

УДК 539.3; 534.2

**СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ И КРАЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
ТОНКИХ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ**  
Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Михасев Г.И.

**Ключевые слова:** интерфейсные и краевые колебания, собственные частоты, оболочка.

Исследуются свободные краевые и интерфейсные колебания замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек со свободными торцами, составленных из конечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Используя систему дифференциальных уравнений соответствующих классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, выводятся дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот краевых и интерфейсных колебаний составной цилиндрической оболочки. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для составной пластины-полосы и прямоугольной пластины, соответственно. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы краевых и интерфейсных колебаний.

Դուլղազարյան Գ.Ռ., Դուլղազարյան Լ.Գ., Միխասև Գ.Ի.

**Ազատ ծայրերով բարակ առաձգական շրջանային զլանային թաղանթների  
սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումները**

**Բանալի բառեր.** ինտերֆեյս և եզրային տատանումներ, սեփական հաճախություններ, թաղանթ:

Հետազոտվում է ազատ ծայրերով փակ և բաց բաղադրյալ զլանային թաղանթի սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումները, որը կազմված է տարբեր առաձգականության հատկություններ ունեցող բարակ զլանային թաղանթներից: Օգտվելով օրթոտրոպ զլանային թաղանթների դասական տեսության հավասարումների համակարգից, արտածվում է դիսպերսիոն հավասարումներ, որոնցով գտնվում է բաղադրյալ զլանային թաղանթի հնարավոր սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումների հաճախությունները: Ասիմպտոտիկ կապ է հաստատված դիսպերսիոն խնդրի և բաղադրյալ սալ-շերտի ու ուղղանկյուն սալի համար նման խնդիրների դիսպերսիոն հավասարումների միջև: Ցուցադրված է մեխանիզմ, որով կարելի է տարանջատել ինտերֆեյս և եզրային տատանումների տիպերը:

Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Mikhasev G.I.

**Free interfacial and boundary vibrations of thin elastic circular cylindrical shells with free ends**

**Keywords:** interfacial and boundary vibrations, eigenfrequencies, shell.

Free boundary and interfacial vibrations of closed and non-closed cylindrical shells composed of two finite orthotropic thin cylindrical shells with different elastic properties are studied. Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells dispersion equations and asymptotic formulas for obtaining eigenfrequencies of possible interfacial and boundary vibrations of composed cylindrical shells are derived. Asymptotic links are established between the dispersion equations of problems at hand and analogous problems for a composed rectangular plate and plate-strip, respectively. An algorithm for separating possible interfacial vibrations is presented.

**Введение.** Исследования колебательных процессов в составных пластинах и цилиндрических оболочках занимают важное место в динамике деформируемого твёрдого тела. Это обусловлено практическими вопросами машиностроения, строительства, приборостроения, сейсмозащиты и т.д. Для тонких цилиндрических

оболочек большое значение приобретает изучение собственных колебаний, локализованных у свободного края оболочки – краевые колебания и локализованные у границы раздела свойств материала – интерфейсные колебания.

Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [1], в которой установлено существование упругих поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие у свободного края упругих тел различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея [2-4]. Вопрос существования собственных колебаний, затухающих от свободного края цилиндрической оболочки, изучены в [6-17] из [12]. Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [5-6], в которых исследуются аналоги волн Стоунли [7]. В работах [8-9] изучены свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих полубесконечных составных пластин-полос со свободным краем и прямоугольных составных пластин со свободными противоположными краями.

Вопрос существования собственных интерфейсных и краевых колебаний замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек изучены в [21-24], [28] из [12], в которых установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями для составных цилиндрических оболочек с разными граничными условиями и аналогичных задач для бесконечной составной пластины и пластины-полосы, при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

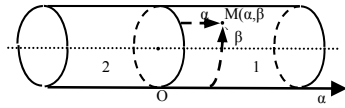
В настоящей работе изучаются собственные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек со свободными торцами, составленных из конечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что у линии раздела свойств материала имеется полный контакт. В случае незамкнутой цилиндрической оболочки предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены. Часть результатов этой работы докладывалась на IV международной конференции 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения [13].

Выводятся дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных типов интерфейсных и краевых колебаний для замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечных и бесконечных цилиндрических оболочек. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для составной пластины-полосы и прямоугольной пластины при наличии шарнирного закрепления Навье на смежных сторонах.

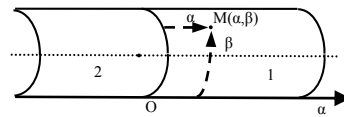
С помощью полученных ниже дисперсионных уравнений и их асимптотических формул, можно, меняя геометрию оболочек и механические свойства материала, управлять спектром, смещая начало спектра или точки сгущения из нежелательной области резонанса.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассматриваются свободные интерфейсные и краевые колебания замкнутых (незамкнутых) цилиндрических оболочек, составленных из конечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Введём на срединной поверхности оболочки криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha(-l^{(2)} < \alpha \leq l^{(1)})$  и  $\beta(0 \leq \beta \leq s)$  являются соответственно ориентированной переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности.  $s$  – полная длина направляющей окружности (фиг.

1,2).  $\alpha = 0$  соответствует границе раздела свойств материала. Все величины, относящиеся к правой оболочке ( $0 \leq \alpha \leq l^{(1)}$ ), отмечаются верхним индексом (1), к левой оболочке ( $-l^{(2)} < \alpha \leq 0$ ) – индексом (2).



Фиг.1



Фиг.2

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания левых и правых цилиндрических оболочек, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записываются в выбранных криволинейных координатах  $\alpha, \beta$  в виде (1.1) из [12]. В этих уравнениях  $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ) – проекции вектора перемещений соответственно в направлениях  $\alpha, \beta$  и нормали к срединной поверхности оболочки;  $R$  – радиус направляющей окружности срединной поверхности;  $\mu^4 = h^2 / 12$  ( $h$  – толщина оболочки);  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний;  $\rho^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ) – плотности материалов;  $B_{ij}^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ) – коэффициенты упругости составляющих цилиндрических оболочек.

Рассматриваются следующие граничные условия:

$$T_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = T_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, S_{12}^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} \Big|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)} + \frac{H^{(2)}}{R} \Big|_{\alpha=0}, M_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = M_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0},$$

$$N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0} = N_1^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0}, u_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad (1.1)$$

$$u_2^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_2^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, u_3^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_3^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0};$$

$$T_1^{(r)} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, S_{12}^{(r)} + \frac{H^{(r)}}{R} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, M_1^{(r)} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, \quad (1.2)$$

$$N_1^{(r)} + \frac{\partial H^{(r)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, r = 1, 2;$$

$$u_i^{(r)}(\alpha, \beta) = u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), i = 1, 2, 3; r = 1, 2; \quad (1.3)$$

$$T_2^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = u_1^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = u_3^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = M_2^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = 0, r = 1, 2; \quad (1.4)$$

где выражения для  $T_i^{(r)}, S_{12}^{(r)}, M_i^{(r)}, H^{(r)}, N_1^{(r)}$  имеют вид (1.6) из работы [12].

Граничные условия (1.1)-(1.3) соответствуют замкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (1.1) выражают условия полного контакта при  $\alpha = 0$ , условия (1.2) – условиями свободного края при  $\alpha = l^{(1)}$  и  $\alpha = -l^{(2)}$ , а (1.3) – условия периодичности колебания, где  $s$  – полная длина направляющей окружности срединной

поверхности (фиг.1). Граничные условия (1.1),(1.2), (1.4) соответствуют цилиндрической оболочке открытого профиля: соотношения (1.4) являются условиями шарнирного закрепления по образующим  $\beta = 0$  и  $\beta = s$ , где  $s$  – длина дуги окружности срединной поверхности между шарнирно закреплёнными образующими (фиг.2).

**2. Вывод дисперсионных уравнений.** В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) из [12] угловую частоту  $\omega$  формально заменим на  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , соответственно. Вводятся обозначения:  $k = 2\pi n_0 / s$ ,  $n_0 \in N$  для замкнутой цилиндрической оболочки, и  $k = \pi / s$  для цилиндрической оболочки открытого профиля. Пусть  $R^{-1} = kr_0 / 2$ , где  $r_0$  – безразмерный параметр. Решение системы (1.1) из [12] ищется в виде

$$(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}) = (u_m^{(r)} \sin km\beta, v_m^{(r)} \cos km\beta, \sin km\beta) \times \exp((-1)^r \chi^{(r)} k\alpha + \chi^{(r)} kl^{(r)}), \quad r = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Здесь  $m$  – волновое число,  $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}, \chi^{(r)}$  – неопределённые константы. При этом, условия (1.3) и (1.4) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если придавать параметру  $k$  разные значения. Подставляя выражения (2.1) в преобразованную систему, получим:

$$(c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) u_m^{(r)} = \frac{(-1)^r \chi^{(r)} r_0}{2} \left\{ a_m^{(r)} - a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} l_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_m^{(r)} \right\}, \quad (2.2)$$

$$(c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) v_m^{(r)} = \frac{r_0 m}{2} \{ b_m^{(r)} - a^2 g_m^{(r)} l_m^{(r)} \}, \quad (2.3)$$

$$R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_m^{(r)} + m^2 b_m^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 a_m^{(r)} + a^2 (R_{mm}^{(r)} g_m^{(r)} d_m^{(r)} - 2m^2 l_m^{(r)} b_m^{(r)}) + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m^{(r)} \left( b_m^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 \right) + a^4 m^2 g_m^{(r)} (l_m^{(r)})^2 \right\} = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (2.4)$$

$$a_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2, \quad b_m^{(r)} = B_1^{(r)} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2, \quad (2.5)$$

$$c_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - B_2^{(r)} (\chi^{(r)})^2 m^2 + \left( \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 + (\eta_2^{(r)})^2 \right) (\chi^{(r)})^2 + \left( m^2 - (\eta_1^{(r)})^2 \right) \left( \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_2^{(r)})^2 \right),$$

$$B_1^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}, \quad B_2^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}},$$

$$d_m^{(r)} = \frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2, \quad g_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (m^2 - (\eta_1^{(r)})^2),$$

$$l_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2, \quad (\eta_i^{(r)})^2 = \frac{\lambda_i^{(r)}}{B_{66}^{(r)} k^2} = \frac{\omega^2 \rho_i^{(r)}}{B_{66}^{(r)} k^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left( \frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + m^4 \right) - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta_3^{(r)})^2.$$

Пусть  $\chi_j^{(r)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) – попарно различные нули уравнения (2.4) с положительными действительными частями и  $\chi_{j+4}^{(r)} = -\chi_j^{(r)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Пусть  $(u_{1j}^{(r)}, u_{2j}^{(r)}, u_{3j}^{(r)})$  – нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) из [12] при  $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) соответственно. Представляя решения рассматриваемых задач в виде

$$u_i^{(r)} = \sum_{j=1}^8 w_j^{(r)} u_{ij}^{(r)}, \quad i = 1, 2, 3; r = 1, 2 \quad (2.6)$$

и учитывая граничные условия (1.2)–(1.3), получим совокупность систем уравнений:

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} \exp(k \chi_j^{(1)} l^{(1)}) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^8 \frac{c M_{ij}^{(2)} \exp(k \chi_j^{(2)} l^{(2)}) w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} \exp(k \chi_j^{(1)} l^{(1)}) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(2)} \exp(k \chi_j^{(2)} l^{(2)}) w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = \overline{5, 8};$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} = 0, \quad i = \overline{9, 12}; \quad c = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}};$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = \overline{13, 16}; \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (2.7)$$

$$M_{13j}^{(2)} = M_{1j}^{(2)}, \quad M_{14j}^{(2)} = M_{2j}^{(2)}, \quad M_{15j}^{(2)} = M_{3j}^{(2)}, \quad M_{16j}^{(2)} = M_{4j}^{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots, 8,$$

а остальные значения для  $M_{ij}^{(r)}$  заданы в виде (2.8) из [12].

Нижний индекс  $j$  означает, что соответствующая функция взята при  $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ . Чтобы совокупность систем уравнений (2.7) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы совокупность уравнений имела решения:

$$\Delta = \text{Det} \left\| T_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i,j=1}^4, & T_{12} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i=1,j=5}^{4,8}; \\
T_{13} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{ij=1}^4, & T_{14} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{i=1,j=5}^{4,8}; \\
T_{21} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, & T_{22} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i,j=5}^8; \\
T_{23} &= \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, & T_{24} &= \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{i,j=5}^8; \\
T_{31} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \right\|_{i=9,j=1}^{12,4}, & T_{32} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \right\|_{i=9,j=5}^{12,8}, & T_{33} &= 0, & T_{34} &= 0; \\
T_{41} &= 0, & T_{42} &= 0, & T_{43} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \right\|_{i=13,j=1}^{16,4}, & T_{44} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \right\|_{i=13,j=5}^{16,8}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Заметим, что если в уравнении (2.8) корни уравнения (2.4)  $\chi_j^{(r)}, j = \overline{1,8}, r = 1, 2$  заменить на  $-\chi_j^{(r)}, j = \overline{1,8}, r = 1, 2$ , то получим уравнение, эквивалентное (2.8). Интерфейсным колебаниям соответствуют четыре корня с положительными действительными частями, а крайвым колебаниям соответствуют четыре корня с отрицательными действительными частями.

Численный анализ показывает, что левая часть равенства (2.8) становится малой, когда любые два корня уравнения (2.4) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчёты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель в левой части равенства (2.8), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого вводятся обозначения:

$$x_j^{(r)} = \frac{\chi_j^{(r)}}{m}, z_j^{(r)} = -kml^{(r)} x_j^{(r)}, j = 1, 2, 3, 4; \quad \eta_{mi}^{(r)} = \frac{\eta_i^{(r)}}{m}, i = 1, 2, 3; r = 1, 2, \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_m = \frac{r_0}{2m}; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 m^2 \varepsilon_m^2,$$

$$\begin{aligned}
[z_i^{(r)} z_j^{(r)}] &= -kml^{(r)} (\exp(z_i^{(r)}) - \exp(z_j^{(r)})) / (z_i^{(r)} - z_j^{(r)}), \\
[z_i^{(r)} z_j^{(r)} z_k^{(r)}] &= -kml^{(r)} ([z_i^{(r)} z_j^{(r)}] - [z_i^{(r)} z_k^{(r)}]) / (z_j^{(r)} - z_k^{(r)}), \\
[z_1^{(r)} z_2^{(r)} z_3^{(r)} z_4^{(r)}] &= -kml^{(r)} ([z_1^{(r)} z_2^{(r)} z_3^{(r)}] - [z_1^{(r)} z_2^{(r)} z_4^{(r)}]) / (z_3^{(r)} - z_4^{(r)}), r = 1, 2, \\
\sigma_1^{(r)} &= \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} + x_2^{(r)} + x_3^{(r)} + x_4^{(r)}, \\
\sigma_2^{(r)} &= \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} x_2^{(r)} + x_1^{(r)} x_3^{(r)} + x_1^{(r)} x_4^{(r)} + x_2^{(r)} x_3^{(r)} + x_2^{(r)} x_4^{(r)} + x_3^{(r)} x_4^{(r)}, \\
\sigma_3^{(r)} &= \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_3^{(r)} + x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_4^{(r)} + x_1^{(r)} x_3^{(r)} x_4^{(r)} + x_2^{(r)} x_3^{(r)} x_4^{(r)}, \\
\sigma_4^{(r)} &= \sigma_4^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_3^{(r)} x_4^{(r)}, \quad \bar{\sigma}_n^{(r)} = \sigma_n^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, 0), \\
\bar{\bar{\sigma}}_n^{(r)} &= \sigma_n^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, 0, 0), n = 1, 2, 3, 4; r = 1, 2; \quad \bar{\bar{\sigma}}_4^{(r)} = \bar{\bar{\sigma}}_3^{(r)} = \bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)} = \bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)} = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Пусть  $f_n^{(r)}$  ( $n=1,2,\dots,6$ ) – симметрический многочлен  $n$ -й степени от переменных  $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}$ . Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$f_n^{(r)} = f_n^{(r)}(\sigma_1^{(r)}, \sigma_2^{(r)}, \sigma_3^{(r)}, \sigma_4^{(r)}), \bar{f}_n^{(r)} = f_n^{(r)}(\bar{\sigma}_1^{(r)}, \bar{\sigma}_2^{(r)}, \bar{\sigma}_3^{(r)}, 0), \quad (2.12)$$

$$\bar{\bar{f}}_n^{(r)} = f_n^{(r)}(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)}, \bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)}, 0, 0), \quad n=1,2,\dots,6$$

$$f_1^{(r)} = \sigma_1^{(r)}, f_2^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^2 - \sigma_2^{(r)}, f_3^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^3 - 2\sigma_1^{(r)}\sigma_2^{(r)} + \sigma_3^{(r)},$$

$$f_4^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^4 - 3(\sigma_1^{(r)})^2\sigma_2^{(r)} + (\sigma_2^{(r)})^2 + 2\sigma_1^{(r)}\sigma_3^{(r)} - \sigma_4^{(r)},$$

$$\bar{f}_5^{(r)} = (\bar{\sigma}_1^{(r)})^5 - 4(\bar{\sigma}_1^{(r)})^3\bar{\sigma}_2^{(r)} + 3\bar{\sigma}_1^{(r)}(\bar{\sigma}_2^{(r)})^2 + 3(\bar{\sigma}_1^{(r)})^2\bar{\sigma}_3^{(r)} - 2\bar{\sigma}_2^{(r)}\bar{\sigma}_3^{(r)},$$

$$\bar{\bar{f}}_6^{(r)} = (\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^6 - 5(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^4\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)} + 6(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^2(\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)})^2 - (\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)})^3$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.8), получим:

$$\Delta = m^{56} \exp(-\sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^4 z_j^{(r)}) (K^{(1)})^2 (K^{(2)})^2 \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0 \quad (2.13)$$

$$K^{(r)} = (x_1^{(r)} - x_2^{(r)})(x_1^{(r)} - x_3^{(r)})(x_1^{(r)} - x_4^{(r)})(x_2^{(r)} - x_3^{(r)})(x_2^{(r)} - x_4^{(r)})(x_3^{(r)} - x_4^{(r)}), r=1,2.$$

$$t_{11} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i,j=1}^4, t_{12} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i=1,j=5}^{4,8}, t_{13} = c \|m_{ij}^{(2)}\|_{ij=1}^4, t_{14} = c \|m_{ij}^{(2)}\|_{i=1,j=5}^{4,8};$$

$$t_{21} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i=5,j=1}^{8,4}, t_{22} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i,j=5}^8, t_{23} = \|m_{ij}^{(2)}\|_{i=5,j=1}^{8,4}, t_{24} = \|m_{ij}^{(2)}\|_{ij=5}^8; \quad (2.14)$$

$$t_{31} = t_{12}, t_{32} = t_{11}, t_{33} = 0, t_{34} = 0; t_{41} = 0, t_{42} = 0, t_{43} = t_{14}, t_{44} = t_{13},$$

где

$$m_{1p+2k}^{(2)} = m_{pk+4}^{(2)}, m_{1p+2k+4}^{(2)} = m_{pk}^{(2)}, p=\overline{1,4}, k=\overline{1,4};$$

$$m_{ij}^{(2)} = 0, i=\overline{9,12}, j=\overline{1,8}; m_{ij}^{(1)} = 0, i=\overline{13,16}, j=\overline{1,8},$$

а остальные выражения для  $m_{ij}^{(r)}$ ,  $r=1,2$  приведены в приложении работы [12].

Из (2.15) следует, что уравнения (2.8) эквивалентны уравнениям

$$\nabla = \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (2.15)$$

Учитывая возможные соотношения между  $\eta_{1m}^{(r)}, \eta_{2m}^{(r)}, \eta_{3m}^{(r)}$ , заключаем, что уравнение (2.13) определяет частоты соответствующих типов интерфейсных и краевых колебаний.

При  $\eta_{1m}^{(r)} = \eta_{2m}^{(r)} = \eta_{3m}^{(r)} = \eta_m^{(r)}$  уравнение (2.4) является характеристическим уравнением системы (1.1) из [12]. Уравнение (2.15) при  $k = 2\pi n_0 / s$ ,  $n_0 \in N$  является дисперсионным уравнением задачи при условиях (1.1)-(1.3), а при  $k = \pi / s$  – дисперсионным уравнением задачи при условиях (1.1),(1.2),(1.4).

**3. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.15) при  $R^{-1} \rightarrow 0$ .** При использовании формулы из пункта 2 положим, что  $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$  ( $r=1,2$ ). Тогда, при  $R^{-1} \rightarrow 0$  ( $r_0 \rightarrow 0$ ) уравнение (2.4) преобразуется в совокупность уравнений:

$$c_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - B_2^{(r)} (\chi^{(r)})^2 m^2 + (B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 +$$

$$+ \left( m^2 - (\eta^{(r)})^2 \right) \left( B_{22}^{(r)} m^2 - B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 \right) / B_{11}^{(r)} = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (3.1)$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left( B_{11}^{(r)} (\chi^{(r)})^4 - 2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}) (\chi^{(r)})^2 + m^4 B_{22}^{(r)} \right) - B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad r = 1, 2, \quad (3.2)$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно [8-9]. Корни  $\chi^{(r)} / m$  уравнений (3.1) и (3.2) с положительными действительными частями обозначим через  $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$  и  $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$ , соответственно.

Аналогичным образом, как в [12] из [12], доказывается, что при условии  $\varepsilon_m \ll 1$ ,  $y_j^{(r)} \neq y_i^{(r)}$ ,  $i \neq j$

$$(3.3)$$

корни  $(\chi^{(r)})^2 / m^2$  уравнения (2.4) можно представить в виде

$$(x_j^{(r)})^2 = (y_j^{(r)})^2 + \alpha_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^2 + \beta_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.4)$$

При условии (3.3), учитывая соотношения (2.7) и (3.4) и тот факт, что

$$\frac{M_{3j}^{(r)}}{m^6} = \frac{M_{4j}^{(r)}}{m^7} = \frac{M_{7j}^{(r)}}{m^4} = \frac{M_{8j}^{(r)}}{m^5} = O(\varepsilon_m^2), \quad j = 1, 2, \quad r = 1, 2, \quad (3.5)$$

уравнения (2.15) приводятся к виду

$$\text{Det} \|t_{ij}\|_{ij=1}^4 = \left( \frac{B_{11}^{(1)} B_{11}^{(2)} N^{(1)} (\eta_m^{(1)}) N^{(2)} (\eta_m^{(2)})}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) (B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})} \right)^2 \left\{ \left( K_3^{(1)} (\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)} (\eta_m^{(2)}) \right)^2 \times \right.$$

$$\times \text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^8 \cdot \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 \left. \right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.6)$$

$$N^{(r)} (\eta_m^{(r)}) = (y_1^{(r)} + y_3^{(r)}) (y_1^{(r)} + y_4^{(r)}) (y_2^{(r)} + y_3^{(r)}) (y_2^{(r)} + y_4^{(r)}),$$

$$K_3^{(r)} (\eta_m^{(r)}) = \left( 1 - (\eta_m^{(r)})^2 \right) \left( \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times$$

$$\times \left( \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right)^2 + \left( B_2^{(r)} - \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times$$

$$\times \left( \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) \left( \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + \right.$$

$$\left. + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) + \left( \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right)^2.$$

$$(3.7)$$



Из уравнений (3.6) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  совокупность уравнений (2.15) распадается на две совокупности уравнений

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0; \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0; \text{ и } K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0; K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (3.8)$$

Первая и вторая совокупности уравнений (3.8) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями собственных планарных и изгибных интерфейсных и краевых колебаний составной пластины-полосы со свободными краями ( $k = 2\pi n_0 / s$ ) и прямоугольной пластины со свободными противоположными сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены ( $k = \pi / s$ ) (см. (1.17) и (2.14) из [9]). Корням третьей и четвертой совокупностей уравнений соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Они появляются в результате использования уравнения, соответствующего классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

При  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические уравнения [9]:

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left( \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, m = \overline{1, \infty}, \quad (3.9)$$

$$\text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left( \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 + \sum_{j=3}^4 O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что при  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  первые две совокупности уравнений из (3.8) распадается на совокупности уравнений

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0, m = \overline{1, \infty}; K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, \infty}, \quad (3.11)$$

$$\text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0, m = \overline{1, \infty}; K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (3.12)$$

Первые совокупности уравнений из (3.11), (3.12) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями планарного и изгибного колебания для полубесконечной составной пластины со свободным краем  $\alpha = l^{(1)}$ .

Вторые совокупности уравнений из (3.11), (3.12) являются, соответственно, уравнениями Рэлея и Коненкова для полубесконечной пластины из материала (2) со свободным краем  $\alpha = -l^{(2)}$  или пластины-полосы из материала (2) со свободным торцом  $\alpha = -l^{(2)}$ , когда смежные края шарнирно закреплены [8].

При  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические уравнения [8]:

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 = \left( B_{66}^{(1)} / B_{11}^{(1)} \right)^4 \left( (B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) / B_{11}^{(1)} \right)^2 (B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}) / B_{11}^{(2)} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \quad (3.13)$$

$$+ \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, m = \overline{1, +\infty},$$

$$\text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 = G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \sum_{j=3}^4 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, m = \overline{1, \infty}, \quad (3.14)$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left( B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left[ 2 \left( y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right) \left( y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) + \right. \\
& \left. + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((1 - (\eta_m^{(2)})^2)y_1^{(1)}y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2)y_1^{(2)}y_2^{(2)}) \right], \\
K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left( \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)}, \quad r = 1, 2, \\
Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \quad r = 1, 2, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \left( \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left[ 2 \left( y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left( y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) + (y_3^{(1)} + y_4^{(1)})(y_3^{(2)} + y_4^{(2)})(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + y_3^{(2)} y_4^{(2)}) \right], \quad m = \overline{1, +\infty}, \\
K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= (y_3^{(r)} y_4^{(r)})^2 + 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} y_3^{(r)} y_4^{(r)} - \left( \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)^2, \quad r = 1, 2
\end{aligned}$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что при  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$  первые совокупности уравнений (3.11), (3.12) распадаются, соответственно, на совокупности уравнений:

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \tag{3.16}$$

$$G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \tag{3.17}$$

Первые совокупности уравнений из (3.16), (3.17) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями типа Стоунли планарных и изгибных интерфейсных колебаний для бесконечной составной пластины или пластины-полосы, когда края шарнирно закреплены [24] из [12].

Вторые совокупности уравнений из (3.16), (3.17) являются, соответственно, уравнениями Рэлея и Коненкова для полубесконечной пластины из материала (1) со свободным краем  $\alpha = l^{(1)}$  или пластины-полосы из материала (1) со свободным торцом  $\alpha = l^{(1)}$ , когда смежные края шарнирно закреплены [24] из [12].

При  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$  и  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ , учитывая формулы (3.9), (3.10) и (3.13), (3.14), можно написать следующие асимптотические уравнения:

$$\begin{aligned}
\text{Det} \| e_{ij} \|_{i,j=1}^8 &= \left( \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left( \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left( \frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right)^2 \times \\
& \times L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(r)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 &= \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \\ &+ \sum_{r=1}^2 \sum_{j=3}^4 O(\exp(z_j^{(r)})) = 0, m = \overline{1, \infty} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.18) и (3.19) следует, что при  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$  и  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  первые две совокупности уравнений из (3.8) распадаются, соответственно, на совокупности уравнений

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.20)$$

$$G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (3.21)$$

При  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$  и  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ , учитывая формулы (3.6), (3.18) и (3.19), для дисперсионных уравнений (2.15) можно написать следующие асимптотические уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^4 &= \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^4 \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2 \times \\ &\times \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2 G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \\ &\times K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 \sum_{r=1}^2 O(\exp(z_j^{(r)})), m = \overline{1, +\infty}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ ,  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$  и  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  уравнения (2.15) распадаются на совокупности уравнений:

$$\begin{aligned} K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) &= 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}, \\ G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}, \\ K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad r = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Таким образом, при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ ,  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$  и  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  собственные колебания составной цилиндрической оболочки расчленяются на локализованные, преимущественно, изгибного и планарного типа интерфейсных и краевых колебаний.

#### 4. Асимптотика дисперсионных уравнений (2.15) при $ml^{(r)} \rightarrow \infty$ , $r = 1, 2$ .

Пусть  $\chi_j^{(2)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  имеют положительные действительные части и  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ . Тогда дисперсионные уравнения (2.15) можно написать в виде:

$$\nabla = \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^4 = \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^3 \cdot \text{Det} t_{44} + \sum_{j=5}^8 O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что при  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  дисперсионные уравнения (2.15) распадаются на совокупность уравнений

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}; \quad \text{Det} t_{44} = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (4.2)$$

Первая совокупность уравнений (4.2) является дисперсионными уравнениями полубесконечной составной замкнутой цилиндрической оболочки ( $k = 2\pi/s$ ) со свободным торцом  $\alpha = l^{(1)}$  или дисперсионными уравнениями незамкнутой цилиндрической оболочки открытого профиля ( $k = \pi/s$ ) со свободным торцом  $\alpha = l^{(1)}$ , когда граничные образующие шарнирно закреплены [12]. Вторая совокупность уравнений (4.2) является дисперсионными уравнениями краевых колебаний полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки ( $k = 2\pi/s$ ) со свободным торцом  $\alpha = -l^{(2)}$ , изготовленной из материала (2) или дисперсионными уравнениями краевых колебаний незамкнутой цилиндрической оболочки открытого профиля ( $k = \pi/s$ ) со свободным торцом  $\alpha = -l^{(2)}$ , изготовленной из материала (2), когда граничные образующие шарнирно закреплены [12] из [12].

Заметим, что первую и вторую совокупности уравнений (4.2), при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ , можно написать в виде [13]

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = \left( \frac{B_{11}^{(1)}}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})} \right)^2 \frac{B_{11}^{(2)}}{(B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})} \left( N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \quad (4.3)$$

$$\left\{ \left( K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \text{Det} \left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^6 \cdot \text{Det} \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^6 \right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty},$$

$$\text{Det} t_{44} = \text{Det} t_{13} = \left( \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left( \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \quad (4.4)$$

$$+ O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}.$$

Учитывая (3.13), (3.14), первую совокупность уравнений (4.2) можно написать в виде [12]

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = \left( \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left( N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \left\{ \left( K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \right. \quad (4.5)$$

$$\left. \times G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right\} +$$

$$+ O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}.$$

Учитывая асимптотические формулы (4.1), (4.4), (4.5), ещё раз убеждаемся в справедливости уравнений (3.22).

Если  $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$  и  $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$  – корни уравнений (3.1), (3.2) с положительными действительными частями, соответственно, то при  $\rho^{(2)} / \rho^{(1)} \ll 1$ ,  $B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} \ll 1$ ,  $i, j = 1, 2, 6$  уравнения (2.15) преобразуются в уравнения:

$$\text{Det} \| t_{ij} \|_{ij=1}^4 = \left( \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left( \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left( \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left( N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times$$

$$\times \left\{ \left( K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 \left( K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right\}$$

$$O(\varepsilon_m^2) + O(B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)}) + O(B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)}) + \sum_{j=1}^4 \sum_{r=1}^2 O(\exp(z_j^{(r)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ ,  $B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} \rightarrow 0$ ,  $B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \rightarrow 0$ ,  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ ,  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  уравнения (2.15) распадаются на уравнения:

$$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0,$$

$$K_1^{(2)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (4.7)$$

Следовательно, при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ ,  $B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} \rightarrow 0$ ,  $B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \rightarrow 0$ ,  $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ ,  $ml^{(2)} \rightarrow \infty$  корни уравнений (4.7) являются приближёнными значениями корней уравнений (2.15).

**5. Численные исследования.** В таблице 1 приведены значения некоторых  $\eta_m^{(1)}$  корней уравнения (3.23) при  $k = 3.10827$  и  $m = 44, 92$ . Отметим, что связь между  $\eta_m^{(1)}$  и  $\eta_m^{(2)}$  имеет вид:

$$\eta_m^{(2)} = \frac{\rho^{(2)} B_{66}^{(1)}}{\rho^{(1)} B_{66}^{(2)}} \eta_m^{(1)} \quad (5.1)$$

Таблица 1

m	$K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)})=0$ $L(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})=0$ $K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0$	$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)})=0$ $G(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})=0$ $K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0$	$K_3^{(1)}(\eta^{(1)})=0$	$K_3^{(2)}(\eta^{(2)})=0$
44	0.96420 0.98367 32.5553	0.86230 0.92763 43.9422	0.69594	3.71441
92	0.96420 0.98367 32.5549	1.80389 1.93958 91.8819	0.93841	2.16831 28.9998

В таблице 2 приведены безразмерные характеристики  $\eta_m^{(1)}$  собственных частот интерфейсных и краевых колебаний и характеристики затухания соответствующих форм  $\kappa\chi_0^{(1)} / m$  и  $\kappa\chi_0^{(2)} / m$  для составных цилиндрических оболочек открытого профиля, изготовленных из боропластика и бумаги, с механическими параметрами [10], [11]:

$$\text{Боропластик: } \rho^{(1)} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, E_1^{(1)} = 2.646 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, E_2^{(1)} = 1.323 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$G^{(1)} = 9.604 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1^{(1)} = 0.2, \nu_2^{(1)} = 0.01, \quad (5.2)$$

$$\text{Бумага: } \rho^{(2)} = 0.16 \text{ кг/м}^3, E_1^{(2)} = 2.95281 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, E_2^{(2)} = 2.2106 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2,$$

$$G^{(2)} = 9.77076 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} E_1^{(2)} / E_2^{(2)}, \nu_2^{(2)} = 0.23, \quad (5.3)$$

и геометрическими параметрами:

$$R = 2, s = 1.01072, k = 3.10827, r_0 = 0.32172, h = 1/50, b = 1,$$

$l^{(1)} = 15, l^{(2)} = 1.5$  ( $b$  – расстояние между граничными образующими). Отметим, что проведены численные исследования для составной цилиндрической оболочки открытого профиля, изготовленной из боропластика и бумаги, с механическими параметрами (5.2), (5.3) с теми же геометрическими параметрами, только при  $l^{(1)} = 1.5, l^{(2)} = 15$ . Результаты исследования показывают, что при  $m = 44, m = 92$  все характеристики почти не отличаются от соответствующих характеристик, приведённых в табл. 2.

В качестве характеристики затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0^{(1)} / m = \pm \min \{ k \operatorname{Re} \chi_1^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_2^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_3^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_4^{(1)} / m \}$$

$$k\chi_0^{(2)} / m = \pm \min \{ k \operatorname{Re} \chi_1^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_2^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_3^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_4^{(2)} / m \} \quad (5.4)$$

В табл. 2 после характеристик собственных частот указан тип интерфейсных колебаний: inb – преимущественно изгибные, ine – преимущественно планарные; краевые колебания:  $b^{(r)}, r = 1, 2$  – преимущественно изгибного типа,  $e^{(r)}, r = 1, 2$  – преимущественно планарного типа и  $n^{(r)}, r = 1, 2$  – новый тип колебаний.

В табл. 2 случай  $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$  соответствует задаче (1.1),(1.2),(1.4).

Таблица 2

m	44			92			
	$k\chi^{(1)} / m$	$k\chi^{(2)} / m$	$\eta^{(1)} / m$	$k\chi^{(1)} / m$	$k\chi^{(2)} / m$	$\eta^{(1)} / m$	
$\eta_1^{(r)} = \eta^{(r)}$	-0.4399	-2.4962	0.69593 $n^{(1)}$	-0.2178	-2.4958	0.93851 $n^{(1)}$	
	iq	-2.4960	0.92792 $b^{(1)}$	-0.1684	-2.4957	0.96419 $e^{(1)}$	
	iq	2.4960	0.92857 inb	0.1150	2.4957	0.98367 ine	
	$\eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}$	iq	-2.4959	0.96416 $e^{(1)}$	iq	-2.4940	1.94018 $b^{(1)}$
		iq	2.4959	0.98368 ine	iq	1.4980	1.94096 inb
	$\eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$	iq	-2.4878	3.71441 $n^{(2)}$	iq	-2.4934	2.16875 $n^{(2)}$
		iq	-1.1751	32.5553 $e^{(2)}$	iq	-1.6401	28.9997 $n^{(2)}$
		iq	-0.1742	43.9422 $b^{(2)}$	iq	-1.1750	32.5556 $e^{(2)}$
			iq	-0.0996	91.8805 $b^{(2)}$		
$\eta_1^{(r)} = 0$	iq	-2.4965	0.92792 $b^{(1)}$				
	iq	2.4965	0.92852 inb				
				-0.0052	-2.4963	1.93968 $b^{(1)}$	
				iq	2.4963	1.93995 inb	
$\eta_2^{(r)} = 0$							
$\eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$	iq	-0.1742	43.9650 $b^{(2)}$				
				iq	-0.0996	91.8808 $b^{(2)}$	
$\eta_1^{(r)} = \eta^{(r)}$	-0.4399	-2.4962	0.69593 $n^{(1)}$	-2.2178	-2.4958	0.93841 $n^{(1)}$	
				-0.1684	2.4957	0.96419 $e^{(1)}$	
				-0.1150	2.4957	0.98367 ine	
$\eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}$	-0.1684	-2.4959	0.96419 $e^{(1)}$				
	0.1150	2.4959	0.98367 ine				

	iq	-2.4877	$3.71441 n^{(2)}$	iq	2.4934	$2.16875 n^{(2)}$
	iq	-1.1744	$32.5568 e^{(2)}$	iq	1.6401	$28.9996 n^{(2)}$
				iq	1.1750	$32.5555 e^{(2)}$

Случай  $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$  соответствует задаче (1.1),(1.2), (1.4), в которой отсутствует тангенциальный компонент силы инерции, т.е. имеем, преимущественно, изгибный тип интерфейсных и краевых колебаний. Аналогично, случай  $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$  соответствует, преимущественно, планарному типу.

При  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  собственные интерфейсные и краевые колебания задачи (1.1)-(1.3), (1.1),(1.2), (1.4) расчлняются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. Частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для составной пластины-полосы. В зависимости от  $a^2 m^2$  появляются не более восьми новых типов колебаний, характерных только для составных цилиндрических оболочек, обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции.

При колебаниях преимущественно тангенциального типа ( $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$ ), кроме планарных интерфейсных и краевых колебаний типа Стоунли и Рэля могут появляться не более восьми новых колебаний, обусловленных также продольными и крутильными компонентами силы инерции.

**Замечание.** В таблице 2, если совместить строки, соответствующие значениям  $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$  с соответствующими строками для значений  $\eta_1^{(r)} = 0, \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ , то получатся приближённые значения первой строки в случае  $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ , что доказывает эффективность механизма разделения типов колебаний.

**Заключение.** Используя систему уравнений динамического равновесия ортотропных цилиндрических оболочек соответствующей классической теории, получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных интерфейсных и краевых колебаний замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек.

Частоты собственных интерфейсных и краевых колебаний цилиндрических оболочек, составленных из двух ортотропных тонких упругих оболочек с разными упругими коэффициентами, определяются совокупностью уравнений (2.15).

Частоты собственных интерфейсных и краевых колебаний для составной прямоугольной пластины или бесконечной пластины-полосы определяются первыми двумя совокупностями уравнений (3.8). Существование интерфейсных и краевых колебаний зависит от радиуса окружности, длины составляющих оболочек и коэффициентов упругости. При больших  $m$  или при малой кривизне окружности все характеристики собственных интерфейсных и краевых колебаний замкнутой и незамкнутой цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам интерфейсных и краевых колебаний бесконечной пластины-полосы или прямоугольной пластины, соответственно. Численные результаты показывают, что с увеличением  $m$  характеристики, приведённые в таблице 2, мало реагируют на величины  $l^{(1)}, l^{(2)}$ .

Численные исследования показывают, что асимптотические формулы (3.6), (3.22) дисперсионного уравнения (2.15) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задач с условиями (1.1)-(1.3); (1.1),(1.2), (1.4).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids // Proc. London Math. Soc. 1885. 17. pp.4-11.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка.- 1981. 284с. //Grinchenko V.T. and Meleshko V.V. Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. Kiev: Naukova Dumka, 1981.284p.
3. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 292с. //Mikhasev G.I., Tovstic P.E. Localized vibrations and waves in thin shells: Asymptotic methods. Moscow: Fizmatlit, 2009. 292p.
4. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280с. //Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kassovich L.Yu. Edge and interfacial resonance phenomenon in elastic solids. Moscow: fizmatlit Publ., 2010. 280p.
5. Зильбергейт А.С., Сулова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинках // Акуст. журнал. 1985. Т.29. № 2. С.186-191 //Zilbergreit A.S.,Suslova E.B. Contact waves of bend in thin plates//Akoust. Journal. 1985, v. 29, № 2. Pp. 186-191.
6. Гертман И.П., Лисицкий О.Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // Прикл. математика и механика. 1988. Т.52. № 6. С.1044-1048 //Gertman I.P. , Lisitskii O.N. Reflection and transmission of sound waves through the interfacial boundary of two joined elastic half-strips//Journal of Appl. Math. And Mech. 1988,v. 52, Iss. 6.pp. 1044-1048.
7. Stoneley R. The elastic waves at the interface of two solids // Proc. Roy Soc. London A. 106 (1924) 416-429.
8. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных пластин со свободным краем/ Механика машин, механизмов и материалов. 2015. №2 (31), стр.29-36. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G., Mikhasev G.I. On free boundary and interfacial vibrations of thin elastic semi-infinite plates with free end //Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2015. №2 (31). P.29-36. <https://mmmm.by/pdf/ru/2015/02/4.pdf>
9. Гулгазарян Г.Р., Мелконян А.Т., Саакян С.А. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонкой упругой пластины-полосы и прямоугольной пластины со свободными противоположными краями./ АГПУ им. Х. Абовяна. Учёные записки, 2015. № 2-3 (24-25). С.54-68.// Ghulghazaryan G.R, Melqonyan A.T., Sahakyan S.A. About free interfacial and boundary vibrations of thin elastic plate-strip and rectangular plate with free opposite edges// Armenian State pedagogical university after Kh. Abovyan. Scientific News. 2015.N 2-3 (24-25) p.54-68.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматлит, 1961. 384с. //Ambartsumyan S.A. The theory of Anizotropic Shells. Moscow,Cos.izd. fiz. Mat. Lit.,1961. 384p.
11. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. №3. С.171-174// G.R. Gulgazaryan, V.B. Lidskii. The frequency density of the free vibrations of a thin anisotropic shell composed of anisotropic layers. //Izv. AS USSR. МТТ. 1982. №.3. Pp.171-174.



12. Гулгазрян Г.Р., Гулгазрян Р.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных круговых цилиндрических оболочек со свободным торцом. //Механика машин, механизмов и материалов. 2016. №2 (35). С.34-46. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G., Mikhasev G.I. About free boundary and interfacial vibrations of thin elastic semi-infinite circular cylindrical shells//Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2016. №2 (35). P.34-46. <http://mMMM.by/pdf/ru/2016/02/5.pdf>
13. Гулгазрян Г.Р., Гулгазрян Л.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек со свободными торцами / Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2015. С.172-176.// Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Mikhasev G.I. About free interfacial and boundary vibrations of thin elastic circular cylindrical shells with free ends// Topical problems of continuum mechanics. Yerevan–2015, pp. 172-176.

**Сведения об авторах:**

**Гулгазрян Гурген Рубенович**, профессор, д.ф.-м.н. АГПУ им. Х. Абовяна. Проф. кафедры математики и методики её преподавания. Тигран Мец., 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.:(+37491) 706700. E-mail: [ghulgr@yahoo.com](mailto:ghulgr@yahoo.com)

**Гулгазрян Лусине Гургеновна**, д.ф.-м.н., ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении. Доцент кафедры математики и методики её преподавания АГПУ им. Х. Абовяна. Тигран Мец., 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.:(+37491) 302554. E-mail: [lusina@mail.ru](mailto:lusina@mail.ru)

**Михасев Геннадий Иванович**, профессор, д.ф.-м.н. Заведующий кафедрой био- и наномеханики БГУ. 220030. Беларусь, г. Минск, Пр. Независимости, 4. E-mail: [gimkhasev@rambler.ru](mailto:gimkhasev@rambler.ru)

Поступила в редакцию 22.09.2017