

**ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЁХСЛОЙНОЙ
МАГНИТОСТРИКЦИОННОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ ПОМОЩИ
ГАРМОНИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А., Микилян М.А.

Ключевые слова: Трёхслойные магнитострикционные пластинки, динамическая устойчивость.

Բաղրասարյան Գ.Ե., Դանոյան Է.Ն., Միկիլյան Մ.Ա.

**Մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալում պարամետրական տիպի ռեզոնանսային տատանումների
գրգռումը ըստ ժամանակի հարմոնիկ մագնիսական դաշտի օգնությամբ
Հիմնաբաներ.** Եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալեր, դինամիկական կայունություն

Աշխատանքում հետազոտված են ըստ ժամանակի հարմոնիկ ընդլայնական մագնիսատան դաշտի ազդեցության տակ գտնվող եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն ֆերոմագնիսական սալի դինամիկական կայունության հարցերը: Կոնկրետ խնդրի լուծմամբ ցույց է տրված, որ սալի նյութի մագնիսաստրիկցիոն հատկությունների շնորհիվ դիտարկվող սալում հնարավոր են գրգռել պարամետրական տիպի ռեզոնանսային տատանումներ (դինամիկական կայունության կորստի հնարավորություն) ըստ ժամանակի հարմոնիկ մագնիսական դաշտի օգնությամբ: Ստացված են բանաձևեր դինամիկական անկայունության գլխավոր տիրույթների սահմանների որոշման համար: Հետազոտված են նաև սալի անհամասեռության և մագնիսաստրիկցիայի ազդեցությունները դիտարկվող տիրույթների վրա:

Baghdasaryan G.Y., Danoyan E.H., Mikilyan M.A.

Generation of resonant vibrations of parametric type in three-layered magnetostrictive plate with the help of harmonic in time magnetic field

Keywords: Three-layered magnetostrictive plates, Dynamic Stability.

In this paper the issues of dynamic stability of three-layered magnetostrictive ferromagnetic plate under the action of harmonic in time transversal magnetic field are studied. Having solved the certain problem in this paper it is established, that due to the magnetostrictive properties of plate material it is possible to generate resonant vibrations of parametric type (possibility of loss of dynamic stability) in the examined plate under the action of harmonic in time magnetic field. The influences of heterogeneity and magnetostrictive properties of the plate on the examined areas is studied, also.

В работе исследованы вопросы динамической устойчивости трёхслойных магнитострикционных ферромагнитных пластин под действием поперечного гармонического во времени магнитного поля. Путём решения конкретной задачи установлено, что, благодаря магнитострикционному эффекту, можно возбудить резонансные колебания параметрического типа (возможность потери динамической устойчивости) в рассматриваемой пластинке. Исследованы влияния неоднородности пластинки и магнитострикционных свойств материала на главные области параметрического резонанса.

Введение

На основе теории магнитоупругости магнестрикционных твёрдых тел и классической теории тонких упругих пластин в [1] получены основные уравнения и граничные условия, описывающие колебания и устойчивость трёхслойных магнестрикционных ферромагнитных пластин в стационарном магнитном поле. В настоящей работе на основе уравнений и граничных условий, полученных в указанной работе, путём решения конкретной задачи установлено, что, благодаря магнестрикционному эффекту, а) возможна потеря динамической устойчивости пластинки под действием нестационарного поперечного магнитного поля; б) при помощи магнитного поля, магнестрикционного свойства материала пластинки можно регулировать ширину и место расположения главных областей динамической устойчивости. Исследовано также влияние неоднородности пластинки на указанные области.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из трёх однородных изотропных упругих слоёв. Слои, симметрично расположенные относительно срединной плоскости пластинки, изготовлены из одинаковых диэлектрических неферромагнитных материалов и имеют одинаковую толщину. Материал среднего слоя пластинки является ферромагнитным диэлектриком, обладающим магнестрикционными свойствами. Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что координатная плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью среднего слоя. В слое с номером i координата x_3 изменяется в интервале $(\delta_{i3} - \delta_{i2})\delta - \delta_{i1}h < x_3 < (\delta_{i2} - \delta_{i1})\delta + \delta_{i3}h$, где δ_{ij} – символ Кронекера, $i = 1, 2, 3$. Считается, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения. Окружающая тело среда и материал внешних слоёв пластинки в отношении электромагнитных свойств принимаются в приближении вакуума. Пусть пластинка помещена в магнитное поле, которое в отсутствие пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризующего магнитного поля $\vec{B}_0(0, 0, B_{03}(t))$. Под \vec{B}_0 понимается магнитная индукция в вакууме (окружающая пластинку среда) при отсутствии пластинки.

Для математического моделирования процессов магнитоупругого взаимодействия в рассматриваемой пластинке принимаются основные положения следующих теорий и методов, используемых в задачах механики тонких пластин и оболочек:

- линеаризованная теория упругой устойчивости магнестрикционных твёрдых тел [2];
- классическая теория упругих пластин [3];
- асимптотический метод исследования упругих колебаний тонких пластин [4,5].

Учитывая вышеизложенное и поступая так же, как в [2,6] (в этих работах подробно изложен метод математического моделирования магнитоупругих процессов в магнитомягкой ферромагнитной пластинке, материал которой не обладает магнито-стрикционными свойствами), в [1] получены линеаризованные двумерные уравнения и соответствующие условия, описывающие колебания и устойчивость трёхслойных магнито-стрикционных пластин в поперечном магнитном поле. Для простоты и наглядности здесь рассматривается случай прямоугольной пластинки, торцы которой неподвижны в своей плоскости. Тогда, согласно [1], возможны чисто изгибные колебания и задача исследования поведения магнитоупругих возмущений в рассматриваемой пластинке при поперечных колебаниях сводится к решению следующего уравнения:

$$D\Delta^2 w + 2A[\rho] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T\Delta w = 0 \quad (1.1)$$

при классических граничных условиях [2] на контуре пластинки.

Здесь

$$D = \frac{2}{3} \left[\frac{E^{(1)}(h^3 - \delta^3)}{1 - (v^{(1)})^2} + \frac{E\delta^3}{1 - v^2} \right],$$

$$T = \frac{2\delta\chi^2 B_{03}^2(t)}{\mu_0 \mu_r^2} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{2 - v}{2(1 - v)} + \frac{2\mu_r}{1 + \mu_r k\delta} \right] e_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\mu_r}{1 + \mu_r k\delta} \right) e_2 + \frac{\mu_r}{1 + \mu_r k\delta} \left(\frac{\lambda e_1}{\lambda + 2\mu} - e_2 \right) \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\chi}{\mu_r} \right) \right\}, \quad (1.2)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

$$A[\rho] = (h - \delta)\rho^{(1)} + \delta\rho,$$

где

$$\sigma = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_{03}, \quad f = -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r} B_{03},$$

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \quad \lambda_2 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2, \quad \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2} B_{03}^2,$$

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 + v)(1 - 2v)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + v)},$$

$$\beta = \frac{d_1}{\mu_0 \mu_r}, \quad d_1 = -\frac{\chi^4 e_1^2}{\mu_r^2 (\lambda_3 + 2\mu)} B_{03}, \quad d_2 = \frac{\chi^2}{\mu_r} \left[\frac{e_1 - e_2}{2} - \frac{\lambda e_1}{\lambda_3 + 2\mu} \right] B_{03}.$$

В (1.1) и (1.2) $w(x_1, x_2, t)$ – прогиб пластинки; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ – магнитная константа; E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – магнитная проницаемость, e_1 и e_2 – магнитострикционные постоянные материала магнитострикционного слоя, $E^{(1)}$ – модуль упругости; $\nu^{(1)}$ – коэффициент Пуассона, $\rho^{(1)}$ – плотность материала внешних немагнитострикционных слоёв пластинки, индексом (1) обозначены величины, относящиеся к внешним слоям, индексом (2) – к срединному слою пластинки; t – время. Здесь и в дальнейшем, если соответствие каких-либо величин и уравнений конкретному слою очевидно, будем записывать их, пропуская указанные индексы. Учитывая, что для основных магнитострикционных материалов $\chi \sim 30$, $e_1 \sim 40$, $B_s \sim 0.3 \text{ Тл}$ (B_s – индукция насыщения) [2], принято, что при $|B_0| \leq B_s$ имеет место следующее ограничение $\chi(e_i |B_0|)^2 / \mu_0 E \ll 1$. Соотношения (1.2) представлены с учётом указанного ограничения.

Задачи, аналогичные сформулированным выше краевым задачам, в которых присутствуют неизвестные волновые числа k_1 и k_2 , решены в [2,4-6] путём применения асимптотического метода интегрирования [4,5]. В результате, в зависимости от граничных условий и форм колебаний получены соответствующие трансцендентные уравнения для определения k_1 и k_2 . Приведём указанные трансцендентные уравнения в случае сформулированной задачи при различных классических граничных условиях.

Пластинка жёстко закреплена по контуру. Граничными условиями задач для рассматриваемого случая жёсткого заземления являются:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a_1, \\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = a_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда, в зависимости от симметрии (по отношению к координатным осям $0x_1$ и $0x_2$) для определения k_1 и k_2 получим следующие уравнения:

$$\text{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} = -k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{ctg} \frac{a_2 k_2}{2} = -k_2 \left(2k_1^2 + k_2^2 - \frac{T}{D} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний,

$$\operatorname{tg} \frac{a_1 k_1}{2} = k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{a_2 k_2}{2} = k_2 \left(2k_1^2 + k_2^2 - \frac{T}{D} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно k_1 и k_2 получаются из приведённых комбинированием соответствующим образом одного из уравнений (1.4), с другим – из (1.5).

Пластика шарнирно закреплена по контуру. Граничные условия для рассматриваемого случая имеют вид:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a_1, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = a_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этом случае для k_1 и k_2 получены выражения:

$$k_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{a_2}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.7)$$

Соответствующим образом, комбинируя приведённые уравнения (1.3)-(1.7), можно получить уравнения относительно k_1 и k_2 для других видов опорного закрепления. Например, если стороны $x_1 = 0$ и $x_1 = a_1$ жёстко зашпелены, а стороны $x_2 = 0$ и $x_2 = a_2$ шарнирно опёрты, то в случае симметричных колебаний из (1.4) и (1.7) имеем:

$$\operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} = -k_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D_*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad k_2 = \frac{(2n-1)\pi}{2a_2}.$$

2. Динамическая неустойчивость пластинки под действием гармонического во времени магнитного поля

На основе уравнения (1.1) и граничных условий (1.6) (шарнирно опёртая прямоугольная пластинка) рассмотрим конкретную задачу с целью выявления эффектов, обусловленных взаимодействием пластинки и внешнего магнитного поля, а также неоднородного строения пластинки.

Пусть рассматриваемая пластинка помещена в нестационарном магнитном поле с вектором магнитной индукции $\vec{B}_0(0, 0, B_0(t))$, где $B_0(t) = B_0 + B_1 \cos \theta t$. Тогда, уравнение колебания пластинки, согласно (1.1), можно представить в виде

$$D\Delta^2 w + 2A[\rho] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \gamma \bar{B}_0^2(t) \Delta w = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\gamma = \frac{2\delta\chi^2}{\mu_0\mu_r^2} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{2-\nu}{2(1-\nu)} + \frac{2\mu_r}{1+\mu_r k\delta} \right] e_1 - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\mu_r}{1+\mu_r k\delta} \right) e_2 + \frac{\mu_r}{1+\mu_r k\delta} \left(\frac{\lambda e_1}{\lambda + 2\mu} - e_2 \right) \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\chi}{\mu_r} \right) \right\}.$$

С учётом (1.7) решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (1.6), представим в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a_1}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a_2}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1), для определения неизвестных функций $f_{mn}(t)$ получим следующие дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left(1 - 2\mu_{mn}^{(1)} \cos \theta t - 2\mu_{mn}^{(2)} \cos 2\theta t \right) f_{mn} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \Omega_{mn}^2 - \frac{\gamma_{mn} k_{mn}^2}{4A[\rho]} (2B_0^2 + B_1^2), \quad \Omega_{mn}^2 = \frac{D}{2A[\rho]} k_{mn}^4, \\ \mu_{mn}^{(1)} = \frac{\gamma_{mn} k_{mn}^2}{2A[\rho] \omega_{mn}^2} B_0 B_1, \quad \mu_{mn}^{(2)} = \frac{\gamma_{mn} k_{mn}^2}{8A[\rho] \omega_{mn}^2} B_1^2, \quad (2.4)$$

$$k_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2,$$

а γ_{mn} получается из выражения γ , заменяя в нём k на k_{mn} .

В (2.3) ω_{mn} – частоты магнитоупругих колебаний пластинки, $\mu_{mn}^{(1)}$ и $\mu_{mn}^{(2)}$ – коэффициенты возбуждения.

Уравнения (2.3) имеют периодические коэффициенты и, как известно [7,8], при некоторых соотношениях между коэффициентами имеют неограниченно возрастающие решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой магнитоупругой системы. Таким образом, показано, что присутствие периодического во времени магнитного поля может привести к возбуждению резонансных колебаний рассматриваемого типа в магнитострикционной пластинке. Причём, здесь, помимо области, расположенной около частоты $2\omega_{mn}$ (первая основная область), важным является также область, расположенная вблизи частоты ω_{mn} (вторая основная

область). Границы ω_*^\pm этих областей, согласно [7], определяются следующими формулами:

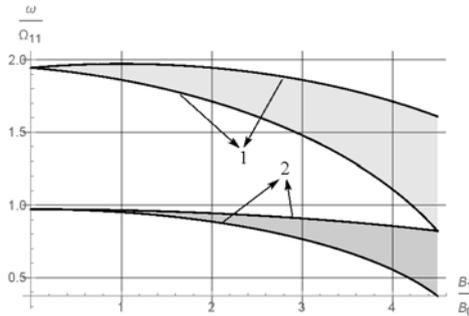
границы первой основной области

$$\frac{\theta_*^\pm}{2\omega_{mn}} = \left[1 - \frac{\gamma_{mn}}{k_{mn}^2 D} \left(B_0^2 + \frac{1}{2} B_1^2 \pm B_0 B_1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

границы второй основной области

$$\frac{\theta_*^\pm}{\omega_{mn}} = \left[1 - \frac{\gamma_{mn}}{2k_{mn}^2 D} \left(2B_0^2 + B_1^2 \pm \frac{1}{2} B_1^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

На фиг.1 показаны области динамической неустойчивости для квадратной ($b = a$) пластинки, средний слой которой изготовлен из материала Ферроскуб 7А1 (для которого $E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu^{(2)} = 0.33$, $\chi^{(2)} = 30$, $e_2 = 42$), а внешние слои изготовлены из материала Текстолит ПТ (у которого $E^{(1)} \approx E^{(2)}/2$, $\nu_1 = 0.28$) при $m = n = 1$, $B_0 = 0.1 \text{ Tл}$ и $a = 200h$. Кривые 1 и 2 построены по формуле (2.5), а кривые 3 и 4 – по формуле (2.6).

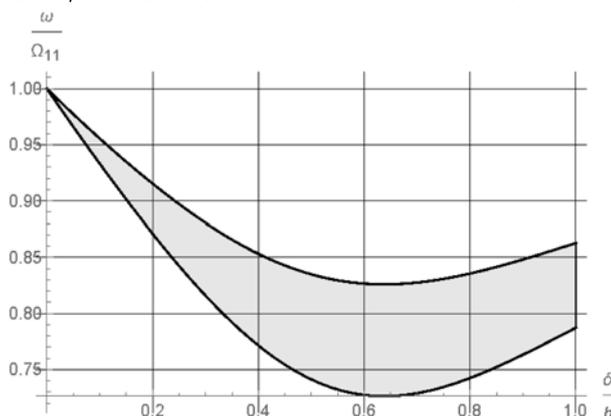


Фиг.1. Области динамической неустойчивости

Из этих формул и построенного на их основе фиг.1 видно, что: а) при любом $B_1 \neq 0$ возможно появление параметрического резонанса (при $B_1 = 0$, как и следовало ожидать, параметрический резонанс невозможен), б) ширина $(\theta_*^- - \theta_*^+)$ обеих областей неустойчивости является возрастающей функцией амплитуды B_1 нестационарной части внешнего магнитного поля; в) если $B_0 = 0$, то возбуждение параметрического резонанса вблизи частоты $2\omega_{mn}$ невозможно.

На фиг.2 при тех же физико-механических данных построена область

динамической неустойчивости, расположенной около частоты Ω_{mn} в зависимости от параметра δ/h , характеризующий степень неоднородности пластинки.



Фиг.2. Область динамической неустойчивости при $B_0 = 0$, $B_1 = 0.02$.

Фиг.2 показывает, что ширина области динамической неустойчивости имеет максимум.

Вычисления показывают, что ширина и расположение области динамической неустойчивости существенно зависит также от соотношения $E^{(2)}/E^{(1)}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Основные уравнения и граничные условия колебаний и устойчивости трёхслойных магнестрикционных пластин в поперечном магнитном поле //Изв. НАН Армении. Механика. 2018. V.71. №1. С.31-46. Bagdasaryan G.Y., Danoyan E.A. Main equations and boundary conditions of vibrations and stability of three-layered magnetostrictive plates in a transverse magnetic field Proceedings of NAS RA, Mechanics. 2018. V.71. №1. Pp.31-46. (in Russian).
2. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Изд. ЕГУ. 1999. 439с. Baghdasaryan G.Y. Vibrations and stability of magnetoelastic systems. Yerevan. YSU Publishing House. 1999. 439 p. (in Russian).
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 653 с. (Timoshenko SP, Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 653 p.) (in Russian).
4. Болотин В.В., Макаров Б.П., Мишенков Г.В., Швейко Ю.Ю. Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Расчеты на прочность. Т.6. М.: Машгиз., 1960. С. 231-253. (Bolotin V.V., Makarov B.P., Mishenkov G.V., Shveiko Yu.Yu. Asymptotic method to study the spectrum of natural

- frequencies of elastic plates. Calculations for strength. vol. 6. Moscow: Mashgiz. 1960. pp. 231-253.). (in Russian).
5. Багдасарян Г.Е. Математическое моделирование поведения возмущений в магнитоупругих средах. //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. № 24. С.72-75. (Baghdasaryan G.E. Mathematical modeling of perturbation behavior in magnetostrictive media. Mat. methods and phys.-mech. fields. 1986. №24. P.72-75.). (in Russian).
 6. Baghdasaryan G., Mikilyan M. Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells. Springer. ISBN 978-3-319-19161-4. 2016. 289 p.
 7. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с. (Bolotin V.V. Dynamic stability of elastic systems. - М.: Gostekhizdat, 1956.-600 p.). (in Russian).
 8. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.-М.: Наука, 1972. 718 с. (Yakubovich VA, Starzhinsky V.M. Linear differential equations with periodic coefficients and their applications. - Moscow: Nauka, 1972. 718 p.). (in Russian).

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – Академик НАН РА, Профессор Ереванского Государственного Университета, Главный Научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.: (060) 71 00 89; E-mail: gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – Доцент Российско-Армянского Университета, Старший научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (091) 191129; E-mail: mikilyan@rau.am

Даноян Эдвард Айказович – Доцент Ереванского Государственного Университета
Тел.: (094) 344506; E-mail: edan@ysu.am.3

Поступила в редакцию 08.02.2018