

**НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ
РАВНОМЕРНО СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ С СИСТЕМОЙ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВНУТРЕННИХ ВКЛЮЧЕНИЙ**

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: периодическая задача, кусочно-однородная плоскость, деформируемое включение.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա.

**Պարբերական զուգահեռ ներքին ներդրակների համակարգով կտոր առ կտոր հավասարաչափ շերտավոր հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը
Հիմնաբառեր.** Պարբերական խնդիր, կտոր առ կտոր համասեռ հարթություն, առաձգական ներդրակ

Աշխատանքում ուսումնասիրված է հավասար բարձրություններ ունեցող երկու տարբեր նյութերից պատրաստված շերտերի հաջորդական միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը, երբ դրանց միջին գծերի վրա առկա է առաձգական ներդրակների զուգահեռ համակարգ: Ստացված է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրո-դիֆֆերենցիալ հավասարումների համակարգը ներդրակների երկար կողմերի վրա ազդող շոշափող լարումների նկատմամբ և կառուցված է նրա լուծումը ինչպես վերջավոր, այնպես էլ անվերջ ներդրակների դեպքում: Ուսումնասիրված են կոնտակտային լարումների փոփոխման օրինաչափությունները կախված ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A.

The stress state of an uniformly piecewise homogeneous layered plane with a system of periodic parallel internal inclusions

Keywords: periodic problem, piecewise uniform plane, inner inclusions.

This article considers the stress state of piecewise homogeneous plane, made by alternate junction of two heterogeneous strips of the same heights with the system of parallel elastic inclusions on the middle lines. The system of the singular integro-differential equations with respect to shear stresses, acting on the long sides of inclusions, is obtained. The solution of obtained system is constructed both in the case of finite and in the case of infinite inclusions. The regulations of changes in contact stresses are studied depending on the physico-mechanical and geometric parameters.

В работе рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости, полученной путём поочерёдного соединения двух разнородных полос равных высот, изготовленных из различных материалов, на срединных линиях которых имеется система параллельных упругих включений. Получена система определяющих сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений и построено её решение как в случае конечных, так и в случае бесконечных включений. Изучены закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

Введение

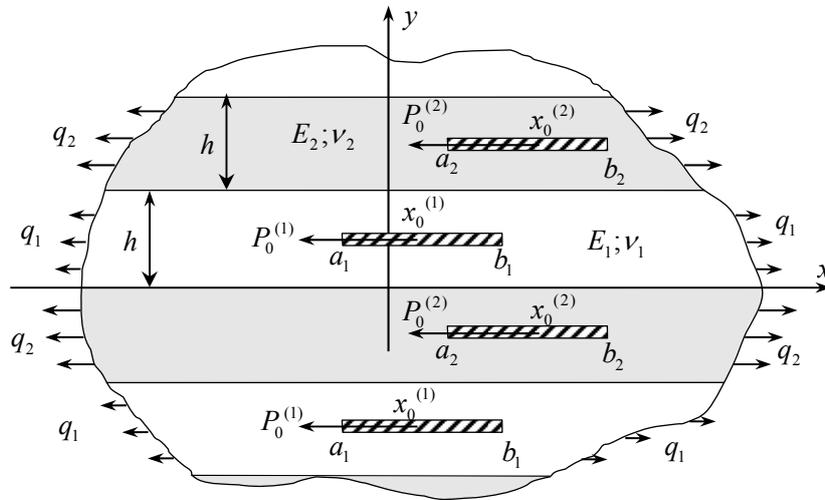
Изучению плоско-деформированного или обобщённого плоского напряжённого состояния однородных массивных тел с концентраторами напряжений типа деформируемых накладок или включений посвящено огромное количество работ. Среди них выделим монографию [1], где приведены многие результаты, полученные в этом направлении. Укажем также на монографии [2,3], где подытожены результаты исследований напряжённо-деформированного состояния однородных массивных тел с периодическими и двоякопериодическими трещинами и включениями. Отметим также работу [4], где исследовано обобщённое плоское напряжённое состояние кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. Число аналогичных исследований для кусочно-однородных слоистых массивных тел, которые актуальны с точки зрения слоистых композитов, очень мало. В этом направлении отметим работы [5-7], где построены точные или эффективные решения ряда антиплоских и плоских, периодических и двоякопериодических задач для кусочно-однородных, равномерно слоистых тел с межфазными трещинами и абсолютно жёсткими включениями. Напряжённо-деформированное состояние равномерно кусочно-однородных, слоистых тел с внутренней системой симметрично нагружённых двоякопериодических упругих конечных включений рассмотрено в [8]. Других работ в этом направлении, как нам известно, нет.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , изготовленная при помощи поочерёдного соединения полос толщины $2h$ из разнородных материалов с коэффициентами упругости E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1 и ν_2 на срединных линиях разнородных полос $y = (4n + 1)h$ и $y = (4n - 1)h$ ($n \in Z$) соответственно по линиям $L_j = (a_j, b_j)$ ($j = 1, 2$) усилена упругими тонкими включениями толщины h_j и приведёнными модулями деформаций $E_j^{(j)}$ ($j = 1, 2$). Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых сосредоточенных нагрузок $P_0^{(j)}$, приложенных к включениям соответственно в точках $x_0^{(j)} \in [a_j, b_j]$ ($j = 1, 2$) и равномерно распределённых растягивающих нагрузок q_1 и q_2 , приложенных к полосам на бесконечности (Фиг.1).

Очевидно, что при такой форме нагружения линии $y = (2n + 1)h$ ($n \in Z$) являются линиями симметрии. Вследствие этого, поставленную задачу можно сформулировать как задачу для кусочно-однородной полосы (базовой ячейки), занимающей на плоскости область $\Omega \{ -\infty < x < \infty; |y| \leq h \}$, на границах $y = \pm h$ которого вне включения заданы условия симметрии, а на линиях

L_j ($j = 1, 2$) – условия контакта включений с основанием. При этом, накладки, как обычно, будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним сосредоточенных нагрузок и тангенциальных контактных напряжений находятся в одноосном напряжённом состоянии. Однако, как и в [9], изгибным эффектом накладок здесь не будем пренебрегать и будем считать, что вследствие малости толщины накладок и симметрии задачи относительно осей накладок, вертикальные смещения точек накладок не зависят от координаты x .



Фиг.1

Ставится задача: получить ключевую систему уравнений поставленной задачи в общем случае и построить их эффективные решения в некоторых частных случаях, представляющих самостоятельный интерес, а также определить закономерности изменения контактных напряжений, действующих на сторонах включений в зависимости от упругих характеристик включений и разнородных полос.

Вследствие сделанных предположений, в зонах контакта включений с матрицей имеют место следующие условия контакта:

$$\frac{dV_j(x, (-1)^{j+1} h)}{dx} = 0; \quad \frac{dU_j(x, (-1)^{j+1} h)}{dx} = \varepsilon_j(x) \quad (x \in L_j; j = 1, 2) \quad (1.1)$$

где $V_j(x, y)$ и $U_j(x, y)$ – соответственно, вертикальные и горизонтальные смещения точек разнородных полос, а $\varepsilon_j(x, t)$ ($j = 1, 2$) – осевые деформации включений.

Для получения системы определяющих уравнений, обозначим через $\tau_j(x)$ ($j = 1, 2$) неизвестные касательные контактные напряжения, действующие на длинные стороны включений, и определим горизонтальные смещения точек сторон

($y = \pm h; x \in L_j$) полос при помощи этих функций. С этой целью, используя первое из соотношений (1.1), рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0); \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0); \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.2)$$

$$U_1(x, 0) = U_2(x, 0); \quad V_1(x, 0) = V_2(x, 0); \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{dV_j(x, (-1)^{j+1} h)}{dx} = 0; \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\tau_{xy}^{(j)}(x, (-1)^{j+1} h) = 0; \quad (x \notin L_j)$$

$$\tau_{xy}^{(j)}(x, (-1)^{j+1} h) = (-1)^j \tau_j(x); \quad (x \in L_j)$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) – компоненты нормальных и касательных напряжений, действующих в соответствующих полосах.

Решение граничной задачи (1.2) будем строить при помощи бигармонической функции напряжений (функция Эри), которую для каждой из разнородных полос представим в виде интегралов Фурье:

$$F_j(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_j \operatorname{ch} sy + B_j \operatorname{sh} sy + sy(C_j \operatorname{ch} sy + D_j \operatorname{sh} sy)] e^{isx} ds + \frac{q_j}{2} y^2 \quad (1.3)$$

$$(-\infty < x < \infty; \quad 0 \leq (-1)^{j+1} y \leq h; \quad j = 1, 2),$$

где A_j, B_j, D_j, C_j ($j = 1, 2$) – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Учитывая общеизвестные соотношения, связывающие бигармонические функции с напряжениями и смещениями, удовлетворим условиям (1.2) и определим неизвестные коэффициенты A_j, B_j, D_j, C_j через трансформанты Фурье касательных контактных напряжений $\bar{\tau}_j(s)$ ($j = 1, 2$). Получим:

$$A_1(s) = A_2(s) = -\left(\frac{\beta}{\operatorname{sh}(2\beta)} + \frac{1}{2}\right)(D_1(s) + D_2(s)) -$$

$$-\frac{i}{s^2 \operatorname{sh} 2\beta} \left[\left(1 - \frac{\beta \operatorname{th} \beta}{2(1 - \nu_1)}\right) \bar{\tau}_1(s) + \left(1 - \frac{\beta \operatorname{th} \beta}{2(1 - \nu_2)}\right) \bar{\tau}_2(s) \right];$$

$$\begin{aligned}
B_1(s) &= -A_1(s) \operatorname{th}\beta - \frac{\beta D_1(s)}{\operatorname{ch}^2\beta} - \frac{i\bar{\tau}_1(s)(1-2\nu_1 - \beta \operatorname{th}\beta)}{s^2 \operatorname{ch}\beta}; \\
B_2(s) &= A_2 \operatorname{th}\beta + \frac{\beta D_2(s)}{\operatorname{ch}^2\beta} + \frac{i\bar{\tau}_2(s)(1-2\nu_2 - \beta \operatorname{th}\beta)}{s^2 \operatorname{ch}\beta}; \\
C_1(s) &= -\operatorname{th}\beta D_1(s) - \frac{\bar{\tau}_1(s)}{2(1-\nu_1)s^2 \operatorname{ch}\beta}; \quad C_2(s) = \operatorname{th}\beta D_2(s) + \frac{i\bar{\tau}_2(s)}{2(1-\nu_2)s^2 \operatorname{ch}\beta}; \\
D_1(s) &= -\frac{i}{s^2 \Delta_1(s) \operatorname{sh}\beta} \left\{ \bar{\tau}_1(s) \left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_1)} \beta \operatorname{th}\beta \right] + \vartheta_2 \bar{\tau}_2(s) \right\}; \\
D_2(s) &= \frac{i}{s^2 \Delta_2(s) \operatorname{sh}\beta} \left\{ \vartheta_1 \bar{\tau}_1(s) + \bar{\tau}_2(s) \left[\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_2)} \beta \operatorname{th}\beta \right] \right\};
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_1(s) = \frac{2(\vartheta_2 - \vartheta_1)\beta}{\operatorname{sh}(2\beta)} + \Delta_1; \quad \Delta_2(s) = \frac{2(\vartheta_2 - \vartheta_1)\beta}{\operatorname{sh}(2\beta)} - \Delta_2; \quad \Delta_1 = \vartheta_2 + \vartheta_1 \alpha_1;$$

$$\Delta_2 = (\vartheta_1 + \vartheta_2 \alpha_2); \quad \beta = hs; \quad \vartheta_j = \frac{1 + \nu_j}{E_j}; \quad \alpha_j = 3 - 4\nu_j;$$

$$\bar{\tau}_j(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \tau_j(x) e^{-isx} dx \quad (j=1,2). \tag{1.4}$$

При этом, нагрузки q_1 и q_2 должны удовлетворять также условию совместности деформаций разнородных полос на бесконечности, которое в этом случае записывается в следующем виде:

$$m_1 q_1 = m_2 q_2 \quad \left(m_j = (1 - \nu_j^2) / E_j; \quad j = 1, 2 \right).$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов в (1.3), можем выразить функцию напряжений, следовательно, и все составляющие напряжённно-деформированного состояния в кусочно-однородной полосе при помощи трансформантов Фурье неизвестных касательных контактных напряжений. В частности, для производных горизонтальных смещений в зонах контактов, которые нужны для решений поставленной задачи, получим выражения:

$$\frac{dU_j(x, h)}{dx} = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_{j1}(s) \bar{\tau}_1(s) + K_{j2}(s) \bar{\tau}_2(s) \right] e^{isx} ds + m_j q_j \tag{1.5}$$

$$(-\infty < x < \infty; \quad j = 1, 2).$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{11}(s) = i\vartheta_1 \left\{ \frac{(\alpha_1 - \beta \operatorname{th}\beta - \beta \operatorname{cth}\beta)}{\Delta_1(s) \operatorname{sh}2\beta} \left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_1)} \beta \operatorname{th}\beta \right] + \frac{1}{\Delta_2(s) \operatorname{sh}2\beta} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \vartheta_1 \left(\frac{2\beta}{\operatorname{sh}2\beta} + 1 \right) + \frac{1}{\operatorname{sh}2\beta} \left(1 - \frac{\beta \operatorname{th}\beta}{2(1-\nu_1)} \right) + \frac{\alpha_1 \operatorname{th}\beta}{2(1-\nu_1)} + \frac{\beta}{2(1-\nu_1) \operatorname{ch}^2\beta} \Bigg\}; \\
K_{12}(s) &= i\vartheta_1 \left\{ \frac{\vartheta_2 (\alpha_1 - \beta \operatorname{th}\beta - \beta \operatorname{cth}\beta)}{\Delta_1(s) \operatorname{sh}2\beta} + \frac{1}{\operatorname{sh}2\beta} \left(1 - \frac{\beta \operatorname{th}\beta}{2(1-\nu_2)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\Delta_2(s) \operatorname{sh}2\beta} \operatorname{sh} \left(\frac{2\beta}{\operatorname{sh}2\beta} + 1 \right) \left[\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_2)} \beta \operatorname{th}\beta \right] \right\}; \\
K_{21}(s) &= i\vartheta_2 \left\{ \frac{\vartheta_1 (\beta \operatorname{th}\beta + \beta \operatorname{cth}\beta - \alpha_2)}{\Delta_2(s) \operatorname{sh}2\beta} + \frac{1}{\operatorname{sh}2\beta} \left(1 - \frac{\beta \operatorname{th}\beta}{2(1-\nu_1)} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Delta_1(s) \operatorname{sh}2\beta} \left(\frac{2\beta}{\operatorname{sh}2\beta} + 1 \right) \left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_1)} \beta \operatorname{th}\beta \right] \right\}; \\
K_{22}(s) &= i\vartheta_2 \left\{ \frac{(\beta \operatorname{th}\beta + \beta \operatorname{cth}\beta - \alpha_2)}{\Delta_2(s) \operatorname{sh}2\beta} \left[\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_2)} \beta \operatorname{th}\beta \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\vartheta_2 (2\beta + \operatorname{sh}2\beta)}{\Delta_1(s) \operatorname{sh}^2 2\beta} + \frac{1}{\operatorname{sh}2\beta} \left(1 - \frac{\beta \operatorname{th}\beta}{2(1-\nu_2)} \right) + \frac{\alpha_2 \operatorname{th}\beta + \beta / \operatorname{ch}^2\beta}{2(1-\nu_2)} \right\}.
\end{aligned}$$

Используя соотношения (1.4), после некоторых несложных выкладок, выделяя главную часть ядер, входящих в полученные выражения в виде ядер Коши, можем записать:

$$\begin{aligned}
\frac{dU_j(x, h)}{dx} &= -\frac{\lambda_j}{\pi} \int_{L_j} \frac{\tau_j(s) ds}{s-x} - \int_{L_1} R_{j1}(x-s) \tau_1(s) ds - \\
& - \int_{L_2} R_{j2}(x-s) \tau_2(s) ds + m_j q_j \quad (x \in L_j; \quad j = 1, 2),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$R_{jj}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_{jj}(s) - \frac{i\vartheta_j \alpha_j}{2(1-\nu_j)} \operatorname{sgn}(s) \right] e^{ist} dt,$$

$$R_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(s) e^{ist} dt; \quad \lambda_j = \frac{\mathfrak{g}_j \mathfrak{a}_j}{2(1-\nu_j)} \quad (j=1,2).$$

Отметим, что представления (1.6) верны и в случае, когда линии L_j ($j=1,2$) представляют собой совокупности конечного числа непересекающихся интервалов.

Теперь перейдём к решению поставленной задачи. Для этого, используя соотношения (1.5), удовлетворим второму из уравнений (1.1). В результате, учитывая, что осевые деформации включений от приложенных в конечных точках $x_0^{(j)}$ нагрузок определяются формулами [1]:

$$\varepsilon_j(x) = \frac{1}{h_j E_I^{(j)}} \left[P_0^{(j)} H(x - x_0^{(j)}) - 2 \int_{a_j}^x \tau_j(s) ds \right], \quad (1.7)$$

$$(a_j \leq x_0^{(j)} \leq b_j); \quad j=1,2$$

где $H(x)$ – известная функция Хевисайда, для определения касательных контактных напряжений получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\lambda_j}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\tau_j(s) ds}{s-x} + \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} R_{ji}(x-s) \tau_i(s) ds = m_j q_j -$$

$$- \frac{1}{h_j E_I^{(j)}} \left[P_0^{(j)} H(x - x_0^{(j)}) - 2 \int_{a_j}^x \tau_j(s) ds \right] \quad (a_j < x < b_j; \quad j=1,2). \quad (1.8)$$

Систему (1.8) нужно рассматривать при условиях равновесия включений. Учитывая, что в рассматриваемом случае контактные напряжения на длинных сторонах включения из-за симметрии одинаковые, эти условия можно записать в виде:

$$\int_{a_j}^{b_j} \tau_j(s) ds = P_0^{(j)} / 2; \quad (j=1,2); \quad (1.9)$$

Чтобы построить решения системы (1.8) при условиях (1.9), при помощи замены переменных $\{s, x\} = p_j \{s, x\} + k_j$, где $p_j = (b_j - a_j) / 2$, $k_j = (b_j + a_j) / 2$, сформулируем эти уравнения на интервале $(-1,1)$.

Обозначив

$$\Phi_j(t) = \frac{p_j \tau_j (p_j t + k_j)}{P_0^{(1)}}; \quad R_{ji}^*(\tau, t) = \frac{p_j}{\lambda_j} R_{ji} (p_j t + k_j - p_i \tau - k_i);$$

$$\mathfrak{S}_j^* = \frac{2(1 - \nu_j) p_j E_j}{h_j E_s^{(j)} (1 + \nu_j) \alpha_j}, \quad (P_0^{(1)} \neq 0),$$

придём к следующей определяющей системе интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_j(\tau) d\tau}{\tau - t} + \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 R_{ji}^*(\tau, t) \Phi_i(\tau) d\tau =$$

$$= -\mathfrak{S}_j^* \left[\frac{P_0^{(j)}}{P_0^{(1)}} H(t - t_0^{(j)}) - 2 \int_{-1}^t \Phi_j(\tau) d\tau \right] \quad (-1 < x < 1; \quad j = 1, 2). \quad (1.10)$$

Условия (1.8) при этом примут вид

$$\int_{-1}^1 \Phi_j(s) ds = \frac{P_0^{(j)}}{2P_0^{(1)}}; \quad (j = 1, 2). \quad (1.11)$$

2. Решение системы определяющих уравнений.

Перейдём к решению системы определяющих уравнений (1.10) при условиях (1.11) методом механических квадратур [10]. С этой целью заметим, что искомые функции в конечных точках интервала интегрирования имеет корневую особенность. Исходя из этого, представим их в виде:

$$\Phi_j(t) = \Phi_j^*(t) / \sqrt{1 - t^2} \quad (j = 1, 2), \quad (2.1)$$

где $\Phi_j^*(t)$ – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала $[-1, 1]$. Эти функции будем аппроксимировать интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по корням ξ_i ($i = \overline{1, n}$) многочлена Чебышева $T_n(x)$:

$$\Phi_j^*(t) \approx \frac{2}{n + 2k} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_j^*(\xi_i) T_n(t)}{(t - \xi_i) U_{n-1}(\xi_i)}, \quad T_n(\xi_i) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $U_n(t)$ – многочлен Чебышева второго рода.

Подставляя значения функций $\Phi_j(t)$ ($j = 1, 2$) из (2.1) в (1.10), (1.11), используя соотношение (2.2), квадратурные формулы [1], получим:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i \varphi^*(\xi_i)}{\xi_i - t} \left[1 - \frac{U_{n-1}(t)}{U_{n-1}(\xi_i)} \right];$$

$$\int_{-1}^t \varphi(\tau) d\tau = q(t) \int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau - \sqrt{1-t^2} \sum_{i=1}^n w_i \varphi^*(\xi_i) l_i(t);$$

$$\int_{-1}^1 K_{11}^*(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n w_i \varphi^*(\xi_i) K_{11}^*(\xi_i, t),$$

где

$$w_i = 8h_n \frac{n}{1-\xi_i^2} \left[\frac{1}{nU_{n-1}(\xi_i)} \right]^2; \quad q(x) = \pi B_{\frac{1+x}{2}}(0.5, 0.5);$$

$$l_i(x) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\xi_i) U_{m-1}(x)}{2mh_m}; \quad h_m = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma(m+0.5)}{\Gamma(m+1)} \right]^2,$$

а $B_x(\alpha, \beta)$ и $\Gamma(\alpha, \beta)$ – соответственно, неполная бета- и гамма-функции Эйлера и выбирая корни $\eta_k (k = \overline{1, n-1})$ многочлена Чебышева второго рода $U_{n-1}(t)$ в качестве точек коллокации, получим следующую замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $\varphi_j^*(\xi_i) (j = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi_i - t} + K_{jj}^*(\xi_i, t) + 2\mathfrak{G}_j^* \sqrt{1-\eta_k^2} l_i(\eta_k) \right) w_i \varphi_j^*(\xi_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n K_{jm}^*(\xi_i, t) w_i \varphi_m^*(\xi_i) = -\mathfrak{G}_j^* (1 - q(\eta_k)); \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_j^*(\xi_i) = \frac{P_0^{(j)}}{2P_0^{(1)}} \quad (j, m = 1, 2; j \neq m).$$

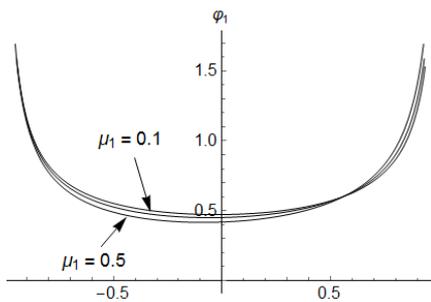
После решения системы (2.3), при помощи формулы (2.2) восстанавливаются функции $\varphi_j^*(t) (-1 < t < 1)$ и определяются все составляющие напряжённно-деформированного поля в двухкомпонентном слое.

3. Численные расчёты и выводы.

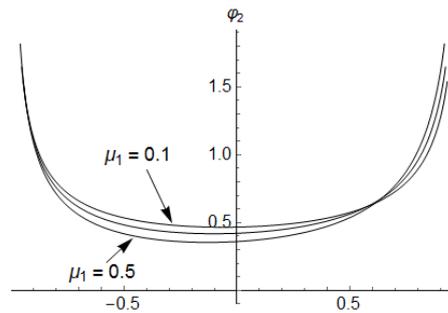
Проведён численный расчёт поставленной задачи в случае, когда разнородные полосы усилены включениями, изготовленными из одинаковых материалов и

имеющие одинаковые длины, на которые действуют одинаковые сосредоточенные нагрузки, т.е. когда $E_I^{(1)} = E_I^{(2)} = E_I$, $a_1 = a_2 = -a$, $b_1 = b_2 = a$, $P_0^{(1)} = P_0^{(2)} = P_0$. При этом, коэффициенты Пуассона разнородных полос и геометрические характеристики имеют следующие значения: $\nu_1 = 0,25$, $\nu_2 = 0,35$, $\lambda = h/a = 2$, $\mu = E_2/E_1 = 2$.

Изучены закономерности изменения безразмерных касательных напряжений, действующих на длинные стороны включений в зависимости от соотношения модулей Юнга первой полосы и включений $\mu_1 = E_1/E_I$, когда растягивающие на бесконечности равномерно распределенные нагрузки отсутствуют, а также в зависимости от соотношения $P_1^* = hq_1/P_0$, в случае когда $\mu_1 = 0,25$. На Рис. 2а и 2б приведены соответственно графики приведённых касательных контактных напряжений $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в зависимости от параметра μ_1 .



Фиг. 2а

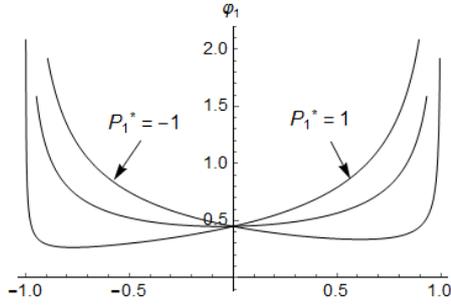


Фиг. 2б

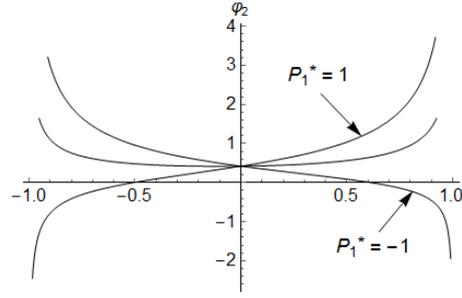
Касательные напряжения $\mu_1 = 0,1, 0,25, 0,5$

Из этих графиков видно, что распределение касательных контактных напряжений мало зависит от упругих характеристик разнородных полос и включений. При этом, как и ожидалось, чем жёстче материал включений, тем больше распределение касательных напряжений приближается к симметричному.

На фиг.3а и 3б приведены, соответственно, графики приведённых касательных контактных напряжений $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в зависимости от параметра P_1^* . Из них явствует, что распределение касательных контактных напряжений существенно зависит от изменения нагрузок на бесконечности. При этом, они, в зависимости от соотношения упругих характеристик разнородных полос и включений, могут стать знакопеременными.



Фиг. 3а.



Фиг. 3б.

Касательные напряжения $P_1^* = -1, 0, 1$

4. Кусочно-однородная плоскость с системой параллельных бесконечных внутренних включений.

Рассмотрим ещё один частный случай поставленной задачи, когда кусочно-однородная равномерно слоистая плоскость усилена внутренними параллельными бесконечными накладками и деформируется под воздействием сосредоточенных нагрузок $P_0^{(j)}$ и P_j ($j = 1, 2$), приложенных к включениям, соответственно, в точках $x = 0$ и на бесконечности, а также равномерно распределённых растягивающих нагрузок q_1 и q_2 , приложенных к полосам на бесконечности и удовлетворяющим условию совместности деформаций разнородных полос на бесконечности, приведённых выше. При этом, условия совместности деформаций бесконечных включений и разнородных полос на бесконечности приводят к соотношениям:

$$P_1 / (h_1 E_1^{(1)}) = P_2 / (h_2 E_2^{(2)}) = m_j q_j \quad (j = 1, 2).$$

В этом частном случае, при помощи соотношений (1.5) и (1.6) из второго условия контакта включений с матрицей (1.1), с учётом условий совместности деформаций бесконечных включений и разнородных полос на бесконечности получим следующую ключевую систему уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K_{j1}(s)\bar{\tau}_1(s) + K_{j2}(s)\bar{\tau}_2(s)] e^{isx} ds =$$

$$= -\frac{1}{h_j E_s^{(j)}} \left[P_0^{(j)} H(x) - 2 \int_{a_j}^x \tau_j(s) ds \right] \quad (-\infty < x < \infty; \quad j = 1, 2). \quad (4.1)$$

Нетрудно заметить, что в определяющую систему уравнений (4.1) не входят нагрузки, действующие на бесконечности, т.е. они, как и в случае однородной плоскости, на касательные контактные напряжения не влияют.

Приступим к решению системы (4.1). Для этого применим к обеим сторонам системы (4.1) обобщённое преобразование Фурье. Тогда, учитывая равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[P_0^{(j)} H(x) - 2 \int_{a_j}^x \tau_j(s) ds \right] e^{-isx} dx = \frac{1}{is} \left[P_0^{(j)} - 4\pi \bar{\tau}_j(s) \right],$$

для определения трансформантов Фурье касательных контактных напряжений придём к системе следующих алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left[sK_{11}(s) + \frac{2i}{h_1 E_I^{(1)}} \right] \bar{\tau}_1(s) + sK_{12}(s) \bar{\tau}_2(s) = \frac{iP_0^{(1)}}{2\pi h_1 E_I^{(1)}}; \\ sK_{21}(s) \bar{\tau}_1(s) + \left[sK_{22}(s) + \frac{2i}{h_2 E_I^{(2)}} \right] \bar{\tau}_2(s) = \frac{iP_0^{(2)}}{2\pi h_2 E_I^{(2)}}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Решение системы уравнений (4.2) запишем в виде:

$$\bar{\tau}_j(s) = \Delta_j^*(s) / \Delta_*(s), \quad (4.3)$$

где

$$\Delta_j^*(s) = \left[sK_{ii}(s) + i\lambda_*^{(i)} \right] \frac{i\lambda_*^{(j)} P_0^{(j)}}{4\pi} - sK_{ji}(s) \frac{i\lambda_*^{(i)} P_0^{(i)}}{4\pi} \quad (j, i = 1, 2; i \neq j);$$

$$\Delta_*(s) = \left[sK_{11}(s) + i\lambda_*^{(1)} \right] \left[sK_{22}(s) + i\lambda_*^{(2)} \right] - s^2 K_{21}(s) K_{12}(s)$$

После этого, контактные напряжения определяются при помощи обратного преобразования Фурье в замкнутом виде. Учитывая, что функции $sK_{ij}(s)$ ограничены в точке $s = 0$, а на бесконечности ведут себя как $i\alpha_j^* |s|$ при $(i = j)$ и стремятся к нулю при $i \neq j$, можем отделить логарифмическую особенность контактных напряжений, возникающую в точке приложения нагрузок, и записать их в виде:

$$\begin{aligned} \tau_j(x) = \frac{\lambda_*^{(j)} P_0^{(j)}}{2\pi \alpha_j^*} \left[\cos(a_j x) Ci(a_j x) + \sin(a_j x) Si(a_j x) \right] + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta_j^*(s)}{\Delta_j(s)} - \frac{\lambda_*^{(j)} P_0^{(j)}}{4\pi (\alpha_j^* |s| + \lambda_*^{(j)})} \right] e^{isx} ds \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\alpha_j^* = \frac{\alpha_j \vartheta_j}{2(1 - \nu_j)}; \quad a_j = \frac{\lambda_*^{(j)}}{\alpha_j^*} = \frac{4(1 - \nu_j)}{h_j E_I^{(j)} \alpha_j \vartheta_j},$$

а $Si(x)$ и $Ci(x)$ – известные интегральные синус- и косинус-функции.

Приведём также решение задачи, когда кусочно-однородная равномерно слоистая плоскость только в одной из повторяющихся полос усилена внутренними параллельными бесконечными накладками. В этом случае в системе (4.1) останется только одно уравнение:

$$\left[sK_{jj}(s) + i\lambda_*^{(j)} \right] \bar{\tau}_j(s) = \frac{i\lambda_*^{(j)} P_0^{(j)}}{4\pi} \left(\lambda_*^{(j)} = \frac{2}{h_j E_I^{(j)}}; j = 1, 2 \right), \quad (4.3)$$

причём, $j = 1$, если усилены полосы с индексом «1», и $j = 2$, если усилены полосы с индексом «2». Из уравнений (4.3) находим:

$$\tau_j(x) = \frac{i\lambda_*^{(j)} P_0^{(j)}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx} ds}{sK_{jj}(s) + i\lambda_*^{(j)}} \quad (j = 1, 2),$$

или, аналогично, используя поведение функций $sK_{jj}(s)$ на бесконечности, можем отделить логарифмическую особенность контактных напряжений и записать их в виде:

$$\begin{aligned} \tau_j(x) = & \frac{\lambda_*^{(j)} P_0^{(j)}}{2\pi \mathfrak{a}_j^*} \left[\cos(a_j x) Ci(a_j x) + \sin(a_j x) Si(a_j x) \right] + \\ & + \frac{\lambda_*^{(j)} P_0^{(j)}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i}{sK_{jj}(s) + i\lambda_*^{(j)}} - \frac{1}{\left[\mathfrak{a}_j^* |s| + \lambda_*^{(j)} \right]} \right] e^{isx} ds \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заметим, что нетрудно также записать аналогичные формулы для определения нормальных контактных напряжений, действующих на сторонах включений при помощи касательных контактных напряжений. Например, в случае когда усилена только полоса с индексом «1», нормальные контактные напряжения определяются формулой:

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = -\frac{\mathfrak{a}_1 - 1}{2h(\mathfrak{a}_1 + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\xi) d\xi}{\text{sh} \frac{\pi(\xi - x)}{2h}} - \int_{-\infty}^{\infty} R_1(x - \xi) \tau_1(\xi) d\xi.$$

$$\text{Здесь } R_1(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(s) e^{ist} dt;$$

$$\begin{aligned} R(s) = & \frac{\mathfrak{G}_1(1 + \beta \text{th} \beta + \beta \text{cth} \beta) \left(1 - \frac{\mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1}{2(1 - \nu_1)} \beta \text{th} \beta \right)}{\Delta_1(s) \text{sh} 2\beta} - \frac{1}{\Delta_2(s) \text{sh} 2\beta} \times \\ & \times \mathfrak{G}_1 \left(\frac{2\beta}{\text{sh} 2\beta} + 1 \right) - \frac{1}{\text{sh} 2\beta} \left(1 - \frac{\beta \text{th} \beta}{2(1 - \nu_1)} \right) - \frac{\beta}{2(1 - \nu_1) \text{ch}^2 \beta}. \end{aligned}$$

Заключение.

Таким образом, получена и решена система определяющих интегро-дифференциальных уравнений плоской теории упругости для кусочно-однородной, равномерно слоистой плоскости из двух, периодически повторяющихся, разнородных полос, усиленных на средних линиях системой параллельных, деформируемых разнородных конечных или бесконечных включений. В случае конечных включений

решение полученной системы построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Показано, что в зависимости от соотношения нагрузок и упругих характеристик разнородных полос и включений, касательные контактные напряжения могут стать знакопеременными.

В случае же, когда одна или обе из разнородных полос усилены бесконечными включениями, получено замкнутое решение задачи в квадратурах. Показано, что в этом случае, как и в случае однородной плоскости, касательные контактные напряжения не зависят от нагрузок, приложенных к кусочно-однородной плоскости и включениям на бесконечности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместной научной программы 18RF-061 и 18-51-05012 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с. Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers.-M.: Nauka,1983.-488p. (in Russian)
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с. Panasyuk V., Savruk M., Datsyshyn A. Distribution of stresses near cracks in plates and shells.// Kiev, Naukova Dumka, 1076, 443pp. (in Russian).
3. Барзокас Д.И., Фильштинский Л.А. Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах, том.1 - Москва-Ижевск, 2010г.-864с. Bardzokas D.I., Filshtinskiy L.A., Filshtinskiy M.L. Actual problems of coupled physical fields in deformable bodies, Vol.1 – Moscow-Izhevsk, 2010, 864 pp. (in Russian).
4. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Иzv. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43. A contact problem for a piecewise homogeneous infinite plate strengthened with two parallel different infinite elastic stringers. //Proc. of NAS RA. Mechanics. 2009. Vol.62. №3. Pp.29-43 (in Russian).
5. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. /В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкций». Ереван: Изд.-во АН Арм ССР, 1985, с.26-32 . Aghayan K.L. Interaction of stringers with an infinite plate weakened by a doubly periodic system of cracks. / In: Mechanics of deformable bodies and structures. Yerevan. 1985. pp.26-32 (in Russian).
6. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с периодической системой параллельных межфазных дефектов //В сб. трудов IV-ой международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015, С.28-32. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. The stress state of piecewise homogeneous space with periodic system of parallel interface defects. Proc. of IV international conference «Topical problems of continuum mechanics». Yerevan: 2015. Pp.28-32. (in Russian).
7. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двоякопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами //В сб. трудов IV-ой международной конференции

- «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015, С.33-37. Nakobyan V.N., Dashtoyan L.L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with cracks. Proc. of IV international conference «Topical problems of continuum mechanics». Yerevan: 2015. Pp.33-37 (in Russian).
8. Nakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128.
9. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с двоякопериодическими внутренними включениями. // В сб. статей «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела», посвященного 95-летию академика С.А.Амбарцумяна, Изд.-во «Гитутюн», Ереван-2017, с.47-56. Nakobyan V.N., Amirjanyan H.A. The stress state of an piecewise uniform homogeneus layered plane with doubly inner inclusions. Proc. «Problems of mechanics of deformable solid body», dedicated to the 95th anniversary of acad. Sergey Ambartsumyan. Gitutyun. Yerevan-2017, pp.47-56 (in Russian).
10. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединённых полубесконечной упругой накладкой. //В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкций», посв. 60-летию академика Ю.Н. Работнова. М.: Машиностроение, 1975, с.44-51. Arutyunyan N.Kh., Mkhitaryan S.M. On a contact problem of two semi-infinite plates connected by semi-infinite elastic strip (in Russian). Proc. «Mechanics of deformable bodies and constructions», dedicated to 60-th anniversary of acad. Yu. Rabotnov. Moscow. Mechanical Engineering, 1975, pp.44-51 (in Russian).
11. Amirjanyan A.A., Sahakyan A.V. Mechanical quadrature method as applied to singular integral equations with logarithmic singularity on the right-hand side. Comput.Math. and Math. Phys. (2017), Vol.57, №8, pp. 1285–1293.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, проф., директор Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, **E-mail:** vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, **E-mail:** amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 17.01.2018