

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ
НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ**

Баласанян Е.С.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропная пластина, смешанные условия, внутренняя задача.

Асимптотическим методом из уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластины, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв заданы условия неполного контакта. Рассмотрен конкретный пример.

Բալասանյան Եվ. Ս.

Անիզոտրոպ երկշերտ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

Բանալի բառեր: ասիմպտոտիկ մեթոդ, անիզոտրոպ սալեր, խառը պայմաններ, ներքին խնդիր:

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի պայմաններ: Դիտարկված է կոնկրետ օրինակ:

Balasyan E.S.

Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate with incomplete contact between the layers

Key words: asymptotic method, anisotropic plate, mixed conditions, interior problem.

A question of solution stress-strain state in three dimension problem for an asymptotic plate, with full contact between the layers, is considered. In the surface of plate are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration, solutions of the interior problem is built. Some cases examples are considered.

Введение. В работе [1] асимптотическим методом построена приближённая теория изгиба пластин из изотропных материалов. Классические статические краевые задачи анизотропных полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [2]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [2,3]. В [4] тем же методом определено напряжённо-деформированное состояние слоистой пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Было проведено сопоставление выведенных основных уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии.

В работах [5,6] рассмотрен вопрос определения напряжённо-деформированного состояния анизотропной однослойной и слоистой термоупругой пластинки, когда на

одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Смешанная краевая задача для анизотропной пластинки решена в [7].

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается смешанная краевая задача теории упругости для двухслойной анизотропной пластинки: $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 \ll l\}$, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. Величины, относящиеся к верхнему слою, отмечены индексом (1), а к нижнему слою – индексом (2). Толщины и коэффициенты упругости слоёв, соответственно, h_k и $a_{ij}^{(k)}$, ($k = 1, 2$), а $l = \max(a, b)$.

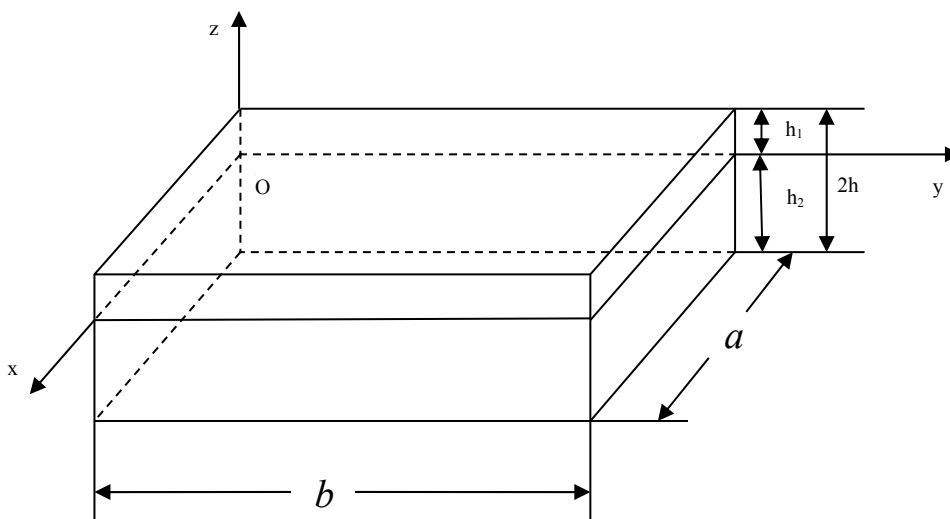
Координатную систему Oxy выберем на плоскости контакта слоёв (фиг. 1).

На лицевых плоскостях пластинки заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^-(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^-(x, y), \quad w^{(2)} = \frac{l}{h} w^-(x, y) \quad \text{при } z = -h_2 \\ u^{(1)} = \frac{l}{h} u^+(x, y), \quad v^{(1)} = \frac{l}{h} v^+(x, y), \quad \sigma_z^{(1)} = \frac{l}{h} \sigma_z^+(x, y) \quad \text{при } z = h_1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ пока произвольные, а между слоями выполняется неполный контакт, т.е. при $z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \\ u^{(2)} - u^{(1)} = f_1(x, y), \quad v^{(2)} - v^{(1)} = f_2(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг.1

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости [8]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \quad (k=1,2) \\
\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} &= a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} &= a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} &= a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} &= a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} &= a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} &= a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.3), вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$. Также используются следующие обозначения: $\zeta_1 = h_1/h$, $\zeta_2 = -h_2/h$, $h_1 + h_2 = 2h$. Решение полученной сингулярно-возмущённой системы состоит из решений внутренней задачи и пограничного слоя.

Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы [1-4]:

$$Q^{(k)} = \varepsilon^q \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(s,k)}, \tag{1.4}$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при [3,5-7]:

$$q = -1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)},$$

$$q = 0 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4), с учётом (1.5), в преобразованные уравнения теории упругости (1.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (x, y; \xi, \eta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k,s)}}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{13}^{(k)} \sigma_z^{(k,s)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta} = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_z^{(k,s)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} +$$

$$+ a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} = a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} +$$

$$+ a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)}, \quad (u, v; \xi, \eta; 5, 4; 1, 2; x, y)$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{36}^{(k)} \sigma_z^{(k,s)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} +$$

$$+ a_{56}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

Интегрируя систему (1.6) по ζ , получим:

$$\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_z^{*(k,s)} + \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_x^{(k,s)} = \sigma_x^{*(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + a_3 \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad (x, y; a, b),$$

$$U^{(k,s)} = u^{*(k,s)} + u^{(k,s)} \quad (U, V, W), \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \sigma_{xy}^{*(k,s)} + \tau_{xy0}^{(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_{xz}^{(k,s)} = \sigma_{xz}^{*(k,s)} + \tau_{xz1}^{(k,s)} \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)}, \quad (x, y),$$

где

$$\tau_{x0}^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{(k,s)}, \quad (1, 2; x, y),$$

$$\tau_{xy0}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{(k,s)}$$

$$\tau_{xz1}^{(k,s)} = - \left(\frac{\partial \tau_{x0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy0}^{(k,s)}}{\partial \eta} + a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right), \quad (x, y; \xi, \eta; a, b) \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_1^{(k,s)} = \frac{\partial u_0^{(k,s)}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2^{(k,s)} = \frac{\partial v_0^{(k,s)}}{\partial \eta}, \quad \omega^{(k,s)} = \frac{\partial u_0^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_0^{(k,s)}}{\partial \xi}.$$

Величины со звездочками, входящие в выражения (1.7), известны для каждого приближения s и определяются по формулам:

$$\sigma_z^{*(k,s)} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} \right) d\zeta,$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \eta} \right) d\zeta, \quad (x, y; \xi, \eta) \quad (1.9)$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + \right. \\ \left. + a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (u, v; 1, 2; 5, 4; \xi, \eta; x, y)$$

$$w^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + \right. \\ \left. + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} \right) d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + a_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + a_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + \\ + a_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_y^{*(k,s)} = B_{12}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{22}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + b_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + b_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + \\ + b_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + c_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + \\ + c_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2^{*(k,s)} = \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \eta}, \quad \omega^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \xi}$$

Предполагается, что $Q^{(k,s-i)} \equiv 0$ при $s < i$.

Коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$, $c_i^{(k)}$ определяются по известным формулам [4,8].

$\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1) и (1.2).

Используя решение (1.7), удовлетворив условиям неполного контакта слоёв (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)}, \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, w_0^{(1,s)} = w_0^{(2,s)} \\ u_0^{(2,s)} &= u_0^{(1,s)} + f_1^{(s)}(\xi, \eta), v_0^{(2,s)} = v_0^{(1,s)} + f_2^{(s)}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $f_k^{(0)}(\xi, \eta) = f_k(l\xi, l\eta)$, $f_k^{(s)}(\xi, \eta) = 0$ $s > 0$, $k = 1, 2$.

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} u_0^{(1,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), (u, v), \\ u_0^{(2,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + f_1^{(s)}(\xi, \eta), (u, v; f_1, f_2) \\ w_0^{(1,s)} &= w_0^{(2,s)} = w^{-(s)}(\xi, \eta) - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \\ \sigma_{z0}^{(1,s)} &= \sigma_{z0}^{(2,s)} = \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)} = \sigma_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta) + \left\{ L_{11}(B_{ij}^{(2)})u^{+(s)}(\xi, \eta) + L_{12}(B_{ij}^{(2)})v^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\ &+ a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 - \left\{ L_{11}(B_{ij}^{(2)})u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \right. \\ &+ L_{12}(B_{ij}^{(2)})v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 - \\ &- \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2) + \left\{ L_{11}(B_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{12}(B_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) \right\} \zeta_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz0}^{(1,s)} &= \sigma_{yz0}^{(2,s)} = \sigma_{yz}^{-(s)}(\xi, \eta) + \left\{ L_{12}(B_{ij}^{(2)})u^{+(s)}(\xi, \eta) + L_{22}(B_{ij}^{(2)})v^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\ &+ b_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \left. \right\} \zeta_2 - \left\{ L_{12}(B_{ij}^{(2)})u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \right. \\ &+ L_{22}(B_{ij}^{(2)})v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + b_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \eta} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \xi} \left. \right\} \zeta_2 - \\ &- \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2) + \left\{ L_{12}(B_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{22}(B_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) \right\} \zeta_2 \end{aligned}$$

Здесь $L_{ij}(B_{ij}^{(k)})$ – известные дифференциальные операторы второго порядка [8].

Окончательное решение внутренней задачи представим в виде:

$$\begin{aligned}
U^{(1,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) + u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), (u, v), \\
U^{(2,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) + u^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + f_1^{(s)}(\xi, \eta), (u, v; f_1, f_2) \\
W^{(k,s)} &= w^{-(s)}(\xi, \eta) + w^{*(k,s)}(\xi, \eta, \zeta) - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2) \\
\sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_z^{+(s)} + \sigma_z^{*(k,s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\
\sigma_x^{(1,s)} &= B_{11}^{(1)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{16}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
&\quad + a_3^{(1)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - B_{11}^{(1)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - B_{12}^{(1)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - \\
&\quad - B_{16}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_x^{*(1,s)} - a_3^{(1)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\
&\hspace{15em} (x, y; 1, 2; u, v; \xi, \eta; a_3^{(k)}, b_3^{(k)}) \\
\sigma_x^{(2,s)} &= B_{11}^{(2)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{16}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
&\quad + a_3^{(2)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - B_{11}^{(2)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - B_{12}^{(2)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - \\
&\quad - B_{16}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_x^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta) - \\
&\quad - a_3^{(2)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + B_{11}^{(2)} \frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \\
&\quad + B_{16}^{(2)} \left(\frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right), (x, y; 1, 2; u, v; \xi, \eta; a_3^{(k)}, b_3^{(k)}) \tag{1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(1,s)} = & B_{16}^{(1)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{26}^{(1)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{66}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
& + c_3^{(1)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - c_3^{(1)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - B_{16}^{(1)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - \\
& - B_{26}^{(1)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - B_{66}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \\
& + \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(2,s)} = & B_{16}^{(2)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{26}^{(2)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{66}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
& + c_3^{(2)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - B_{16}^{(2)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - B_{26}^{(2)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - \\
& - B_{66}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta) - c_3^{(2)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \\
& + B_{16}^{(2)} \frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{26}^{(2)} \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{66}^{(2)} \left(\frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(1,s)} = & \sigma_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta) - \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(1)} \right) u^{+(s)}(\xi, \eta) + L_{12} \left(B_{ij}^{(1)} \right) v^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\
& + a_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta + \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\
& + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{+(s)}(\xi, \eta) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(1)} \right) u^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(1)} \right) v^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + a_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \xi} + \right. \\
& + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta - \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + \right. \\
& + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 + \sigma_{xz}^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta \right) - \\
& - \sigma_{xz}^{*(2,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_2 \right) + \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_1^{(s)} \left(\xi, \eta \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_2^{(s)} \left(\xi, \eta \right) \right) \zeta_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(2,s)} & = \sigma_{xz}^{-s} \left(\xi, \eta \right) - \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{+(s)} \left(\xi, \eta \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{+(s)} \left(\xi, \eta \right) + \right. \\
& + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-s} \left(\xi, \eta \right)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-s} \left(\xi, \eta \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \left(\zeta - \zeta_2 \right) + \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + \right. \\
& + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \left(\zeta - \zeta_2 \right) + \\
& + \left(\sigma_{xz}^{*(2,s)} \left(\xi, \eta, \zeta \right) - \sigma_{xz}^{*(2,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_2 \right) \right) - \\
& - \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_1^{(s)} \left(\xi, \eta \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_2^{(s)} \left(\xi, \eta \right) \right) \left(\zeta - \zeta_2 \right), \\
& \left(x, y, \xi, \eta, u, v, 1, 2; a_3^{(2)}, b_3^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

В формулах (1.11) необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned}
u^{+(0)} & = \frac{u^+}{l}, \quad v^{+(0)} = \frac{v^+}{l}, \quad w^{-(0)} = \frac{w^-}{l}, \quad \sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^+, \quad \sigma_{xz}^{-(0)} = \sigma_{xz}^-, \quad \sigma_{yz}^{-(0)} = \sigma_{yz}^-, \\
u^{+(s)} & = v^{+(s)} = w^{-(s)} = 0, \quad \sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0.
\end{aligned}$$

При $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}, h_1 = h_2$ полученные решения совпадают с соответствующими решениями для однослойной пластины [7].

2. Нежёсткий контакт. Остановимся более подробно на модели нежёсткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем: принимается, что существует тонкий слой толщиной h_0 с исчезающе малой сдвиговой жёсткостью G_0 между контактирующими средами. Отношение

$$\chi = \lim_{\substack{h_0 \rightarrow 0 \\ G_0 \rightarrow 0}} \frac{h_0}{G_0}$$

может принимать любое значение от 0 до ∞ . Предельному случаю $\chi = 0$ соответствует жёсткий контакт, другому предельному случаю $\chi \rightarrow \infty$ – скользящий контакт.

Для промежуточного состояния принимаются

$$u^{(2)} - u^{(1)} = f_1^{(s)} = \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_{xz} (z = 0), v^{(2)} - v^{(1)} = f_1^{(s)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_{yz} (z = 0) \quad (2.1)$$

Постоянные χ_1, χ_2 имеют размерность m^3 / H и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии $z = \text{const}$ и изотропных материалов имеет место соотношение $\chi_1 = \chi_2$.

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда, из (1.2) и (2.2) следует:

$$f_1^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_1 \sigma_{xz0}^{(k,s)}, f_2^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_2 \sigma_{yz0}^{(k,s)}. \quad (2.2)$$

Подставив значения $f_1^{(s)}(\xi, \eta)$ и $f_2^{(s)}(\xi, \eta)$ из (2.2) в (1.11), получим систему

дифференциальных уравнений для определения $\sigma_{xz0}^{(k,s)}$ и $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$:

$$\begin{aligned} \chi_1 L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{xz0}^{(2,s)} &= p_1^{(s)}, \\ \chi_1 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{22} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{yz0}^{(2,s)} &= p_2^{(s)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} p_1^{(s)} &= -\sigma_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta) - L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) u^{+(s)}(\xi, \eta) - L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) v^{+(s)}(\xi, \eta) - \\ &\quad - a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \zeta_2 - c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \zeta_2 + L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \\ &\quad + L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \zeta_2 + \\ &\quad + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \zeta_2 + \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \quad (x, y; u, v; 1, 2; a_3^{(2)}, b_3^{(2)}; \xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Систему (2.3) можно привести к одному уравнению четвёртого порядка относительно неизвестной функции $\sigma_{xz0}^{(2,s)}$ или $\sigma_{yz0}^{(2,s)}$:

$$\left\{ \chi_1 \chi_2 \left(L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \right) - \chi_1 L_{11} - \chi_2 L_{22} \right\} \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \sigma_{xz0}^{(2,s)} = \left(\chi_2 L_{22} - 1 \right) p_1^{(s)} - \chi_2 L_{12} p_2^{(s)} \quad (2.5)$$

$$\left\{ \chi_1 \chi_2 \left(L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \right) - \chi_1 L_{11} - \chi_2 L_{22} \right\} \sigma_{yz0}^{(2,s)} + \sigma_{yz0}^{(2,s)} = \left(\chi_1 L_{11} - 1 \right) p_2^{(s)} - \chi_1 L_{12} p_1^{(s)} \quad (2.6)$$

В частном случае, когда $u^{(1)} = u^{(2)}$, но $v^{(1)} \neq v^{(2)}$, то $\chi_1 = 0$, $\chi_2 \neq 0$ и вместо системы (2.3) получим одно уравнение для определения $\sigma_{yz0}^{(2,s)}$

$$\begin{aligned} \chi_2 L_{22} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{yz0}^{(2,s)} &= p_2^{(s)}, \\ \sigma_{xz0}^{(2,s)} &= -p_1^{(s)} + \chi_2 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В другом частном случае, когда $v^{(1)} = v^{(2)}$, $u^{(1)} \neq u^{(2)}$, то $\chi_2 = 0$, $\chi_1 \neq 0$, и получим:

$$\begin{aligned} \chi_1 L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} - \sigma_{xz0}^{(2,s)} &= p_1^{(s)}, \\ \sigma_{yz0}^{(2,s)} &= -p_2^{(s)} + \chi_1 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Имея решения системы (2.3) или уравнений (2.7) или (2.8), с помощью формул (1.7) получим окончательное решение внутренней задачи.

3. Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим пример. Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_z^+ &= 0, \quad u^+ = v^+ = 0, \quad w^- = 0, \\ \sigma_{xz}^- &= \tau_1 \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad \sigma_{yz}^- = \tau_2 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{b} y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В уравнениях (3.1), вводя безразмерные перемещения $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, получим:

$$\sigma_{xz}^- = \tau_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad \sigma_{yz}^- = \tau_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta. \quad (3.2)$$

Тогда из (2.4) с учётом (3.2) при $s = 0$ получим:

$$p_1^{(0)} = \tau_1 \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad p_2^{(0)} = \tau_2 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{b} y. \quad (3.3)$$

Решение системы (2.3) в нулевом приближении ищется в виде

$$\sigma_{xz0}^{(2,0)} = \tau^{(1)} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad \sigma_{yz0}^{(2,0)} = \tau^{(2)} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad (3.4)$$

где коэффициенты $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ – пока неизвестные постоянные.

Подставив (3.4) в систему (2.3) и приравнявая коэффициенты при $\cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta$ и $\sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta$, получим следующую систему

$$\begin{aligned} -\tau^{(1)} \left[\chi_1 \left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + 1 \right] + \tau^{(2)} \chi_2 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) &= \tau_1, \\ \tau^{(1)} \chi_1 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + \tau^{(2)} \left[\chi_2 \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - 1 \right] &= \tau_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение системы (3.5) имеет вид :

$$\tau^{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \tau^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= -\chi_1 \chi_2 \left[\left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \chi_1 \left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + \chi_2 \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - 1 \\ \Delta_1 &= \chi_2 \left[\tau_1 \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - \tau_2 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) \right] - \tau_1 \\ \Delta_2 &= -\chi_1 \left[\tau_2 \left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - \tau_1 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) \right] - \tau_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если ограничиться нулевым приближением, то будем иметь:

$$U^{(1,0)} = 0, \quad (U, V), W^{(k,0)} = 0, \quad \sigma_x^{(1,0)} = \sigma_y^{(1,0)} = \sigma_z^{(k,0)} = \sigma_{xy}^{(1,0)} = 0,$$

$$U^{(2,0)} = \chi_1 \frac{\Delta_1}{\Delta} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$V^{(2,0)} = \chi_2 \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$\sigma_x^{(2,0)} = \left(-B_{11}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{a} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{b} \right) \frac{2\pi l}{\Delta} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$\sigma_y^{(2,0)} = \left(-B_{22}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \frac{2\pi l}{\Delta} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)} = B_{66}^{(2)} \frac{2\pi l}{\Delta} \left(-\chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1,0)} &= \sigma_{xz}^- + \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \frac{\Delta_1}{\Delta} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ &\quad \left. + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) \zeta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2,0)} &= \sigma_{xz}^- - \frac{1}{\Delta} \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ &\quad \left. + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_2), \end{aligned}$$

$$\sigma_{yz}^{(1,0)} = \sigma_{yz}^- + \frac{1}{\Delta} \left(L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{22} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) \zeta_2, \\ \sigma_{yz}^{(2,0)} = \sigma_{yz}^- - \frac{1}{\Delta} \left(L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{22} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_2).$$

При $s = 1$ отличны от нуля только величины:

$$W^{(1,1)} = \left\{ a_{13}^{(2)} \left(-B_{11}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{a} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{b} \right) \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + a_{23}^{(2)} \left(-B_{22}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right\} 2\pi l \zeta_2, \\ W^{(2,1)} = \left\{ a_{13}^{(2)} \left(-B_{11}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{a} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{b} \right) \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + a_{23}^{(2)} \left(-B_{22}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right\} 2\pi l (\zeta - \zeta_2). \quad (3.8)$$

Заключение. В работе асимптотическим методом построено решение смешанной внутренней задачи анизотропной двухслойной пластины, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, при неполном контакте между слоями. Решение внутренней задачи не содержит произвольных постоянных. Для удовлетворения торцевым условиям при $x = 0, a$ необходимо построить решения типа пограничного слоя вблизи этих торцов [2-4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С. 668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. T.26. Is. 4, pp. 668-686 (in Russian).
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с. Aghalovian L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London: World Scientific Publ. 2015. 376p.
3. Агаловян Л.А., Геворгян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Erevan. 2005. 468p. (in Russian).

4. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида // Известия НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22. Aghalovian L.A., Baghdasaryan Yu.M., Khachatryan A.M. On determination of stress-strain state of sandwich-type plates with general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. Issue 3, pp. 10-22 (in Russian).
5. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. № 3-4. С.3-11. Aghalovian L.A., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimentions interior problem for anisotropic thermoelastic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1993. Vol. 46. Issue 3-4, pp. 3-11 (in Russian).
6. Хачатрян А.М., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки. /Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 08-12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. С.229-233. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimention interior problem for anisotropic plate. //Proceedings of International Conferance «Topical Problems of Continuum Mechanics». Tsaghkadzor, Armenia. October 08-12, 2012. Vol.2, pp. 229-233 (in Russian).
7. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т. 62. №4. С.65-72. Petrosyan G.A., Khachatryan A.M. The asymptotic solution of one mixed boundary problem of an anisotropic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2009. Vol. 62. № 4. Pp. 65-72 (in Russian).
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic shells. M.: Nauka, 1967. 268p. (in Russian).
9. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки. //Труды межд. школы-конф. молодых учёных «Механика-2013», посвящ. 70-летию НАН Армении. Ереван, 2013. С.88-92. Balasanyan E.S., Petrosyan G.A. Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate. //Proceedings of International school-conferance of young scientists. «Mechanics-2013», Dedicated to the 70-th anniversary of NAS of Armenia. Yerevan, 2013. Pp. 88-92.

Сведения об авторе:

Баласанян Евгения Самвеловна – преподаватель кафедры математики АрГУ НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. Тел.: (37497) 170620, (37447)970620, **E-mail:** majvazjan@mail.ru

Поступила в редакцию 11.07.2017