующие значения приведённых критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

При этом, как показал численный анализ, наименьшему значению приведённых критических скоростей $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ при фиксированных значениях параметров $\gamma \in [0,\infty)$, $\beta_y^2 \ge 0$ и $\nu \in (0, 0.5)$ соответствует значение $n=1$, так что вдоль стороны b всегда образуется одна полуволна.

Далее, из условия (4.8) находим границу $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$ перехода из области дивергенции панели M_1 в область локализованной дивергенции M_2.

Ограниченность объёма статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. В табл. 1–4 представлены численные результаты решения задачи устойчивости растянутой прямоугольной пластинки (1.1)–(1.4), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости параметра отношения сторон прямоугольной панели $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$ (табл.1), зависимости значений приведённых критических скоростей локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл. 2) и дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл. 3–5) от «существенных» параметров системы «пластинка-поток» при значении $n=1$.

В табл.1 представлены граничные значения $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$, соответствующие некоторым значениям коэффициента растяжения $\beta_y^2 \in [0,\infty)$.

Таблица 1

β_y^2	0	4	9	16	25	64	100
γ_*	2	2	1.5	1.2	1.0	0.9	0.8

При значениях $\gamma < \gamma_*$ (табл.1) растянутая прямоугольная пластинка теряет устойчивость в форме дивергенции панели при скоростях $V \ge V_{cr.div.}^{(1)}$ потока газа, а при значениях $\gamma \ge \gamma_*$ (табл.1) – в форме локализованной дивергенции при скоростях $V \ge V_{loc.div.}$ потока газа.

Из данных, приведённых в табл.1, следует, что у пластин с большим коэффициентом растяжения β_y^2 граничное значение γ_* меньше: с возрастанием коэффициента растяжения β_y^2 более удлинённая прямоугольная пластинка теряет устойчивость не в форме дивергенции панели, а в форме локализованной дивергенции. Иными словами, большие значения β_y^2 приводят к существенной стабилизации состояния невозмущённого равновесия системы «пластинка-поток».

Заметим, что в случае как ненагруженной, так и сжатой обтекаемых панелей, граничное значение γ_* перехода из области дивергенции панели M_1 в область локализованной дивергенции M_2, и наоборот, не зависит от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0,\infty)$ – оно постоянно и равно $\gamma_* = 2$ [16, 17].

Для некоторых значениий $\beta_y^2 \ge 0$ и $\nu \in (0, 0.5)$ в табл.2 представлены значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) = V_{loc.div}(n,\nu,\beta_y^2)$, соответствующие значению $n = 1$.

Таблица 2

ν / β_y^2	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00	324.761	173.371	149.854	120.741	77.398
0.10	325.589	181.643	152.992	125.850	89.361
0.30	355.191	188.321	170.079	137.396	97.069
0.50	405.456	230.624	193.356	157.670	119.953
0.70	435.599	253.904	206.167	181.904	130.990
0.90	474.514	278.414	237.032	195.074	143.219
1.00	489.315	288.641	239.438	196.933	149.738
1.25	533.807	315.006	269.689	218.613	162.635
2.25	708.121	420.114	357.707	297.664	221.452
4.00	991.703	589.672	512.008	425.730	319.312
9.00	1716.926	1039.628	917.358	761.480	604.958
16.00	2645.703	1639.351	1440.411	1224.475	970.649
25.00	3820.590	2499.283	2142.408	1836.213	1447.754

Из данных, приведённых в табл. 2, видно, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с ростом коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0,\infty)$ – стремительно возрастает, в отличие от скорости локализованной дивергенции сжатых пластин [17]. Это указывает на существенную стабилизацию состояния плоской формы равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки при условии $\gamma \ge \gamma_*$ (табл.1).

Как следует из результатов численного анализа, в случае достаточно длинных панелей, у которых $\gamma < 0.1$, при значениях $\beta_y^2 \in [0, 25)$, при всех значениях коэффициента Пуассона ν и при значении $n = 1$ имеет место условие: $q_{cr.div}^{(1)} . = q_{cr.div}^{(1)}(n,\gamma,\nu,\beta_y^2) \gg 1$. Отсюда, в силу эквивалентности величин $q^2 - 1 \approx q^2 - 1 + \beta_y^2 \approx q^2 - 1 - \beta_y^2$ с точностью порядка 10^{-8}, следует, что дисперсионные уравнения, описывающие достаточные признаки дивергентной неустойчивости, соответствующие случаям, в которых, соответственно, панель ненагружена

[16] и панель сжата [17], тождественны дисперсионному уравнению (3.1) с точностью того же порядка, полученному в данной работе при исследовании задачи устойчивости растянутой панели.

Это означает, что в случае достаточно длинных пластин $\gamma < 0.1$ начальное напряжённое состояние, характеризуемое усилиями, будь то сжимающими или растягивающими, при умеренных значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0, 25)$ почти (с точностью порядка 10^{-8}) не оказывает влияния на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой пластинки при всех $\nu \in (0, 0.5)$.

Таблица 3

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00001	$0.3562 \cdot 10^{-8}$	$0.2949 \cdot 10^{-8}$	$0.2767 \cdot 10^{-8}$	$0.2455 \cdot 10^{-8}$	$0.1957 \cdot 10^{-8}$
0.0001	$0.3562 \cdot 10^{-6}$	$0.2949 \cdot 10^{-6}$	$0.2767 \cdot 10^{-6}$	$0.2455 \cdot 10^{-6}$	$0.1957 \cdot 10^{-6}$
0.001	$0.3562 \cdot 10^{-4}$	$0.2949 \cdot 10^{-4}$	$0.2767 \cdot 10^{-4}$	$0.2455 \cdot 10^{-4}$	$0.1957 \cdot 10^{-4}$
0.01	$0.3562 \cdot 10^{-2}$	$0.2949 \cdot 10^{-2}$	$0.2767 \cdot 10^{-2}$	$0.2455 \cdot 10^{-2}$	$0.1957 \cdot 10^{-2}$

В этом легко можно убедиться, также из сопоставления численных результатов – значений приведённой критической скорости дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ в случае достаточно длинных пластин $\gamma < 0.1$, полученных в данной работе (табл.3), с результатами работ [15,16] и [17], в которых исследована задача дивергентной неустойчивости ненагруженной и сжатой панели соответственно.

А, стало быть, в случае достаточно длинных пластин $\gamma < 0.1$ приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ не зависит от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0, 25)$, зависит только от параметров γ и ν: при всех значениях $\beta_y^2 \in [0, 25)$ она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν и убывает с уменьшением γ, устремляясь к нулю при $\gamma \to 0$ (табл. 3).

Итак, в случае достаточно длинных пластинок, у которых $\gamma < 0.1$, пока коэффициент напряжения $\beta_y^2 < 25$, наличие начального напряжённого состояния, обусловленное сжимающими усилиями или растягивающими, почти не оказывает влияние на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой пластинки для всех $\nu \in (0, 0.5)$.

Следует отметить некую «особенность» в поведении обтекаемой панели при значениях $\beta_y^2 \geq 25$ и $\gamma \in (0.036, 0.275)$: $q_{cr} = q_0$, q_0 – нижняя граница интервала допустимых значений параметра скорости $q(V) \in \left((-1 + 2\sqrt{4 + 3\beta_y^2})/3, \infty\right)$.

Обтекание при скоростях потока газа $V \geq V(q_0)$ приводит к «мгновенной» потере устойчивости в форме дивергенции панели: плоская форма равновесия пластинки «мгновенно» становится «изогнутой».

Однако, как показали численные исследования, при скоростях потока газа примерно $V \geq V_{stab.} \approx 312.456 \cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$, почти независящих от параметров $\gamma \in (0.036, 0.275)$ и $\beta_y^2 \geq 25$, неустойчивая плоская форма равновесия достаточно длинной прямоугольной пластинки становится устойчивой: изогнутая пластинка становится плоской.

В случае прямоугольной пластинки умеренных размеров $0.3 \leq \gamma < \gamma_*(\beta_y^2)$, где $\gamma = \gamma_*(\beta_y^2)$ (табл.1) – граница перехода от дивергенции панели к локализованной дивергенции, при значениях $\beta_y^2 \in [0, \infty)$ и всех значениях коэффициента Пуассона ν плоская форма равновесия пластинки при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл. 4, 5) теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

Таблица 4

γ \ β_y^2	0.00	0. 01	0.1	0.3	0.5	0.7
0.3	$\begin{Bmatrix} 0.3562 \\ 0.2949 \\ 0.2767 \\ 0.2455 \\ 0.1955 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.869 \\ 3.329 \\ 3.086 \\ 2.766 \\ 2.231 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.871 \\ 3.335 \\ 3.145 \\ 2.821 \\ 2.269 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.965 \\ 3.448 \\ 3.249 \\ 2.907 \\ 2.396 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4.125 \\ 3.519 \\ 3.344 \\ 3.021 \\ 2.485 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4.239 \\ 3.680 \\ 3.463 \\ 3.089 \\ 2.608 \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 3.820 \\ 3.299 \\ 3.080 \\ 2.760 \\ 2.223 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 14.096 \\ 13.542 \\ 11.984 \\ 10.823 \\ 9.125 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 15.152 \\ 13.768 \\ 12.134 \\ 11.044 \\ 9.476 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 16.275 \\ 14.264 \\ 13.137 \\ 11.798 \\ 9.813 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 17.245 \\ 14.997 \\ 14.150 \\ 12.602 \\ 10.343 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 18.348 \\ 16.036 \\ 15.005 \\ 13.580 \\ 11.282 \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 14.95 \\ 13.52 \\ 11.96 \\ 10.78 \\ 9.06 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 81.746 \\ 60.811 \\ 54.685 \\ 46.861 \\ 36.040 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 90.757 \\ 64.436 \\ 57.873 \\ 49.692 \\ 38.790 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 511.385 \\ 75.202 \\ 66.648 \\ 57.194 \\ 43.972 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 516.877 \\ 86.889 \\ 76.981 \\ 64.094 \\ 50.138 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 517.14 \\ 105.55 \\ 86.81 \\ 72.49 \\ 55.62 \end{Bmatrix}$
1.0	$\begin{Bmatrix} 80.47 \\ 60.09 \\ 54.32 \\ 46.75 \\ 35.95 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 523.15 \\ 159.66 \\ 127.80 \\ 102.48 \\ 71.81 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 530.05 \\ 581.64 \\ 142.92 \\ 111.76 \\ 79.96 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 539.34 \\ 247.11 \\ 174.65 \\ 132.59 \\ 94.33 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 556.63 \\ 309.79 \\ 209.71 \\ 152.80 \\ 106.43 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 571.70 \\ 349.57 \\ 249.14 \\ 176.98 \\ 120.04 \end{Bmatrix}$

1.2	$\begin{Bmatrix}522.80\\157.17\\126.42\\101.74\\70.21\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}618.32\\325.15\\258.13\\197.31\\135.20\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}626.55\\351.65\\279.69\\209.44\\145.25\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}671.11\\403.48\\325.42\\249.73\\167.72\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}709.06\\438.60\\370.42\\289.11\\198.07\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}752.71\\479.83\\397.62\\314.33\\216.98\end{Bmatrix}$

В этом случае приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от параметров γ, β_y^2 и ν: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с ростом γ и β_y^2 – возрастает (табл. 4, 5), в отличие от сжатых пластин [17].

Как следует из данных, приведённых в табли. 4 и 5, при увеличении коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 0$ до значения $\beta_y^2 = 16$ критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ растёт, примерно, в 10 раз и более.

Следовательно, с ростом значения коэффициента растяжения β_y^2 система «пластинка-поток» с растянутой пластинкой при умеренных значениях параметра $\gamma \in (0.3, \gamma_*)$ становится стабильной: она теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока газа V, намного превосходящих соответствующие критические скорости дивергенции системы «пластинка-поток» с ненагруженной прямоугольной пластинкой (табл. 4, 5).

Таблица 5

γ \ β_y^2	0.9	1.0	1.25	2.25	4.0	9.0	16.0
0.3	$\begin{Bmatrix}4.248\\3.759\\3.568\\3.258\\2.677\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}4.407\\3.818\\3.666\\3.272\\2.766\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}4.541\\4.007\\3.770\\3.442\\3.026\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}5.086\\4.573\\4.306\\3.984\\3.415\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}6.144\\5.562\\5.361\\4.947\\4.283\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}9.184\\8.494\\8.258\\7.774\\7.013\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}13.626\\12.739\\12.480\\11.954\\11.141\end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix}19.578\\17.208\\15.449\\14.344\\11.984\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}20.070\\17.679\\16.616\\14.774\\12.391\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}21.368\\18.913\\17.824\\15.938\\13.510\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}27.681\\24.318\\23.159\\20.968\\18.228\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}39.932\\34.759\\33.121\\30.160\\26.210\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}504.53\\468.76\\457.02\\69.01\\55.32\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}517.41\\474.76\\456.79\\427.27\\390.28\end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix}520.12\\128.85\\99.87\\81.54\\61.78\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}521.07\\404.41\\107.29\\86.28\\65.09\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}523.16\\408.59\\131.60\\98.57\\73.01\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}543.08\\418.32\\334.55\\173.40\\136.07\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}574.59\\445.88\\394.95\\304.97\\179.40\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}716.29\\523.54\\514.56\\443.23\\340.32\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1027.54\\768.24\\697.45\\617.21\\507.22\end{Bmatrix}$

1.0	$\begin{Bmatrix}584.43\\371.35\\280.84\\195.07\\137.73\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}594.93\\387.55\\293.54\\209.36\\141.43\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}614.73\\403.58\\327.49\\239.25\\162.63\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}690.75\\488.35\\420.11\\338.68\\233.08\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}848.93\\604.62\\536.02\\452.77\\338.09\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1698.59\\970.04\\865.69\\761.82\\615.77\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}2868.64\\1640.10\\1401.60\\1205.49\\959.32\end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix}789.05\\514.70\\434.87\\345.72\\247.48\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}809.96\\536.97\\456.33\\362.11\\254.08\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}876.65\\574.77\\496.51\\395.74\\285.84\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1109.38\\725.95\\632.18\\528.61\\392.75\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1122.61\\993.15\\874.88\\735.99\\568.17\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}3067.81\\1797.29\\1555.88\\1316.43\\1064.05\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}4573.86\\2903.52\\2558.54\\2083.09\\1678.04\end{Bmatrix}$

В табл. 4 и 5 значения критической скорости $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, взятые в фигурные скобки, соответствуют, соответственно, значениям коэффициента Пуассона ν : 0.125, 0.25, 0.3, 0.375, 0.5.

Таким образом, в сравнении с ненагруженной панелью [16], присутствие растягивающих усилий приводит к существенной стабилизации невозмущённого состояния равновесия обтекаемой пластинки, в отличие от сжимающих усилий, приводящих к дестабилизации [17].

Наиболее ярко эффект стабилизации проявляется при всех значениях параметра отношения сторон $\gamma \in [0.3, \infty)$, коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [2.25, \infty)$ и параметра Пуассона ν (табл. 2, 4, 5).

6. Основные результаты. В данной работе на примере обтекаемой сверхзвуковым потоком газа равномерно растянутой упругой прямоугольной пластинки со свободным краем проиллюстрировано своеобразное влияние начального напряжённого состояния на устойчивость невозмущённого состояния равновесия пластинки.

Определены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия теряет статическую устойчивость как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции в зависимости от параметров системы «пластинка-поток» в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка-поток» на области устойчивости и статической неустойчивости в форме дивергенции панели и в форме локализованной дивергенции. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости: дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Определены условия, позволяющие выявить возможность потери статической устойчивости пластинки в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции ранее, ещё до получения и исследования дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, разграничивающие области устойчивости и статической неустойчивости как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции.

Найдены граничные (критические) значения параметра отношения сторон панели в зависимости от коэффициента напряжения, разграничивающие области дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Показана существенная стабилизирующая роль начального напряжённого состояния, обусловленного наличием растягивающих усилий на кромках пластинки, на устойчивость плоской формы равновесия пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, при умеренных и больших значениях параметра γ, характеризующего отношение сторон панели.

Следует отметить, что при значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \geq 25$ и параметра $\gamma \in (0.036, 0.275)$ наблюдается «скачкообразное» падение параметра критической скорости дивергенции растянутой панели: наличие начального напряжённого состояния приводит при обтекании к «мгновенной» потере устойчивости. Однако, это не влияет на характер изменения зависимости критической скорости дивергенции от коэффициента напряжения. В целом, критическая скорость дивергенции панели является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения при фиксированных значениях остальных параметров, что повествует о стабилизирующем влиянии напряжённого состояния на устойчивость плоской формы пластинки.

А при значениях $\gamma < 0.1$ и $\beta_y^2 < 25$ наличие начального напряжённого состояния, обусловленного растягивающими усилиями, почти не оказывает влияния на устойчивость обтекаемой панели: значения критических скоростей с точностью порядка 10^{-8} равны соответствующим значениям критических скоростей как ненагруженной панели, так и сжатой панели [16, 17].

Таким образом, начальное напряжённое состояние, обусловленное растягивающими усилиями, оказывает, в основном, стабилизирующее действие на устойчивость системы «пластинка-поток».

Результаты работы могут быть использованы при исследовании задач панельного флаттера в нелинейной постановке [19 – 21].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.– М.: Физматгиз, 1963. 880с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. Moscow: Physmathgiz. 1963. 880 p.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука, 1961. 329 с. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. Moscow: Science. 1961. 329p. (in Russian).
3. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates. // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V.95. № 3. Pp. 38-46. (in Russian).
4. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243. Movchan A. A. On stability of a panel moving in a gas.// Proceed. of USSR Academy of Sciences. PMM. 1957. Vol. 21. № 2. P.231-243. (in Russian).

5. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods.// Moscow.: Science. Physmathlit. 1995. 320 p. (in Russian).
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968. Strength. Stability. Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I. A. Birger and Ya.G. Panovko. – Moscow.: Mechanical Engineering. 1968. (in Russian).
7. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с. Algazin S.D., Kiyko I. A. Flutter of plates and shells. – Moscow: Science. 2006. 247 p. (in Russian).
8. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука, 1978. Т.11. С.67–122. Novichkov Yu. N. A flutter of plates and shells. Results of science and technology Mechanics of deformable solids. – M.: Science. 1978. V.11. Pp.67-122. (in Russian).
9. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755. Ilyushin A. A. Law of plane sections at high supersonic velocity // PMM. 1956. V. 20. №6. Pp. 733-755. (in Russian).
10. Ashley GH., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P. 1109–1118.
11. .Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука. 1978. 832с. Korn G., Korn T. Handbook of mathematics. – M.: Science. 1978. 832 p. (in Russian).
12. Коненков Ю.К. Об изгибной волне "релеевского" типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave.// Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960, v. 6, № 1, pp. 124–126. (in Russian).
13. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности». Ереван: Изд-во ЕГУ. 1997. С. 95–99. Belubekyan M.V. The problem of localized instability of plates.// In the coll.: Questions of optimal control, stability and strength. Yerevan. Publishing house of the Yerevan State University. 1997. Pp. 95–99. (in Russian).
14. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. (1). С.29–34. (Proceed. NAS of Armenia. Mechanics. 2012. V.65(1). P. 29–34.)
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Дивергентная неустойчивость прямоугольной пластинки при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край.// Труды VIII Международной научной конференции "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Горис–Степанакерт (Армения), 2014, сентябрь 22-25, с. 98–103. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Divergence instability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge// Proceed. of the VIII International scientific conference: "The problems of dynamics of interaction of deformable media". The Goris–Stepanakert (Armenia) 2014, September 22-25, pp. 98-103. (in Russian).
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 2. С. 12 - 42. M.V. Belubekyan , S.R. Martirosyan. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when

the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V. 67(2). P. 12–42. (in Russian).
17. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т. 70. № 4. С.12–34. M.V. Belubekyan , S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70(4). P.12–34. (in Russian).
18. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the Destabilizing Effect of Constructional Friction in Supports on the Stability of a Plate in a Supersonic Gas Flow. // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 205, №4, Mart, 2015; 1072-3374/13/1714-01, Springer Science+Business Media New Jork.
19. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. № 1. С. 92–98. Baghdasaryan G.Ye. On stability of shallow shells, streamlined by a supersonic gas flow.// Proceed. of USSR AS. DTS. Mechanics and mechanical engineering. 1963. V.1. №1. P. 92–98. (in Russian).
20. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38 . Baghdasaryan G. E., Mikilyan M. A., Saghoyan R. O., Marzocca P. Effect of supersonic flow on the character of amplitude-frequency dependence of nonlinear vibrations of flexible plates.// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2013. V. 66. № 3. Pp. 24–38 . (in Russian).
21. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер нелинейных колебаний гибких пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа// Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. №4. С.20–40. Baghdasaryan G.E., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. Character of nonlinear vibrations of elastic plates streamlined by a supersonic gas flow.// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2016. V.69. № 4. P. 20-40. (in Russian).

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – к. ф.-м..н., профессор, гл. научн. сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – к.ф-м.н., ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 19. 01. 2018