ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА КРАЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ИНЕРЦИОННОМ ЭЛЕМЕНТЕ НА КРАЯХ

Арабян М.О., Оганисян З.Б.

Ключевые слова: пластинка, инерционный элемент, частота, обратная задача.

Arabyan M.H., Hovhannisyan Z.B.

Restoration of boundary conditions at the edges of a rectangular plate for given frequencies of spectrum with an inertial element at the edges

Key words: plate, inertial element, frequency, inverse problem.

In this paper we consider the problem of finding the boundary conditions of a rectangular plate with an inertial element at two opposite edges, if several frequencies of proper transverse oscillations are known. It is assumed that on the other two edges there is a hinged support.

Արաբյան Մ.Հ., Հովհաննիսյան Զ.Բ.

Սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների տրված արժեքներով ուղղանկյուն սալի եզրային պայմանների որոշումը իներցիոն էլեմենտի առկայությամբ

Հիմնաբառեր՝ սալ, իներցիոն էլեմենտ, հաճախականություն, հակադարձ խնդիր:

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների մի քանի արժեքներով ուղղանկյուն սալի հանդիպակաց եզրերում ամրացման պայմանների որոշման խնդիրը, եզրերում իներցիոն էլեմենտի առկայության դեպքում: Ենթադրվում է, որ մյուս երկու եզրերը ամրացված են հոդակապորեն:

В настоящей работе рассматривается задача нахождения краевых условий прямоугольной пластинки с инерционным элементом на двух противоположных краях, если известны несколько частот собственных поперечных колебаний. Предполагается, что на двух других краях имеет место шарнирное опирание.

Введение. На практике при эксплуатации пластин под действием внешних сил зачастую нарушаются условия закрепления краёв. Появляется необходимость проверки степени нарушения первоначальных граничных условий без разрушений конструкций. В настоящей работе определяется закрепление краёв прямоугольной пластинки при заданных частотах собственных поперечных колебаний. Сравнение полученных реальных граничных условий с условиями, заложенными в проект, покажет степень нарушения условий закрепления на краях пластинки и позволит оценить степень пригодности конструкции для последующей эксплуатации.

Восстановление краевых условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных колебаний рассматривалось в работах [1,2,3], однако, в этих работах в краевых условиях отсутствует инерционный элемент. Восстановление краевых условий с инерционным элементом на краях балки рассмотрено в работах [4,5].

Первый существенный результат в данном направлении был получен в 1929 г. В.А. Амбарцумяном. Он показал, что в общем случае без каких-либо условий оператор Штурма – Лиувилля определяется неоднозначно.

Уравнение колебаний пластинки представляется в виде [6]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sigma^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \sigma^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h a^4}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

где $w(x,y,t)$ – прогиб, $x, y \in [0;1]$ – безразмерные координаты по длине и по ширине пластинки, $\sigma = a/b$, a –длина, b – ширина, $D = Eh^3/(12(1-\upsilon^2))$ – жёсткость пластинки, E – модуль Юнга, υ – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала.

Рассмотрим случай, когда на краях $y = 0$ и $y = 1$ имеет место шарнирное опирание пластинки:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad (y = 0,\ y = 1). \qquad (2)$$

Наиболее общие граничные условия с инерционным элементом на краях $x = 0$ и $x = 1$ можно представить в виде [7]:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} w + a_{12}^{(1)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + a_{13}^{(1)} M_x + a_{14}^{(1)} \tilde{N}_x + a_{15}^{(1)} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ a_{11}^{(2)} w + a_{12}^{(2)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + a_{13}^{(2)} M_x + a_{14}^{(2)} \tilde{N}_x + a_{15}^{(2)} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \qquad (3)$$

$$\begin{cases} b_{11}^{(1)} w + b_{12}^{(1)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + b_{13}^{(1)} M_x + b_{14}^{(1)} \tilde{N}_x + b_{15}^{(1)} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ b_{11}^{(2)} w + b_{12}^{(2)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + b_{13}^{(2)} M_x + b_{14}^{(2)} \tilde{N}_x + b_{15}^{(2)} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 1, \qquad (4)$$

где

$M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \upsilon \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ – изгибающий момент,

$\tilde{N}_x = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\upsilon)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ – поперечное усилие.

Рассмотрим частный случай, когда
$a_{11}^{(1)} = a_{12}^{(1)} = a_{13}^{(1)} = 0,\ a_{11}^{(2)} = a_{12}^{(2)} = a_{14}^{(2)} = 0$,
$b_{11}^{(1)} = b_{12}^{(1)} = b_{13}^{(1)} = 0,\ b_{11}^{(2)} = b_{12}^{(2)} = b_{14}^{(2)} = 0$, т.е. граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \tilde{N}_x + \alpha_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ M_x + \alpha_2 \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \tilde{N}_x + \beta_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ M_x + \beta_2 \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 1, \tag{6}$$

где $\alpha_1 = \dfrac{a_{15}^{(1)}}{a_{14}^{(1)}}$, $\alpha_2 = \dfrac{a_{15}^{(2)}}{a_{13}^{(2)}}$, $\beta_1 = \dfrac{b_{15}^{(1)}}{b_{14}^{(1)}}$, $\beta_2 = \dfrac{b_{15}^{(2)}}{b_{13}^{(2)}}$.

Отметим, что если, например, в (5) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то это соответствует свободному краю.

1. Постановка задачи. Пусть имеется возможность определения необходимого количества собственных значений свободных колебаний прямоугольной пластинки. Сформулируем следующую обратную задачу: по собственным частотам поперечных колебаний и заданной жёсткости пластинки найти неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 в выражениях (5) и (6), т.е. определить массу, входящую в граничные условия.

2. Решение задачи. С учётом (2) функцию $w(x, y, t)$ можно представить в виде:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \sin n\pi y \,. \tag{7}$$

Подстановкой (7) в уравнение (1) для определения $u_n(x,t)$ получается уравнение:

$$\frac{\partial^4 u_n}{\partial x^4} - 2(\sigma\pi n)^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + (\sigma\pi n)^4 u_n + \frac{\rho h a^4}{D} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 0. \tag{8}$$

Граничные условия для $u_n(x,t)$ с учётом соотношений (5)-(7) примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x} - \gamma_{1n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x^3} + a_{1n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 0, \\ u_n - \gamma_{2n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + a_{2n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x} - \gamma_{1n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x^3} + b_{1n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 0, \\ u_n - \gamma_{2n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + b_{2n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 1, \tag{10}$$

где

$$\gamma_{1n} = \frac{\sigma^2}{(2-\upsilon)\pi^2 n^2}, \qquad \gamma_{2n} = \frac{\sigma^2}{\upsilon\pi^2 n^2},$$

$$a_{1n} = \frac{a^2\sigma^2}{D(2-\upsilon)\pi^2 n^2}\alpha_1, \quad a_{2n} = \frac{a^2\sigma^2}{D\upsilon\pi^2 n^2}\alpha_2,$$

$$b_{1n} = \frac{a^2\sigma^2}{D(2-\upsilon)\pi^2 n^2}\beta_1, \qquad b_{2n} = \frac{a^2\sigma^2}{D\upsilon\pi^2 n^2}\beta_2.$$

Предполагается, что нам известны наименьшие по n частоты собственных колебаний, т.е. $n=1$. В дальнейшем u_1 обозначим через u.

Первоначально рассмотрим случай, когда на краях $x=0$ и $x=1$ имеются одинаковые условия. В этом случае граничные условия из (9) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \gamma_1 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - \gamma_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \tag{11}$$

и условия симметрии и антисимметрии в середине пластинки (на линии $x = 0,5$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = 0,5 \tag{12}$$

или

$$u = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0,5. \tag{13}$$

Рассматриваются гармонические колебания пластинки, т.е. ищется решение уравнения (8) в виде:

$$u(x,t) = y(x)\cos\omega t,$$

где $y(x)$ – амплитуда, ω – частота собственных поперечных колебаний пластинки. Тогда, из (8) для определения $y(x)$ получается уравнение:

$$y^{(4)} - 2(\sigma\pi)^2 y'' + ((\sigma\pi)^4 - \lambda^4)y = 0, \tag{14}$$

где $\lambda^4 = \rho h a^4 \omega^2 / D$ – приведённая частота собственных колебаний.

Граничные условия для $y(x)$ из (11) получаются в виде:

$$\begin{cases} y'(0) - \gamma_1 y'''(0) + a_1 \lambda^4 y(0) = 0, \\ y(0) - \gamma_2 y''(0) + a_2 \lambda^4 y'(0) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\sigma^2}{(2-\upsilon)\pi^2},\quad \gamma_2=\frac{\sigma^2}{\upsilon\pi^2}, \tag{16}$$

$$a_1=\frac{a^2\sigma^2}{D(2-\upsilon)\pi^2}\alpha_1,\qquad a_2=\frac{a^2\sigma^2}{D\upsilon\pi^2}\alpha_2,$$

а из (12), (13)

$$y'(0,5)=0,\quad y'''(0,5)=0, \tag{17}$$

или

$$y(0,5)=0,\quad y''(0,5)=0. \tag{18}$$

Общее решение уравнения (14) представляется в виде:

$$y(x)=c_1\mathrm{ch}\alpha x+c_2\mathrm{sh}\alpha x+c_3\cos\beta x+c_4\sin\beta x,$$

где

$$\alpha=\sqrt{\lambda^2+\sigma^2\pi^2},\qquad \beta=\sqrt{\lambda^2-\sigma^2\pi^2},$$

а c_1, c_2, c_3 и c_4 – произвольные постоянные.

Для определения $c_i, i=1,2,3,4$ из (15), (17) или из (15), (18) получается однородная система линейных уравнений. Ненулевое решение этой системы получается тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, откуда получается следующее характеристическое уравнение:

$$f_1(\lambda)a_1+f_2(\lambda)a_2+f_3(\lambda)a_1a_2=f_4(\lambda), \tag{19}$$

где для определения нечётных по номеру частот

$$\begin{gathered}
f_1(\lambda)=2\gamma_2\lambda^6\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},\quad f_2(\lambda)=2\gamma_1\alpha\beta\lambda^6\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},\\
f_3(\lambda)=\lambda^8\left(\alpha\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\beta\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right),\\
f_4(\lambda)=\alpha(1-\gamma_1\alpha^2)(1+\gamma_2\beta^2)\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\\
+\beta(1-\gamma_2\alpha^2)(1+\gamma_1\beta^2)\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},
\end{gathered} \tag{20}$$

а для определения чётных по номеру частот

$$\begin{gathered}
f_1(\lambda)=2\gamma_2\lambda^6\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},\quad f_2(\lambda)=-2\gamma_1\alpha\beta\lambda^6\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},\\
f_3(\lambda)=\lambda^8\left(\alpha\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}-\beta\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right),\\
f_4(\lambda)=\alpha(1-\gamma_1\alpha^2)(1+\gamma_2\beta^2)\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}-\beta(1-\gamma_2\alpha^2)(1+\gamma_1\beta^2)\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Если, например, $\sigma = 2,$ $\upsilon = 0{,}16$ (бетон), то из (16) $\gamma_1 = 0{,}21,\ \gamma_2 = 2{,}54$ и в случае $a_1 = a_2 = 0$ (свободный край), значения первых двух частот есть

$$\lambda_1^{(c)} = 7{,}53, \quad \lambda_2^{(c)} = 9{,}80\,. \tag{22}$$

Обе части первого условия (15) разделим на a_1, а второе – на a_2 и устремим a_1 и a_2 к бесконечности, т.е. в инерционных элементах массу устремим к бесконечности. Тогда из граничных условий (15) получается:

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{23}$$

которые соответствуют жёстким защемлениям краёв. В этом случае первые две частоты есть:

$$\lambda_1^{(ж)} = 7{,}39, \qquad \lambda_2^{(ж)} = 9{,}72\,.$$

Отметим, что при любых других граничных условиях для собственных значений λ_1 и λ_2 имеют место:

$$\lambda_1^{(ж)} \le \lambda_1 \le \lambda_1^{(с)}, \quad \lambda_2^{(ж)} \le \lambda_2 \le \lambda_2^{(с)}.$$

Рассмотрим теперь обратную задачу: пусть известны значения двух собственных частот, например, λ_1 и λ_2. Подставляя λ_1 и λ_2 в (19), где $f_i(\lambda),\ i = 1,2,3,4$ в случае λ_1 определяется из (20), а в случае λ_2 из (21), для определения a_1 и a_2 получается следующая система:

$$\begin{cases} d_{11}a_1 + d_{12}a_2 + d_{13}a_1a_2 = c_1, \\ d_{21}a_1 + d_{22}a_2 + d_{23}a_1a_2 = c_2, \end{cases}$$

где

$$d_{ij} = f_j(\lambda_i) \ \ i = 1,2, \quad j = 1,2,3, \quad c_i = f_4(\lambda_i) \ \ i = 1,2.$$

Таким образом, получается следующая система:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 = c_1, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + d_{23}x_3 = c_2, \\ x_3 = x_1x_2, \end{cases} \tag{24}$$

где $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_1a_2$.

С учётом линейности первых двух уравнений системы, x_1 и x_2 выражаются через x_3 следующим образом:

$$x_1 = p_1x_3 + q_1, \qquad x_2 = p_2x_3 + q_2, \tag{25}$$

где

$$p_1 = \frac{d_{12}d_{23} - d_{22}d_{13}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad q_1 = \frac{d_{22}g_1 - d_{12}g_2}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}},$$

$$p_2 = \frac{d_{21}d_{13} - d_{11}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad q_2 = \frac{d_{11}g_2 - d_{21}g_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}.$$

Подстановкой (25) в третье уравнение (24) для определения x_3 получается квадратное уравнение. После нахождения x_3, x_1 и x_2, а следовательно, a_1 и a_2 определяются из (25).

Практически возможны два случая:

а) полученное квадратное уравнение, или что то же самое, система (23) не имеет действительных решений при заданных λ_1, λ_2. Это означает, что рассмотренные λ_1 и λ_2 не являются собственными частотами данной краевой задачи ни при каких граничных условиях типа (11);

б) квадратное уравнение, или что то же самое, система (23) имеют две пары действительных решений. Это означает, что существуют две пары граничных условий типа (11), при которых реализуются данные частоты.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть, например, $\gamma_1 = 0,21, \gamma_2 = 2,54$, а λ_1, λ_2 отличаются от (22):

$$\lambda_1 = 7,42, \quad \lambda_2 = 9,76, \tag{26}$$

тогда, система (23) имеет две пары решений:

$a_1 \approx 0,006, \quad a_2 \approx 0,0005$ или $a_1 \approx 0,71, \quad a_2 \approx 0,16,$

а это означает, что есть две пары краевых условий типа (11), при выполнении которых реализуются частоты (26):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0.21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 0,006\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,0005\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0.21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 0,71\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,16\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0.$$

При $\lambda_1 = 7,22, \quad \lambda_2 = 9,91$ (27)

система (23) не имеет решений, а это означает, что частоты (27) не реализуются ни при каких граничных условиях типа (11).

Теперь рассмотрим случай, когда на краях $x = 0$ и $x = 1$ краевые условия могут различаться. Рассмотрим частный случай, когда в (9), (10) $a_{2n} = b_{2n} = 0$, т.е. для нахождения $y(x)$ вместе с уравнением (14) имеют место следующие краевые условия:

$$\begin{cases} y'(0) - \gamma_1 y'''(0) + a_1\lambda^4 y(0) = 0, \\ y(0) - \gamma_2 y''(0) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} y'(1)-\gamma_1 y'''(1)+b_1\lambda^4 y(1)=0, \\ y(1)-\gamma_2 y''(1)=0. \end{cases} \qquad (29)$$

В этом случае для нахождения λ получается следующее характеристическое уравнение:

$$g_1(\lambda)(a_1-b_1)+g_2(\lambda)a_1b_1=g_3(\lambda)\,, \qquad (30)$$

где $g_1(\lambda)=2\lambda^2\gamma_2\,(p_1(\lambda)p_4(\lambda)\text{ch}\alpha\sin\beta-p_2(\lambda)p_3(\lambda)\text{sh}\alpha\cos\beta)$,

$$g_2(\lambda)=4\lambda^4\gamma_2^2\text{sh}\alpha\sin\beta,$$

$$g_3(\lambda)=2p_1(\lambda)p_2(\lambda)p_3(\lambda)p_4(\lambda)(1-\text{ch}\alpha\cos\beta)+$$
$$+((p_1^2(\lambda)p_4^2(\lambda)-p_2^2(\lambda)p_3^2(\lambda))\text{sh}\alpha\sin\beta,$$

$$p_1(\lambda)=\alpha(1-\gamma_1\alpha^3)/\lambda^4\,, \qquad p_2(\lambda)=\beta(1+\gamma_1\beta^3)/\lambda^4$$

$$p_3(\lambda)=1-\gamma_2\alpha^2, \qquad p_4(\lambda)=1+\gamma_2\beta^2.$$

В случае обратной задачи для нахождения a_1 и b_1 необходимо задаться двумя частотами, например, λ_1 и λ_2. Поочерёдно подставляя λ_1 и λ_2 в характеристическое уравнение (30), для нахождения a_1 и b_1 получается следующая алгебраическая система:

$$\begin{cases} d_{11}(a_1-b_1)+d_{12}a_1b_1=c_1, \\ d_{21}(a_1-b_1)+d_{22}a_1b_1=c_2, \end{cases} \qquad (31)$$

где

$$d_{i1}=g_1(\lambda_i), \quad d_{i2}=g_2(\lambda_i), \quad c_i=g_3(\lambda_i), \quad i=1,2.$$

Обозначим $x_1=a_1-b_1$, $x_2=a_1b_1$. Тогда, система (31) примет вид:

$$\begin{cases} d_{11}x_1+d_{12}x_2=c_1, \\ d_{21}x_1+d_{22}x_2=c_2, \end{cases} \qquad (32)$$

которая является линейной алгебраической системой относительно x_1 и x_2, решение которой есть:

$$x_1=\frac{c_1d_{22}-c_2d_{12}}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}, \qquad x_2=\frac{c_2d_{11}-c_1d_{21}}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}.$$

После нахождения x_1 и x_2, из следующей системы можно найти a_1 и b_1:

$$\begin{cases} a_1-b_1=x_1, \\ a_1b_1=x_2, \end{cases} \qquad (33)$$

откуда

$$a_1^2-x_1a_1-x_2=0. \qquad (34)$$

Практически возможны два случая:

а) уравнениие (34) не имеет решений, что означает, что данные λ_1 и λ_2 не могут быть собственными значениями ни при каких краевых условиях типа (28), (29);
б) уравнениие (34), или что то же самое, система (33) имеет два решения.

Так как после замены в системе (31) a_1 на $-b_1$ и b_1 на $-a_1$, вид системы не меняется, то если пара (a_1, b_1) есть решение системы (33), второе решение есть $(-b_1, -a_1)$. В действительности, эти две пары решений дают те же самые краевые условия, только условия на краях $x = 0$ и $x = 1$ меняются местами. А это означает, что краевые условия определяются однозначно.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $\gamma_1 = 0,21,\ \gamma_2 = 2,54$, $\lambda_1 = 7,42,\ \lambda_2 = 9,77,$ которые отличаются от (23). В этом случае система (31) имеет две пары решений:

$$a_1 \approx 22,54, \qquad b_1 \approx 21,78,$$

или

$$a_1 \approx -21,78, \qquad b_1 \approx -22,54,$$

т.е. краевые условия практически имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0,21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 22,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0,21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 21,78\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 1.$$

Отметим , что не всякой паре (λ_1, λ_2) соответствуют краевые условия типа (28), (29). Например, при $\lambda_1 = 7,44,\ \lambda_2 = 9,75$ система (31) не имеет решений.

Заключение. Таким образом, доказано, что имеется возможность нахождения граничных условий при инерционном элементе на краях прямоугольной пластинки по заданному спектру частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оганисян З.Б. Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний. //Ученые записки ЕГУ. 1991. №1. С.45-50. Hovhannisyan Z.B. On the problem of border conditions restoration on the edges of a plate, when transverse natural oscillations frequencies spectr are defined. /Scientific notes. YSU, № 1, 1991, pp. 45-50 (in Russian).
2. Оганисян З.Б., Гнуни В.Ц. Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. № 5. С.9-16. Gnuni V.Ts., Hovhannisyan Z.B. Determination

of boundary conditions of circular plate with given vibration frequencies. //Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. 1991. V.44. №5, pp. 9-16 (in Russian).

3. Оганисян З.Б. Собственные колебания неоднородной по длине прямоугольной пластинки. //Материалы Всесоюзного научного семинара «Актуальные проблемы неоднородной механики». Ереван, 1991, с.159-162. Hovhannisyan Z.B. Own oscillations of a rectangular plate, nonuniform in length. //Materials of the All-Union Scientific Seminar Actual problems of inhomogeneous mechanics. Yerevan, 1991, pp. 159-162 (in Russian).
4. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С. Идентификация вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний. //Акустический журнал. 2008. №2. С.181-188. Akhtyamov A.M,. Muftakhov A.V., Yamilova L.S. //Identification of the type and parameters of pinning the rod according to the natural frequencies of its vibration. Acoustic magazine. 2008. № 2, pp. 181-188 (in Russian).
5. Ахтямова А.А., Ахтямов А.М. Об однозначности идентификации параметров упругого закрепления и сосредоточенного инерционного элемента. //Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т.6. № 1. С. 62-69. Akhtyamova A.A, Akhtyamov A. M. On the uniqueness of identification of the parameters of elastic fastening and a concentrated inertial element. Computational mechanics of continuous media. 2013. Vol.6. № 1, pp. 62-69 (in Russian).
6. Գնունի Վ.Ց. Կիրառական առաձգականության տեսություն. Երևան, ՀՊՃՀ 2006, 145 էջ: Gnuni V.Ts., Applied elasticity theory. Yerevan, 2006, 145 p.(in Armenian).
7. Вибрация в технике: справочник в 6 томах. Т.1. Колебания нелинейных систем. Под ред. В.В. Болотина.- М.: Машиностроение, 1978. 352с. Vibration in technology: a handbook in 6 volumes. V.1. Oscillations of nonlinear systems. Edited by Bolotin V.V. - Moscow: Mashinastroenie, 1978, 352 p. (in Russian).

Сведения об авторах:

Арабян Мариам Овсеповна, к.ф.-м.н., доцент кафедры анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ.
Адрес: 0025, Ереван, ул. А. Манукяна 1, **тел.:** (+374 10) 577 937
E-mail: arabyan.mariam@ysu.am

Оганисян Зограб Багратович, к. ф.-м. н., доцент кафедры анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ.
Адрес: 0052, Ереван, ул. Тцарав Агбюри 55/5, кв.176, **тел.:** (+374 10) 614 176
E-mail: zorhh@ysu.am

Поступила в редакцию 02.11.2017