ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №1, 2018 Механика

УДК 593.3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А.

Ключевые слова: Колебания, устойчивость, слоистые магнитострикционные пластинки, магнитное поле.

Բաղդասարյան Գ., Դանոյան Է.Հ.

Մագնիսական դաշտում գտնվող մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալերի տատանումների և կայունության հիմնական հավասարումներն ու եզրային պայմանները

Հիմնաբառեր: տատանումներ, կայունություն, շերտավոր մագնիսաստրիկցիոն սալեր, մագնիսական դաշտ:

Հիմնվելով դիէլեկտրիկ ֆերոմագնիսական հոծ միջավայրերի մագնիսաառաձգականության տեսության եւ բարակ առաձգական սալերի դասական տեսության վրա, ստացված են ընդլայնական մագնիսական դաշտում գտնվող եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալերի փոքր գրգռումների վարքը նկարագրող հիմնական հավասարումներ եւ սահմանային պայմանները:

Bagdasarian G.E., Danoyan E.H.

Main equations and boundary conditions of vibrations and stability of three-layered magnetostrictive plates in a transverse magnetic field

Keywords: Vibrations, stability, layered magnetostrictive plates, magnetic field.

Based on the theory of magnetoelasticity of dielectric ferromagnetic solids and on the classical theory of thin elastic plates, the main equations and boundary conditions are obtained describing the behavior of small perturbations in the three-layered magnetostrictive plates in the presence of a transverse magnetic field.

На основе теории магнитоупругости диэлектрических ферромагнитных твердых тел и классической теории тонких упругих пластин, получены основные уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений в трехслойных магнитострикционных пластин, при наличии поперечного магнитного поля.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из трёх однородных изотропных упругих слоёв. Слои, симметрично расположенные относительно срединной плоскости пластинки, изготовлены из одинаковых диэлектрических магнитострикционных ферромагнитных материалов и имеют одинаковую толщину. Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что координатная плоскость $0x_1x_2$ совпадает со срединной плоскостью среднего слоя. В слое с номером i координата x_3 изменяется в интервале $(\delta_{i3}-\delta_{i2})\delta-\delta_{i1}h<x_3<(\delta_{i2}-\delta_{i1})\delta+\delta_{i3}h$, где δ_{ij} –символ Кронеккера, $i=1,2,3$. Считается, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения.

Пусть пластинка помещена в стационарное магнитное поле, которое в отсутствии пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризующего магнитного поля $\mathbf{B}^0(0,0,B_{03})$. При помещении слоистой магнитострикционной пластинки в магнитное поле происходит намагничивание слоёв пластинки, приводящее как к изменению характеристик магнитного поля во всем пространстве, так и к деформированию пластинки. Следуя [1,3,11], характеристики магнитнго поля представляются в виде

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_*+\mathbf{b},\quad \mathbf{M}=\mathbf{B}_*+\mathbf{m},\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_*+\mathbf{h}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{B}_*,\mathbf{M}_*$ и $\mathbf{H}_*$ – соответственно, магнитная индукция**,** намагниченность и напряжённость магнитного поля, возникающего во всем пространстве вследствие помещения недеформируемой пластинки во внешнее поляризующее магнитное поле, $\mathbf{b}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{h}$ – характеристики индуцированного магнитного поля, возникающие вследствие деформации пластинки. Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

Согласно [1,5] принимается, что геометрия тела в невозмущённом состоянии совпадает с его геометрией первоначального недеформированного состояния. Из этого предположения следует, что магнитное поле невозмущённого состояния с принятой точностью совпадает с магнитным полем недеформируемого тела, т.е. $\mathbf{H}_*=\mathbf{H}^{\text{Н}}$, $\mathbf{B}_*=\mathbf{B}^{\text{Н}}$, $\mathbf{M}_*=\mathbf{M}^{\text{Н}}$. Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к невозмущённому состоянию, отмечены индексом «Н».

В работах [1,3], используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [9-12] и теории малых возмущений, путём линеаризации получены следующие линейные уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений в указанной магнитоактивной деформируемой среде:

уравнения во внутренней области пластинки (в слое с номером α):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(s_{ik}^{(\alpha)} + s_{im}^{н(\alpha)}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_m}\right) + \mu_0 M_i^{н(\alpha)}\dfrac{\partial h_k^{(\alpha)}}{\partial x_i} + \mu_0 m_i^{(\alpha)}\dfrac{\partial H_k^{н(\alpha)}}{\partial x_i} = \rho_0^{(\alpha)}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{h}^{(\alpha)} = 0,\ \mathrm{div}\boldsymbol{b}^{(\alpha)} = 0,\quad \boldsymbol{b}^{(\alpha)} = \mu_0\left(\boldsymbol{h}^{(\alpha)} + \boldsymbol{m}^{(\alpha)}\right),\ \left(\alpha = 1,2,3\right), \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} s_{ij}^{(\alpha)} = c_{ijkl}^{(\alpha)}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} + \mu_0\, e_{ijk}^{(\alpha)} m_k^{(\alpha)}, \\ h_i^{(\alpha)} = g_{ijk}^{(\alpha)}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j} + A_{ik}^{(\alpha)}\, m_k^{(\alpha)}, \end{cases} \tag{3}$$

где s_{ik} – возмущенния компонент тензора $s_{ik}^{н}$ магнитоуругих напряжений невозмущённого состояния; u_k – возмущения компонент вектора $\mathbf{u}^{\mathbf{H}}$ упругих перемещений; h_k, m_k и b_k – компоненты векторов $\mathbf{h},\mathbf{m}$ и $\mathbf{b}$, представляющие возмущения соответственно напряжённости $\mathbf{H}^{н}$ намагниченности $\mathbf{M}^{н}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}^{н}$ невозмущённого магнитного поля, x_i – декартовые координаты. Здесь и в дальнейшем, если соответствие каких-либо величин или уравнений к конкретному слою очевидно, то запишем их, опуская указанные индексы;

уравнения во внешней области пластинки:

$$\mathrm{rot}\mathbf{h}^{(e)} = 0,\quad \mathrm{div}\mathbf{h}^{(e)},\quad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0\mathbf{h}^{(e)} \tag{4}$$

где индекс «е» здесь и в дальнейшем означает принадлежность к внешней среде;

условия на поверхности S_0 недеформируемого тела, граничащего с вакуумом:

$$\begin{gathered} \left[s_{ki} + s_{km}^{н}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]n_k^0 = \left[t_{ki}^{(e)} - t_{ki}\right]n_k^0 + \left[T_{km}^{н(e)} - T_{km}^{н}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}n_k^0, \\ \left[b_k - b_k^e\right]n_k^0 = \left[B_m^{н} - B_m^{н(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}n_i^0, \\ \varepsilon_{nmk}\left\{\left[h_n - h_n^{(e)}\right]n_m^0 - \left[H_n^{н} - H_n^{н(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}n_i^0\right\} = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $T_{km}^{н(e)}$ и $T_{km}^{н}$ – тензоры напряжений Максвелла невозмущённого состояния, соответственно, для тела и окружающей среды,

$$T_{km}^{н(e)} = \mu_0 \left[H_k^{н(e)} H_m^{н(e)} - \frac{1}{2} \delta_{km} H_n^{н(e)} H_n^{н(e)} \right],$$
$$T_{km}^{н} = H_k^{н} B_m^{н} - \frac{1}{2} \delta_{km} \mathbf{H}^{\mathbf{н}} \mathbf{H}^{\mathbf{н}}, \qquad (6)$$

n_k^0 – компоненты вектора внешней нормали $\mathbf{n_0}$ к поверхности S_0,

$$t_{ki} = b_i H_k^{н} + h_k B_i^{н} - \mu_0 \delta_{ki} \mathbf{H}^{\mathbf{н}} \mathbf{h},$$
$$t_{ki}^{(e)} = \mu_0 \left[h_k^{(e)} H_i^{н(e)} + h_k^{e} H_i^{н(e)} - \delta_{ki} \mathbf{H}^{\mathbf{н(e)}} \mathbf{h}^{(e)} \right], \qquad (7)$$

ε_{ijk} – символ Леви-Чивиты;

условия на поверхности раздела двух диэлектрических магнитострикционных слоёв $\left(x_3 = \pm\delta\right)$:

$$\left[s_{ki}^{\alpha} - s_{ki}^{\alpha+1} \right] n_k^0 = \left[t_{ki}^{(\alpha+1)} - t_{ki}^{(\alpha)} \right] n_k^0,$$
$$\left[b_k^{(\alpha)} - b_k^{(\alpha+1)} \right] n_k^0 = \left[B_m^{н(\alpha)} - B_m^{н(\alpha+1)} \right] \frac{\partial u_k}{\partial x_m} n_k^0, \qquad (8)$$
$$\varepsilon_{nmk} \left\{ \left[h_n^{(\alpha)} - h_n^{(\alpha+1)} \right] n_m^0 - \left[H_n^{н(\alpha)} - H_n^{н(\alpha+1)} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_i^0 \right\} = 0,$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 1 \text{ при } x_3 = -\delta \\ 2 \text{ при } x_3 = \delta. \end{cases} \qquad (9)$$

В уравнениях состояния (3) использованы следующие обозначения:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl} + \mu_0 A_{pq} M_r^{н} M_j^{н} \left(\delta_{ik}\delta_{pl}\delta_{rq} + \delta_{kl}\delta_{iq}\delta_{ir} + \delta_{lp}\delta_{iq}\delta_{kr} \right) +$$
$$+ \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} \left(\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kl} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{pl} + \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{pl} \right) M_r^{н} M_s^{н} +$$
$$+ \mu_0 B_{pqrs} \left(\delta_{pk}\delta_{ql}\delta_{is} M_j^{н} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{is} M_k^{н} \right) M_r^{н},$$
$$e_{ijk} = B_{ijkl} M_l^{н} + A_{mi} \left(\delta_{kj} M_m^{н} + \delta_{mk} M_j^{н} \right),$$
$$g_{ijk} = B_{jkpi} M_p^{н} + A_{rs} \left(\delta_{is}\delta_{jk} M_r^{н} + \delta_{rk}\delta_{is} M_j^{н} + \delta_{ij}\delta_{sk} M_r^{н} \right),$$

где c_{ijkl}, A_{kl}^{-1} и B_{jkpi} – соответственно, тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов.

Для магнитоупругих сред, которые в размагниченном состоянии изотропны по отношению как к магнитным, так и к упругим свойствам, справедливы равенства [2,6,7]:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \quad A_{kl} = \chi^{-1}\delta_{kl},$$
$$B_{ijkl} = e_2\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\left(e_1 - e_2\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{10}$$

где λ и μ – постоянные Ляме, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость, e_1, e_2 – магнитострикционные постоянные среды.

Если вектор $\mathbf{M}^{н}$ параллелен одной из осей координатной системы, для тензоров обобщённых упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов с точностью $e_i\left(B_3^0\right)^2\left(\mu_0\lambda\right)^{-1} << 1$, $\chi e_i >> 1$, получаются следующие упрощённые представления [4]:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl},\ g_{ijk} = B_{jkpi}M_p^{н},\ e_{ijk} = B_{ijkl}M_l^{н}. \tag{11}$$

К уравнениям (4) необходимо присоединить также условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

В коэффициенты линеаризованных соотношений (2), (5), (8) входят неизвестные компоненты $s_{ij}^{н}$ тензора напряжений невозмущённого состояния. Для слоя с номером α они являются решениями следующей статической задачи теории упругости:

уравнение равновесия:

$$\frac{\partial s_{ik}^{н(\alpha)}}{\partial x_i} + \mu_0 M_n^{н(\alpha)} \frac{H_k^{н(\alpha)}}{\partial x_n} = 0, \tag{12}$$

$$s_{ij}^{н(\alpha)} = c_{ijkl}^{н(\alpha)}\varepsilon_{kl}^{н} + s_{ij}^{0(\alpha)}, \tag{13}$$

$$s_{ij}^{0(\alpha)} = \mu_0 A_{ik}^{(\alpha)} M_j^{н(\alpha)} M_k^{н(\alpha)} + \frac{1}{2}\mu_0 B_{ijkl}^{(\alpha)}\ M_k^{н(\alpha)} M_l^{н(\alpha)}, \tag{14}$$

где $\varepsilon_{kl}^{н}$ – тензор малых деформаций невозмущённого состояния;

условия на поверхности S_0 недеформируемого тела:

$$s_{ki}^{н} n_k^0 = \left[T_{ki}^{н(e)} - T_{ki}^{н} \right] n_k^0; \tag{15}$$

условия на поверхности раздела двух диэлектрических магнитострикционных слоёв $\left(x_3 = \pm\delta\right)$:

$$\left[s_{ki}^{н(\alpha)} - s_{ki}^{н(\alpha+1)} \right] n_k^0 = \left[T_{ki}^{(\alpha+1)} - T_{ki}^{(\alpha)} \right] n_k^0, \tag{16}$$

где α определяется согласно (9).

Согласно принятому предположению, входящие в (5)-(7) характеристики невозмущённого магнитного поля определяются из следуюшей задачи магнитостатики для недеформируемого тела:

уравнение магнитостатики во внутренней области (в слое с номером α):

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\mathbf{H}^{н(\alpha)} = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{B}^{н(\alpha)} = 0, \\ \mathbf{B}^{н(\alpha)} = \mu_0 \left(\mathbf{H}^{н(\alpha)} + \mathbf{M}^{н(\alpha)} \right), \; H_k^{н(\alpha)} = A_{kl}^{(\alpha)} M_l^{н(\alpha)}; \; \left(\alpha = 1, 2, 3\right); \end{gathered} \tag{17}$$

уравнение во внешней области:

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\mathbf{H}^{н(e)} = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{H}^{н} = 0, \\ M^{н(e)} = 0, \qquad \mathbf{B}^{\mathbf{н}(\mathbf{e})} = \mu_0 \mathbf{H}^{\mathbf{н}(\mathbf{e})}; \end{gathered} \tag{18}$$

условия сопряжения на поверхности S_0:

$$\begin{gathered} \left(\mathbf{B}^{н(\alpha)} - \mathbf{B}^{н(e)} \right) \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \\ \left(\mathbf{H}^{н(\alpha)} - \mathbf{H}^{н(e)} \right) \times \mathbf{n}_0 = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где $\alpha = \begin{cases} 3 \;\text{ при }\; x_3 = h \\ 1 \;\text{ при }\; x_3 = -h; \end{cases}$

условия на поверхности раздела двух диэлектрических магнитострикционных слоёв $\left(x_3 = \pm\delta\right)$:

$$(\mathbf{B}^{н(\alpha)} - \mathbf{B}^{н(\alpha+1)}) \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \; (\mathbf{H}^{н(\alpha)} - \mathbf{H}^{н(\alpha+1)}) \times \mathbf{n}_0 = 0 \tag{20}$$

где α определяется согласно (9);

условия на бесконечности:

$$\mathbf{H}^{н(e)} \to \mathbf{H}^{(e)} \text{ при } \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty. \tag{21}$$

2. Двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки

Для применения процедуры получения двумерных уравнений магнитоупругих колебаний и устойчивости тонких пластин, необходимо знать характеристики (напряжённость, магнитная индукция и намагниченность) магнитных полей невозмущённого и возмущённого состояний. Их определяем, решая трёхмерные задачи математической физики, сформулирвванные в предыдущем параграфе. Решение указанных краевых задач, в случае пластин конечных размеров связано с серьёзными математическими трудностями. Численные решения этих задач в случае пластинки-полосы приведены в работе [8]. Анализ полученных в этой работе решений показывает, что характеристики магнитных полей (невозмущённого и возмущённого) для пластинки конечных размеров вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя, практически совпадают с соответствуюшими характеристиками для бесконечной полосы. На этом основании при определении характеристк невозмущённого магнитного поля пластинку будем считать бесконечной. Тогда, приближённое решение задачи (17)-(21) представляется в виде

$$\mathrm{B}_i^{н(e)}=0,\ \mathrm{B}_i^{н(\alpha)}=0,\ \mathrm{H}_i^{н(e)}=0,\ \mathrm{H}_i^{н(\alpha)}=0, \mathrm{M}_i^{н(\alpha)}=0,$$

$$B_3^{н(e)}=B_{03}\ ,\ H_3^{н(e)}=\frac{B_{03}}{\mu_0},\ M_3^{н(e)}=0, \qquad \left(i=1,2;\ \alpha=1,2,3\right), \tag{22}$$

$$B_3^{н(\alpha)}=B_{03},\ H_3^{н(\alpha)}=\frac{B_{03}}{\mu_r^{(\propto)}\mu_0},\ M_3^{н(\alpha)}=\chi^{(\alpha)}\,H_3^{н(\alpha)}.$$

Для приведения трёхмерных уравнений магнитоупругой устойчивости (2) к двумерным принимается гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом, согласно которой имеем:

$$u_1=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad u_2=v-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}\ , \qquad u_3=w\left(x_1,x_2,t\right) \tag{23}$$

где $u\left(x_1,x_2,t\right),v\left(x_1,x_2,t\right),w\left(x_1,x_2,t\right)$– возмущения перемещений точек срединной поверхности пластинки.

Пользуясь формулами (3,10,11) и пренебрегая влияниями напряжения s_{33}, с уже принятой точностью $e_i\left(B_3^0\right)^2\left(\mu_0\lambda\right)^{-1}<<1$ получаем следующие выражения для основных компонент s_{11},s_{22} и s_{12} тензора магнитоупругих напряжений:

$$
\begin{aligned}
&s_{11} = \left(\bar{\lambda} + 2\mu\right)\varepsilon_{11} + \bar{\lambda}\varepsilon_{22} + \sigma h_3, \\
&s_{22} = \left(\bar{\lambda} + 2\mu\right)\varepsilon_{22} + \bar{\lambda}\varepsilon_{11} + \sigma h_3, \\
&s_{12} = \lambda\varepsilon_{12}, \\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где введены следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\sigma = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g\right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_{03}, \; f = -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r} B_{03} \\
&\lambda_1 = \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2}(BB_{03})^2, \lambda_2 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2}(BB_{03})^2, \; \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2}(BB_{03})^2, \\
&\bar{\lambda} = \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Подставляя соотношения (24) в уравнения (2) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учётом поверхностных условий (5)-(8) приходим к следующим двумерным уравнениям магнитоупругой устойчивости рассматриваемой пластинки относительно u, v, w:

$$
\begin{cases}
L_{11}u + L_{12}v + L_1\left(h_3\right) + \int\limits_{-h}^{h} Q_1 dx_3 = X_1, \\
L_{21}u + L_{22}v + L_2\left(h_3\right) + \int\limits_{-h}^{h} Q_2 dx_3 = X_2, \\
L_{33}w + L_3\left(h_3\right) - \int\limits_{-h}^{h} Q_3 dx_3 - \dfrac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{-h}^{h} x_3 Q_k dx_3 = X_3.
\end{cases}
\tag{26}
$$

В уравнениях (26) магнитоупругой устойчивости введены следующие обозначения:

$$
Q_k = s_{im}^{н} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_m}, \quad \left(k = 1, 2, 3\right).
$$

Введением следующего оператора:

$$
A\left[\beta\right] = \left(h - \delta\right)\beta^{(1)} + \delta\beta^{(2)},
\tag{27}
$$

где β – определённая величина, зависящая от магнитомеханических параметров слоёв пластинки, линейные дифференциальные операторы L_{ij}, входящие в (26) представляются в виде

$$L_{ij} = 2A\left[\lambda_{ij}\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij}A[\mu]\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$L_{33}w = \frac{2}{3}\left[\left(h^3 - \delta^3\right)\lambda_{11}^{(1)} + \delta^3\lambda_{11}^{(2)}\right]\Delta^2 w - P\Delta w.$$

Здесь введены обозначения:

$$\lambda_{ij}^{(r)} = \lambda_1^{(r)} + \left(1 + \delta_{ij}\right)\mu^{(r)} - \frac{\left(\lambda_2^{(r)}\right)^2}{\lambda_3^{(r)} + 2\mu^{(r)}}, \quad r = 1, 2;$$

$$P = \frac{2\left(B_{03}\right)^2}{\mu_0}\left[\frac{1}{B_{03}}A\left[\frac{d_2}{\mu_r}\right] - A\left[\frac{\chi}{\mu_r}\right] + A\left[\frac{3e_2 - e_1}{2}\frac{\chi^2}{\mu_r^2}\right]\right],$$

$$d_1 = \frac{\chi^2 e_1 B_{03}}{\mu_r}\frac{f}{\lambda_3 + 2\mu}, \quad d_2 = \frac{\chi B_{03}}{\mu_r}\left[\frac{\left(e_1 - e_2\right)}{2}\chi - \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu}\chi e_1\right],$$

$$k = \begin{cases} 2 & \text{при } i = j = 1 \\ 1 & \text{для остальных индексов } i \text{ и } j; \end{cases}$$

и по повторяющимся индексам суммирование не предполагается.

Операторы $L_i\left(h_3\right)$, учитывающие влияние индуцированного в пластинке магнитного поля **h**, входящие в (26), имеют следующий вид:

$$L_i\left(h_3\right) = \int_{-h}^{h}\left(\sigma - \frac{\chi B_{03}}{\mu_r}\right)\frac{\partial h_3}{\partial x_i}dx_3, \quad i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} L_3\left(h_3\right) = {} & -B_{03}\left(h_3^{(e)} - h_3\right)\Big|_{-h}^{h} - B_{03}\left(\frac{d_1^{(1)}}{\mu_0\mu_r^{(1)}} - \frac{\chi^{(1)}}{\mu_r^{(1)}}\right)h_3\Big|_{-h}^{h} + \\ & + B_{03}\left[\left(1 + \frac{\chi^{(2)}}{\mu_r^{(2)}} + \frac{d_1^{(2)}}{\mu_0\mu_r^{(2)}}\right)h_3^{(2)} - \left(1 + \frac{2\chi^{(1)}}{\mu_r^{(1)}}\right)h_3^{(1)}\right]\Big|_{x_3 = -\delta} - \\ & - B_{03}\left[\left(1 + \frac{2\chi^{(2)}}{\mu_r^{(2)}}\right)h_3^{(2)} - \left(1 + \frac{\chi^{(1)}}{\mu_r^{(1)}} + \frac{d_1^{(1)}}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\right)h_3^{(3)}\right]\Big|_{x_3 = \delta} + \\ & - \int_{-h}^{h}x_3\left(\sigma - \mu_0 M_3^{н}\right)\Delta h_3 dx_3 - \int_{-h}^{h}\mu_0 M_3^{н}\frac{\partial h_3}{\partial x_3}dx_3. \end{aligned} \qquad (29)$$

Наконец, компоненты X_i объёмной силы инерционного происхождения представляются в виде:

$$X_1 = 2A[\rho]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad X_2 = 2A[\rho]\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad X_3 = 2A[\rho]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

3. Определение индуцированного магнитного поля.

Для замыкания системы (19) следует определить компоненты h_i индуцированного магнитного поля в пластинке. Введением потенциальных функций $\varphi^{(j)}$ для j-ого слоя посредством

$$\boldsymbol{h}^{(j)} = \operatorname{grad}\varphi^{(j)}, \quad j = 1,2,3 \tag{30}$$

замечаем, что они, согласно (20), являются решениями следующих уравнений:

$$\mu_0\mu_r^{(k)}\Delta_3\varphi^{(k)} = d_1^{(k)}\frac{\partial^2\varphi^{(k)}}{\partial x_3^2} + \left(c^{(k)} - d_2^{(2)}\right)\Delta_2 w, \quad \left(k = 1,2,3\right), \tag{31}$$

где Δ_3, Δ_2 – соответственно, трёхмерный и двухмерный операторы Лапласа,

$$c^{(k)} = \frac{\left(\chi^{(k)}\right)^2 B_{03}}{\mu_r^{(k)}}\left(\frac{e_1^{(k)} - e_2^{(k)}}{2} - e_2^{(k)}\right).$$

Аналогичным образом, введя магнитные потенциалы во внешней области посредством

$$h^{(e)} = \operatorname{grad}\varphi_U^{(e)} \text{ при } x_3 \ge h \quad \text{и} \quad h^{(e)} = \operatorname{grad}\varphi_L^{(e)} \text{ при } x_3 \le -h \tag{32}$$

заключаем, что функции φ^U и φ^L, согласно (4), удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta_3\varphi_U^{(e)} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 \ge h \tag{33}$$

$$\Delta_3\varphi_L^{(e)} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 \le -h \tag{34}$$

Решения уравнений для введённых потенциалов должны удовлетворять поверхностным условиям (5) и (8), относящимся характеристикам индуцированного магнитного поля.

Решение сформулированных выше трёхмерных задач в случае конечной пластинки строится следующим образом [1]. Сначала решается задача для бесконечной пластинки, представляя искомые функции в виде

$$\left(u,v,w\right)=\left(u_0,v_0,w_0\right)\exp\left[i\left(\omega t-k_1x_1-k_2x_2\right)\right],$$
$$\left(\varphi^{(j)},\varphi_U^{(e)},\varphi_L^{(e)}\right)=\left(F^{(j)}\left(x_3\right),F^U\left(x_3\right),F^L\left(x_3\right)\right)\exp\left[i\left(\omega t-k_1x_1-k_2x_2\right)\right], \tag{35}$$

(неизвестные функции $F^{(j)}$, F^U и F^L определяются удовлетворением уравнений (26), (30)-(34) и условий сопряжения на поверхностях контакта в случае бесконечной пластинки), а затем неизвестные волновые числа k_1 и k_2 определяются с использованием асимптотического метода интегрирования [1] и условий закрепления краёв пластинки.

Ниже приводится только начальная часть указанной процедуры (решение задачи в случае бесконечной пластинки). Вторую же часть (определение волновых чисел k_1 и k_2) необходимо исполнить при решении конкретных задач колебания и устойчивости.

Учитывая сказанное и используя (35), из уравнений (31)-(34) легко находим:

$$F^{(j)}\left(x_3\right)=F_{j1}e^{\tilde{k}_jx_3}+F_{j2}e^{-\tilde{k}_jx_3}+F_{j0}w_0,\quad j=1,2,3; \tag{36}$$

$$F^U\left(x_3\right)=F_{33}e^{-kx_3}\ \text{ при }\ x_3\geq h,\quad F^L\left(x_3\right)=F_{13}e^{kx_3}\ \text{ при }\ x_3\leq -h, \tag{37}$$

где

$$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2},\qquad \tilde{k}_i=\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r^{(i)}}{\mu_0\mu_r^{(i)}-d_1^{(i)}}}k,\qquad F_{j0}=\frac{c^{(j)}-d_2^{(j)}}{\mu_0\mu_r^{(j)}}, \tag{38}$$

F_{ij} – произвольные постоянные.

Удовлетворяя условиям сопряжения (5) и (8), определяем неизвестные F_{ij} и с их помощью следующие выражения для магнитных потенциалов $\varphi_L^{(e)}$, $\varphi_U^{(e)}$ и $\varphi^{(j)}$:

для потенциалов вне пластинки:

$$\varphi_L^{(e)}=e^{kx_3}\left(C_{13}^{w}w+C_{13}^{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\right)\ \text{ при }\ x_3\leq -h,$$
$$\varphi_U^{(e)}=e^{-kx_3}\left(C_{33}^{w}w+C_{33}^{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\right)\ \text{ при }\ x_3\geq h, \tag{39a}$$

для потенциала нижнего слоя:

$$\varphi^{(1)} = \mathrm{ch}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh}\delta_2 C_{13}^{w} + \gamma_2 \right) w + \left(e^{-kh}\delta_2 C_{13}^{uv} + a_1 l_1 \mathrm{sh}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] +$$
$$+ \mathrm{sh}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh}\delta_1 C_{13}^{w} + \gamma_1 \right) w + \left(e^{-kh}\delta_1 C_{13}^{uv} + a_1 l_1 \mathrm{ch}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] + F_{10} w, \tag{39b}$$

где $-h \le x_3 \le -\delta$;

для потенциала среднего слоя:

$$\varphi^{(2)} = \mathrm{ch}\tilde{k}_2 x_3 \left\{ \left[-\frac{\left(C_{13}^{w} \right)^2 \Delta}{\tilde{a}} + \frac{1}{2}\left[(1+b)\pi_2(\tilde{q}_2) + (1-b)\pi_2(\tilde{q}_1) + 2\gamma_4 \right] \right] w + \right.$$
$$\left. + \left[-\frac{C_{13}^{w} C_{13}^{uv} \Delta}{\tilde{a}} + \frac{1}{2}\vartheta_1 l_1 + a_2 \mathrm{sh}\tilde{k}_2 \delta (l_2 - l_1) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right\} +$$
$$+ \mathrm{sh}\tilde{k}_2 x_3 \left\{ \left[-\frac{C_{13}^{w} C_{13}^{uv} \Delta}{\tilde{d}} + \frac{1}{2}\left[-(1+b)\pi_1(\tilde{q}_2) + (1-b)\pi_1(\tilde{q}_1) + 2\gamma_3 \right] \right] w + \right.$$
$$\left. + \left[-\frac{\left(C_{13}^{uv} \right)^2 \Delta}{\tilde{d}} + \frac{1}{2}\vartheta_2 l_1 + a_2 \mathrm{ch}\tilde{k}_2 \delta (l_2 - l_1) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right\} + F_{20} w, \tag{39c}$$

где $-\delta \le x_3 \le \delta$;

для потенциала верхнего слоя:

$$\varphi^{(3)} = \mathrm{ch}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh}\delta_2 C_{33}^{w} + \gamma_2 \right) w + \left(e^{-kh}\delta_2 C_{33}^{uv} - a_1 l_1 \mathrm{sh}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] -$$
$$- \mathrm{sh}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh}\delta_1 C_{33}^{w} + \gamma_1 \right) w + \left(e^{-kh}\delta_1 C_{33}^{uv} - a_1 l_1 \mathrm{ch}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] + F_{10} w, \tag{39d}$$

где $\delta \le x_3 \le h.$

В формулах (39a)-(39d) введены следующие обозначения:

для коэффициентов, характеризующих влияние прогиба пластинки:

$$C_{13}^{w}=\frac{e^{-kh}}{2\Delta}\tilde{a}\left[(1+b)\left(\mathrm{ch}\tilde{q}_2-a_1\mathrm{sh}\tilde{q}_2\right)+(1-b)\left(\mathrm{ch}\tilde{q}_1-a_1\mathrm{sh}\tilde{q}_1\right)\right],$$
$$C_{33}^{w}=\frac{e^{-kh}}{2\Delta}\tilde{a}\left[(1+b)\left(\mathrm{sh}\tilde{q}_2-a_1\mathrm{ch}\tilde{q}_2\right)-(1-b)\left(\mathrm{sh}\tilde{q}_1-a_1\mathrm{ch}\tilde{q}_1\right)\right], \tag{40a}$$

для коэффициентов, характеризующих влияние продольных колебаний:

$$C_{13}^{uv}=\frac{e^{-kh}}{2\Delta}\tilde{d}\left[(1+b)\left(\mathrm{sh}\tilde{q}_2-a_1\mathrm{ch}\tilde{q}_2\right)-(1-b)\left(\mathrm{sh}\tilde{q}_2-a_1\mathrm{ch}\tilde{q}_1\right)\right],$$
$$C_{33}^{uv}=\frac{e^{-kh}}{2\Delta}\tilde{d}\left[(1-b)\left(\mathrm{ch}\tilde{q}_1-a_1\mathrm{sh}\tilde{q}_1\right)+(1+b)\left(\mathrm{ch}\tilde{q}_2-a_1\mathrm{sh}\tilde{q}_2\right)\right]. \tag{40b}$$

Входящие в (40a) и (40b) величины $\tilde{a}$, $\tilde{d}$ и Δ определяются формулами:

$$\tilde{a}=0.5\left\{r_{11}\left[(1+b)\mathrm{sh}\tilde{q}_2-(1-b)\mathrm{sh}\tilde{q}_1\right]+p_{11}\left[(1+b)\mathrm{ch}\tilde{q}_2-(1-b)\mathrm{ch}\tilde{q}_1\right]\right\}-$$
$$-r_{12}\mathrm{sh}\delta\tilde{k}_2+p_{12}\mathrm{sh}\delta\tilde{k}_1,$$
$$\tilde{d}=\frac{1}{2k}\left\{\left\{\left[(a_1+a_2)\mathrm{sh}\tilde{q}_2+(a_1-a_2)\mathrm{sh}\tilde{q}_1\right]\right\}(l_2-l_1)-a_2\mathrm{sh}\delta\tilde{k}_2 l_1\right\}, \tag{40c}$$
$$\Delta=\frac{e^{-2kh}}{8}\left[\left[(1+b)^2\left((1-a_1)^2\mathrm{sh}(2\tilde{q}_2)-2a_1\mathrm{ch}(2\tilde{q}_2)\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\left(2a_1\mathrm{ch}(2\tilde{q}_1)-(1+a_1)^2\mathrm{sh}(2\tilde{q}_1)\right)-2\left(1-a_1^2\right)\left(1-b^2\right)\mathrm{sh}k_2\delta\right],$$

где

$$\tilde{q}_1=\left(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2\right)\delta-\tilde{k}_1 h,\quad \tilde{q}_2=\left(\tilde{k}_1-\tilde{k}_2\right)\delta-\tilde{k}_1 h,$$
$$r_{11}=\frac{\chi^{(1)}}{\mu_0\mu_r^{(1)}}B_0^3-F_{10},\ r_{12}=F_{10}-F_{20}+\left(\frac{\chi^{(2)}}{\mu_0\mu_r^{(2)}}-\frac{\chi^{(1)}}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\right)B_0^3,$$
$$a_i=\frac{k}{n_i\tilde{k}_i},\quad n_i=\mu_r^{(i)}-\frac{d_1^{(i)}}{\mu_0},i=1,2;\qquad b=\frac{a_2}{a_1}, \tag{40d}$$
$$w_{11}=l_1k^2,w_{12}=(l_1-l_2)k^2,\ l_i=\frac{d_2^{(i)}}{\mu_0},$$
$$p_{11}=\frac{(hk)l_1}{\mu_r^{(1)}\sqrt{1-\dfrac{d_1^{(2)}}{\mu_0\mu_r^{(1)}}}},\quad p_{12}=\frac{(k\delta)(l_1-l_2)}{\mu_r^{(2)}\sqrt{1-\dfrac{d_1^{(2)}}{\mu_0\mu_r^{(2)}}}}\ .$$

Для краткости и удобства в полученных формулах магнитных потенциалов использованы функции:

$$\pi_1(q) = r_{11}\mathrm{sh}q + \frac{ha_1}{k} w_{11}\mathrm{ch}q,\ \pi_2(q) = r_{11}\mathrm{ch}q + \frac{ha_1}{k} w_{11}\mathrm{sh}q\ ,$$

а также следующие константы:

$$\delta_1 = \mathrm{sh}\tilde{k}_1 h + a_1 \mathrm{ch}\tilde{k}_1 h, \quad \delta_2 = \mathrm{ch}\tilde{k}_1 h + a_1 \mathrm{sh}\tilde{k}_1 h,$$

$$\gamma_1 = r_{11}\mathrm{sh}\tilde{k}_1 h - \frac{ha_1}{k} w_{11}\mathrm{ch}\tilde{k}_1 h, \quad \gamma_2 = r_{11}\mathrm{ch}\tilde{k}_1 h - \frac{ha_1}{k} w_{11}\mathrm{sh}\tilde{k}_1 h,$$

$$\gamma_3 = r_{12}\mathrm{sh}\tilde{k}_2 \delta - \frac{\delta a_2}{k} w_{12}\mathrm{ch}\tilde{k}_2 \delta, \quad \gamma_4 = r_{12}\mathrm{ch}\tilde{k}_2 \delta - \frac{\delta a_2}{k} w_{12}\mathrm{sh}\tilde{k}_2 \delta,$$

$$\vartheta_1 = \left[(a_1 + a_2)\mathrm{sh}\tilde{q}_2 + (a_1 - a_2)\mathrm{sh}\tilde{q}_1\right],$$

$$\vartheta_2 = \left[(a_1 + a_2)\mathrm{ch}\tilde{q}_2 - (a_1 - a_2)\mathrm{ch}\tilde{q}_1\right].$$

4. Граничные условия на торцах пластинки

Искомые функции должны удовлетворять как системе дифференциальных уравнений (26), так и граничным условиям на контуре пластинки. Граничные условия, в которых задаются компоненты перемещений точек контура, ничем не отличаются от соответствующих условий классической теории пластин. Часть же граничных условий, которая формулируется в напряжениях, получается из условий (5) путём осреднения их по толщине пластинки. Исходя из сказанного, приведём варианты граничных условий в случаях шарнирного опирания и жёсткой заделки для края $x_1 = \mathrm{const}$:

а) жёстко заделанный край:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; \tag{41}$$

б) шарнирное опирание края со свободным смещением в продольном направлении:

$$v = 0, \quad T_{11} = 0; \quad w = 0, \quad M_{11} = 0; \tag{42}$$

в) шарнирно-закрепленный край:

$$u = 0, \quad v = 0; \quad w = 0, \quad M_{11} = 0. \tag{43}$$

В (42) и (43) усилие T_{11} и изгибающий момент M_{11}, как обычно, определяются формулами:

$$T_{11} = \int_{-h}^{h} s_{11} dx_3, \quad M_{11} = \int_{-h}^{h} x_3 s_{11} dx_3.$$

Используя (5) и (24), граничные условия (42) и (43) представляются следующим образом:

шарнирное опирание края со свободным смещением в продольном направлении:

$$\begin{aligned} & v = 0, \quad 2A\left[\bar{\lambda} + 2\mu\right]\frac{\partial u}{\partial x_1} + \int_{-h}^{h} \sigma h_3 dx_3 = 0; \\ & w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \int_{-h}^{h} x_3 \sigma h_3 dx_3 = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

где D – изгибающая жёсткость пластинки, представляемая в виде

$$D = \frac{2}{3}\left[\left(\delta^3 - h^3\right)\left(\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) - \delta^3\left(\bar{\lambda}^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\right];$$

шарнирно-закрепленный край:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \int_{-h}^{h} x_3 \sigma h_3 dx_3 = 0. \tag{45}$$

В формулах (41)-(45) h_3^{α} определяется по формуле $h_3^{\alpha} = \dfrac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial_3}$, где $\varphi^{(\alpha)}$ определяется согласно (39b)-(39d).

Аналогичным образом можно рассматривать граничные условия на торце пластинки $x_2 = \text{const}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440с. (Baghdasaryan G.Y. Vibrations and stability of magnetoelastic systems. Yerevan: YSU, 1999. 440p.)(in Russian).
2. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин. //МТТ. 1992. №3. С.87-94. (Baghdasaryan

G.Y., Danoyan E.H. Stability of magnetostrictive rectangular plates in longitudinal magnetic field. //MTT. 1992, №3. P.87-94) (in Russian).
3. Багдасарян Г.Е. Математическое моделирование поведения возмущений в магнитострикционных средах. Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. №3. С 70-75. (Baghdasaryan G.Y. Mathematical modeling of perturbation behavior in magnetostrictive media. Mat. methods and Phyz.-mech. fields. 1998. vol.41. № 3, pp.70-75) (in Russian).
4. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Устойчивость магнитострикционных прямоугольных пластин в продольном магнитном поле. //Доклады НАН РА. 2015. Т.115. №3.С.218-226. (Baghdasaryan G.Y., Danoyan E.H. Stability of magnetostrictive rectangular plates in longitudinal magnetic field.// Reports of NAS RA, 2015, vol.115. №3. P.218-226.) (in Russian).
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивос–ти. М.: Физматгиз, 1961. 339с. (Bolotin V.V. Non-coservative problems of the theory of elastic stability. M.: Physmathgiz, 1961. 339p.) (in Russian).
6. Сиротин Ю.Н., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639с. (Syrotin Ju.N., Shaskolskaya M.P. Crystallophysics foundations. M.: Nauka, 1979. 639p. (in Russian).
7. Сыркин Л.Н. Пьезомагнитная керамика. Л.: Энергия, 1980. 205с. (Syrkin L.N. Piezomagnetic ceramics. L.: Energia, 1980. 205p).
8. Bagdasarian G.E.,Philiposian G.T. In: Proc. North American Conf. on Smart Structure and Materials (SPIE). USA. 1997. V. 3039. P. 715-725.
9. Brown W. F. Magnetoelastic Interactions. N. Y. Springer-Veriag. 1966. 155p.
10. Maugin G. A. Continuum mechanics of electromagnetic solids. North- Holand-Amsterdam-New-York-Oxford-Tokyo. 1988. 560p.
11. Pao Y.- H., Yen C.-S. Int. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. №4. P. 415-436.
12. Tiersten H.F. Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators.// J. of Mathem. Phis. vol. 5, 1964, №9, p.1298-1318.

Информация об авторах:

Багдасарян Геворк Ервандович – Академик НАН РА. Главный научный сотрудник Института механики НАН Армении. **E-mail:** gevorgb@rau.am
Даноян Эдвард Айказович – к.ф.м.н., доцент, факультет информатики и прикладной математики ЕГУ. **E-mail:** edan@ysu.am.

Поступила 26.10.2017