

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИЗГИБНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ В СОСТАВНЫХ СВОБОДНО ОПЁРТЫХ ПЛАСТИНАХ**

**Саноян Ю.Г.**

**Ключевые слова:** пластина, локализованные изгибные колебания, интерфейсные колебания.

**Key words:** Composite plate, localized flexural wave, interfacial waves.

**Բանալի Բառեր.** Բաղադրյալ սալ, տեղայնացված ծոման տատանումներ, ինտերֆեյսային տատանումներ.

**Sanoyan Ju.G.**

**About existence of the localized flexural waves in compound freely supported plate.**

The localized interface waves in compound rectangular plates are investigated. Edges of a plate are freely supported. For a special case, when parts of plates differ in values of Poisson' ratio and bending stiffness, the conditions of existence localized waves are established and forms waves in transition points from localized to not localized are calculated.

**Մանդյան Յու.Գ.**

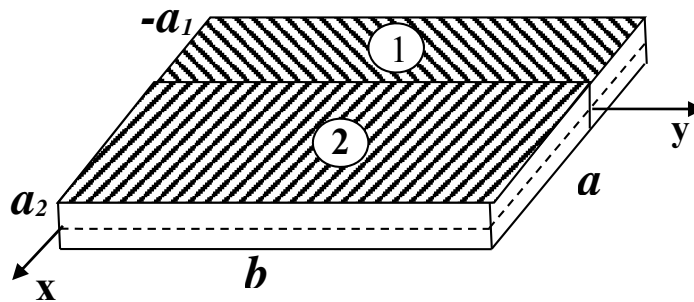
**Ազատ հենված բաղադրյալ սալերում  
տեղայնացված ծոման տատանումների գոյության մասին**

Հետազոտվել են երկու մասից բաղկացած բաղադրյալ ուղղանկյուն սալի տեղայնացված ծոման տատանումները: Սալի եզրերը ազատ հենված են: Հետազոտված են սալի տեղայնացված ծոման տատանումների առկայության պայմանները, երբ սալի մասերը տարբերվում են միայն Պուասսոնի գործակիցների, ծոման կոշտությունների և սալի չափսերի արժեքներով: Հաշվարկված են տեղայնացված և ոչտեղայնացված անցման կետերում ծոման տատանումների ձևերը.

В работе исследованы локализованные интерфейсные изгибные колебания в составных прямоугольных пластинах. Края пластины свободно опёрты. Для частных случаев, когда части пластин отличаются значениями коэффициентов Пуассона и изгибными жёсткостями, установлены условия существования локализованных колебаний в зависимости от физических параметров и размеров пластины и рассчитаны формы изгибных колебаний.

**Введение.** Первое сообщение об изгибных волнах, распространяющихся в узкой области свободного края полубесконечной полосы, и затухающих в перпендикулярном направлении, опубликовано Коненковым Ю.К. в 1960г. под названием «волны рэлеевского типа» [1]. Теоретическое исследование волновых процессов в упругой пластине-полосе постоянной ширины со свободными краями было проведено в [2]. В [3,4] эти волны получили более подходящее для них название «локализованных колебаний», которое более точно отображает их сущность, состоящую в том, что энергия волны оказывается сосредоточенной в узкой полосе вблизи края пластины. Локализованные волны могут существовать и в пластине-полосе со свободным краем и краевыми условиями жёсткой заделки и шарнирного опирания на противоположной стороне [5]. К локализованным волнам можно отнести и контактные изгибные волны в жёстко спаенных полубесконечных пластинах [6]. Волны, бегущие в узкой окрестности линии стыка, фактически состоят из двух состыкованных краевых изгибных волн. Авторами было получено дисперсионное уравнение для локализованных контактных волн и рассмотрено несколько частных случаев существования локализованных колебаний в зависимости от физических параметров частей пластины.

В [7] построены явные приближённые модели, описывающие изгибные краевые и интерфейсные (контактные) волны в полубесконечных и бесконечных пластинах с приложенными к ним соответственно к торцу и стыку нагрузками. Простые формулы для областей существования локализованных колебаний прямоугольных пластин и их графическое отображение для некоторых частных случаев приведены в [8, 9]. Показано, что решение этой задачи значительно упрощается, если области определения многомерной функции в дисперсионном уравнении заменить на многомерную поверхность, разделяющую эти области.



Фиг.1. Составная пластина в прямоугольной системе координат.

**1. Постановка задачи.** Пластина шириной  $a$ , длиной  $b$  и толщиной  $h$  расположена срединной плоскостью в координатной плоскости  $z = 0$  (фиг.1). Ось  $OY$  лежит в плоскости, разделяющей пластины на части с ширинами  $a_1, a_2$ . Вдоль границы раздела такой пластины при  $x = 0$  возможно существование интерфейсной изгибной волны из поперечных колебаний, бегущей вдоль оси  $OY$  и затухающей с ростом  $|x|$ . В рамках теории Кирхгофа уравнения, описывающие изгибные колебания частей составной пластины  $w_i$  ( $i=1,2$ ), имеют следующий вид:

$$D_1 \Delta^2 w_1 + \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (1a)$$

$$D_2 \Delta^2 w_2 + \rho_2 h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0, \quad (1b)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\rho_i$  и

$$D_i = 2E_i h^3 / (3(1 - \nu_i^2)), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

– плотности материалов и изгибные жёсткости частей пластины,  $E_i$  – модули Юнга,  $\nu_i$  – коэффициенты Пуассона. Условия шарнирного закрепления пластины состоят в равенстве нулю перемещений и изгибающих моментов на её краях

$$w_1 = 0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, x = -a_1, w_2 = 0, \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0, x = a_2 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = 0, y = 0, y = b. \quad (3b)$$

На стыке с идеальным контактом приравняем перемещения, производные перемещений по переменной  $x$ , изгибающие моменты и обобщённые перерезывающие силы [6,7]

$$w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, D_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = D_2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right)$$

$$D_1 \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right) = D_2 \left( \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \right) \text{ при } x=0. \quad (4)$$

**Решение задачи.** Решение однородных уравнений (1), удовлетворяющих крайним условиям (3), ищем как волну, бегущую вдоль оси  $Oy$ ,

$$w_1(x, y, t) = e^{i\omega t} \left( A_1 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x + a_1)p_{11}]}{\text{sh}(\lambda_n a_1 p_{11})} + C_1 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x + a_1)p_{12}]}{\text{sh}(\lambda_n a_1 p_{12})} \right) \sin(\lambda_n y), \quad (5a)$$

$$w_2(x, y, t) = e^{i\omega t} \left( A_2 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x - a_2)p_{21}]}{\text{sh}(\lambda_n a_2 p_{21})} + C_2 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x - a_2)p_{22}]}{\text{sh}(\lambda_n a_2 p_{22})} \right) \sin(\lambda_n y) \quad (5b)$$

$$\text{где } p_{11} = \sqrt{1 - \eta_1}, p_{12} = \sqrt{1 + \eta_1}, p_{21} = \sqrt{1 - \eta_2}, p_{22} = \sqrt{1 + \eta_2}, \quad (6)$$

$$\omega - \text{частота колебаний}, \lambda_n = \pi n / b, \quad (7)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D_1 \lambda_n^4}} \omega^2, \eta_2 = \kappa \eta_1, \mu = \rho_2 / \rho_1, \gamma = D_2 / D_1, \kappa = \sqrt{\mu / \gamma}. \quad (8)$$

Величина перемещений пластин  $w_i(x, y)$  в решениях (5) при допустимых значениях переменной  $x$  ограничена, что значительно облегчает и повышает точность численных расчётов. Подставляя (5) в условия (4) и используя обозначения (6-8), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$A_2 + C_2 + A_1 + C_1 = 0, \quad (9a)$$

$$A_2 p_{21} \text{cth } \alpha_2 p_{21} + C_2 p_{22} \text{cth } \alpha_2 p_{22} - A_1 p_{11} \text{cth } \alpha_1 p_{11} - C_1 p_{12} \text{cth } \alpha_1 p_{12} = 0, \quad (9б)$$

$$A_2 \gamma (p_{21}^2 - \nu_2) + C_2 \gamma (p_{22}^2 - \nu_2) + A_1 (p_{11}^2 - \nu_1) + C_1 (p_{12}^2 - \nu_1) = 0 \quad (9в)$$

$$A_2 \gamma p_{21} (p_{21}^2 - 2 + v_2) \operatorname{cth} \alpha_2 p_{21} + C_2 \gamma p_{22} (p_{22}^2 - 2 + v_2) \operatorname{cth} \alpha_2 p_{22} - \\ - A_1 p_{11} (p_{11}^2 - 2 + v_1) \operatorname{cth} \alpha_1 p_{11} + C_1 p_{12} (p_{12}^2 - 2 + v_1) \operatorname{cth} \alpha_1 p_{12} = 0 \quad (9r)$$

где  $\alpha_i = \lambda_n a_i$ . Приравнивая нулю определитель этой системы, составленный из коэффициентов при неизвестных  $A_2, C_2, A_1, C_1$ , получим дисперсионное уравнение относительно неизвестной  $\eta_1$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_{21} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{21} & p_{22} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{22} & -p_{11} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{11} & -p_{12} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{12} \\ \gamma (p_{21}^2 - v_2) & \gamma (p_{22}^2 - v_2) & p_{11}^2 - v_1 & p_{12}^2 - v_1 \\ \gamma p_{21} t_{21} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{21} & \gamma p_{22} t_{22} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{22} & -p_{11} t_{11} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{11} & -p_{12} t_{12} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{12} \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

где  $t_{21} = p_{21} - 2 + v_2$ ,  $t_{22} = p_{22} - 2 + v_2$ ,  $t_{11} = p_{11} - 2 + v_1$ ,  $t_{12} = p_{12} - 2 + v_1$ . Для составной пластины с одинаковыми значениями коэффициентов Пуассона, изгибных жёсткостей и плотностей в частях пластины, для которой  $\eta_2 = \eta_1 > 1$ , дисперсионное уравнение колебаний сводится к известному уравнению частот для шарнирно опертой пластины

$$\sin(\lambda_n a \sqrt{\eta_1 - 1}) = 0. \quad (11)$$

В остальных случаях формы колебаний в частях пластины не одинаковы из-за разницы физических параметров. Частоты колебаний составной пластины определяются функцией 6-ти переменных  $\eta_1(\alpha_1, \alpha_2, v_1, v_2, \gamma, \kappa)$  из дисперсионного уравнения (10). Для частей  $\eta_i > 1$  формы колебаний в обеих частях пластины вне окрестности стыка близки к синусоидальным. Для частей пластин с  $\eta_i \leq 1$ , для которых  $p_{11}$  и  $p_{21}$  – положительные постоянные затуханий, колебания будут локализованными.

Многомерная поверхность  $\eta_1(\alpha_1, \alpha_2, v_1, v_2, \gamma, \kappa) = 1$  (эту поверхность и формы колебаний в её точках назовём критическими) разделяет области локализованных колебаний от нелокализованных. Отклонение  $\eta_1$  от 1 увеличением или уменьшением разницы какого-либо значения физического параметра пластины без изменения других, приведёт к изменению знака коэффициента затухания и переходу колебательного процесса, соответственно, в область локализованных или нелокализованных колебаний. Перейдя в уравнении (10) к пределу при  $\eta_1 \rightarrow 1$  и используя приближения  $\operatorname{cth}(\alpha_1 p_{12}) \approx 1$  и  $\operatorname{cth}(\alpha_2 p_{22}) \approx 1$ , для достаточно больших значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (которое, как будет показано ниже, хорошо выполняется), получим уравнение критической поверхности для 5-ти переменных

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/\alpha_1 & \sqrt{2} & -1/\alpha_2 & -\sqrt{2} \\ -v_1 & 2-v_1 & -\gamma v_2 & \gamma(2-v_2) \\ (v_1-2)/\alpha_1 & \sqrt{2}v_1 & \gamma(2-v_2)/\alpha_2 & -\sqrt{2}\gamma v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

Левая часть этого выражения проще (10) и, зачастую, позволяет аналитически отделить области существования локализованных колебаний. Рассмотрим некоторые частные случаи.

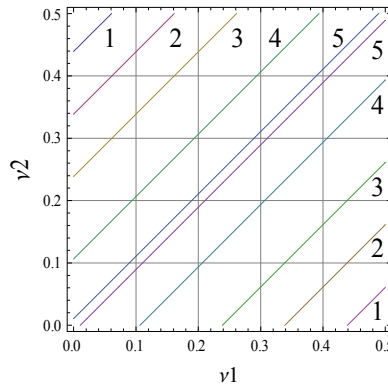
1. Для пластины с  $\gamma=1$ ,  $\kappa=1$  и  $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$  уравнение критической поверхности с переменными  $v_2, v_1, \alpha$ , можно представить в виде

$$(v_2 - v_1)^2 (1 - \sqrt{2}\alpha)^2 - 16\sqrt{2}\alpha = 0. \quad (13)$$

Для  $v_2 = v_1$ , т.е., когда обе части полностью идентичны, решением уравнения (10) будет (11). В остальных случаях уравнение (13) относительно  $v_2$  имеет решение

$$v_{2i}(v_1, \alpha) = v_1 \mp 4\sqrt{2}\alpha^2 / (1 - \sqrt{2}\alpha) \quad (14)$$

Индексам 1 и 2 соответствуют знаки минус и плюс. График (14) для заданных  $\alpha$  состоит из двух семейств прямых линий, параллельных диагонали квадрата, и находящихся соответственно ниже её для  $v_{21}$  и выше  $v_{22}$  (фиг.2).



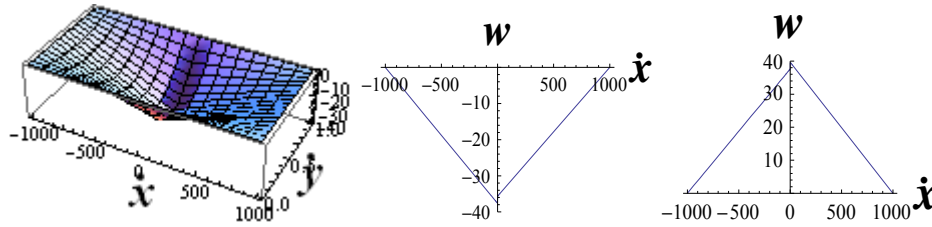
Фиг.2. График критических значений коэффициента Пуассона  $v_{2i}(v_1)$  для относительных длин частей пластин  $\alpha = 60(1), 100(2), 200(3), 1000(4), 1000000(5)$ .

Наклонные прямые ограничены предельно допустимыми значениями коэффициентов Пуассона. При увеличении ширины  $\alpha$   $v_{2i} \rightarrow v_1$ . Минимальное значение относительной ширины  $\alpha_{\min} = 46,6583$ , ниже которой локализованные колебания невозможны, получается при максимальной разнице коэффициентов

Пуассона в частях пластин  $(0, 0.5)$  и  $(0.5, 0)$ . Величина  $\alpha_{\min}$  оправдывает сделанные выше предположения относительно приближений гиперболических функций в уравнении (10). Таким образом, область определения локализованных колебаний должна удовлетворять неравенствам:

$$\begin{cases} 46.6583 \leq \alpha < \infty, \\ 0 \leq v_1 \leq 0.5 - v_{21}(0, \alpha), \\ v_{21}(v_1, \alpha) \leq v_2 \leq 0.5. \end{cases} \begin{cases} 46.6583 \leq \alpha < \infty, \\ 0.5 - v_{22}(0.5, \alpha) \leq v_1 \leq 0.5, \\ 0 \leq v_2 \leq v_{22}(v_1, \alpha). \end{cases} \quad (15)$$

Во всех остальных случаях колебания нелокализованны.



Фиг. 3. Критические формы колебаний локализованных интерфейсных волн.

Критическая форма интерфейсных колебаний и их профили вдоль оси  $y=0$  для  $\alpha = 1000$ ,  $v_1 = 0.3$ ,  $v_{21} = 0.4064$  (первые два графика) и  $v_{22} = 0.1936$  (третий график), рассчитанные по формулам (5) с точностью до постоянной, представлены на фиг.3. Форма колебаний в точках прямых, определяемых  $\alpha$  (фиг. 2), состоит из прямых линий кроме узкой окрестности стыка пластины. Изгибные колебания пластин сдвинуты по фазе на  $180^\circ$ .

2. Рассмотрим пластину, части которой отличаются коэффициентами Пуассона и размерами ширины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Уравнение критической поверхности (14) в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2} \left( 4\alpha_2 + \alpha_1 (2 + v_1 - v_2)^2 \right) + (2\alpha_1\alpha_2 + 1)(v_1 - v_2)^2 - \\ & -\sqrt{2} \left( 4\alpha_1 + \alpha_2 (2 - v_1 + v_2)^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Для  $\alpha_1 = \alpha_2$  это уравнение совпадает с (14). Решение квадратного уравнения (16) относительно переменной  $v_2$  имеет два корня при каждом значении  $v_1$ :

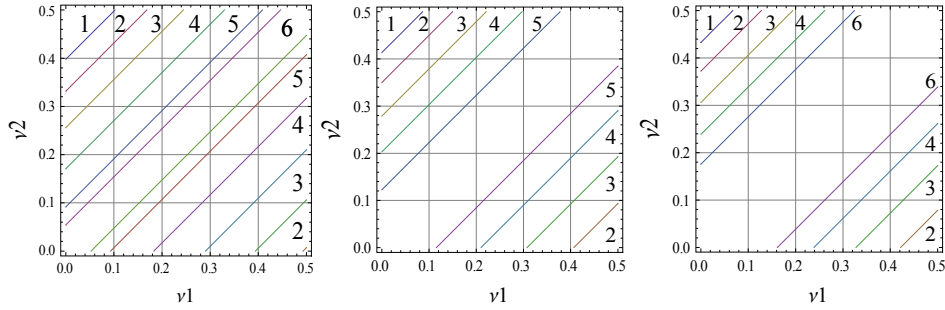
$$v_{2i}(v_1, \alpha_1, \alpha_2) = v_1 + 2\sqrt{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \mp \sqrt{\sqrt{2}(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + 2\alpha_1\alpha_2) - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 6\alpha_1\alpha_2}}{(1 - \sqrt{2}\alpha_2)(1 - \sqrt{2}\alpha_1)} \quad (17)$$

Индексу  $i=1$  соответствует знак минус,  $i=2$  — знак плюс. Замена индекса 1 на 2 означает перестановку частей пластины и не отражается на результатах вычислений.

Семейства функций  $v_{2i}(v_1, \alpha_1, \alpha_2)$  состоят из прямых линий, которые неодинаково смещены от диагонали: семейство  $v_{21}$  находится выше диагонали, а  $v_{22}$  – ниже (фиг.4). Линии обоих семейств, определяемых значениями  $\alpha_1$ , сжимаются в точку при коэффициентах Пуассона (0, 0.5) и (0.5, 0) для верхнего и нижнего семейств, определяемых формулами:

$$\alpha_{21}(\alpha_1, \Delta) = \frac{-8\sqrt{2}\alpha_1 + 4\sqrt{2}\alpha_1\Delta + \Delta^2 - \sqrt{2}\alpha_1\Delta^2}{8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\Delta + \sqrt{2}\Delta^2 - 2\alpha_1\Delta^2} \quad (18)$$

Для  $\alpha_{21} \Delta = 0.5$  и  $\alpha_{22} = -0.5$



Фиг.4. График  $v_{2i}(v_1, \alpha_1, \alpha_2)$  при  $\alpha_2 = 2000$ ,  $\alpha_1 = 400$ ,  $\alpha_1 = 200$

для  $\alpha_2 = 30$  (1), 45(2), 80(3), 200(4), 1000(5) 10000(6.)

Оба семейства разделены областью, в которой ни при каких значениях ширины пластины  $\eta \neq 1$ . Наклонные прямые, ограничивающие эти области, находятся из (17) при  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  и равны

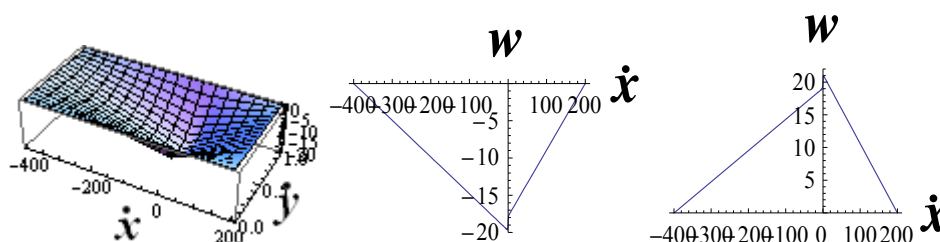
$$v_{21}^*(v_1, \alpha_1) = v_1 - 2 \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{2}\alpha_1 - 1}}{1 - \sqrt{2}\alpha_1}, \quad (19a)$$

$$v_{22}^*(v_1, \alpha_1) = v_1 - 2 \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{2}\alpha_1 - 1}}{1 - \sqrt{2}\alpha_1}. \quad (19б)$$

Таким образом, области допустимых значений локализованных колебаний для обоих семейств определяются неравенствами:

$$\left\{ \begin{array}{l} 28.991 < \alpha_1 < \infty, \\ 17.6777 < \alpha_2 < \infty \\ 0 \leq v_1 \leq 0.5 - v_{21}(v_1, \alpha_1, \alpha_2), \\ v_{21}(v_1, \alpha_1, \alpha_2) \leq v_2 \leq 0.5. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 17.6777 < \alpha_1 < \infty, \\ 28.9914 < \alpha_2 < \infty, \\ 0.5 - v_{22}(v_1, \alpha_1, \alpha_2) \leq v_1 \leq 0.5, \\ 0 \leq v_2 \leq v_{22}(v_1, \alpha_1, \alpha_2). \end{array} \right. \quad (20)$$

Графики форм колебаний для семейств прямых (17) при  $n=1$   $\nu_1 = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 400$  ( $a_1 = 127,324$ ),  $\alpha_2 = 200$  ( $a_2 = 63.662$ )  $\nu_{21} = 0.4530$  и  $\nu_{22} = 0.03989$ , рассчитанных по формулам (5) с точностью до постоянной, показаны на фиг.5.



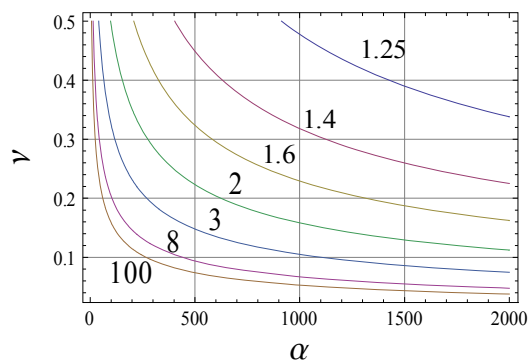
Фиг.5. Критические формы локализованных интерфейсных колебаний

Изгибные колебания обоих семейств имеют разные фазы.

3. Рассмотрим пластину, части которой отличаются только коэффициентом отношения модулей упругости  $\gamma \neq 1$ . Коэффициенты Пуассона и ширины частей обозначим через  $\nu$ ,  $\alpha$ . Решение дисперсионного уравнения (12) для критической поверхности относительно  $\nu$  имеет только одно положительное решение:

$$\nu(\alpha, \gamma) = 2 \frac{(\gamma - 1)^2 (1 - \sqrt{2\alpha}) + \sqrt{\alpha \sqrt{2} (1 - \sqrt{2\alpha})^2 (\gamma^2 - 1)^2}}{(1 - \sqrt{2\alpha})^2 (\gamma - 1)^2} \quad (21)$$

Для  $\gamma = 1$  решением системы уравнений (5) является (11). Функция  $\nu(\alpha, \gamma)$  для  $\gamma$  и  $1/\gamma$  имеет одинаковые значения и равносильна замене частей пластины. Критические кривые зависимости коэффициента Пуассона от ширины частей пластины для значений  $\gamma$ , указанных над кривыми, показаны на фиг.6 для  $\gamma > 1$ .



Фиг.6. Зависимость  $\nu(\alpha, \gamma)$  от  $\alpha$  для  $\gamma$ , указанных на фигуре.

Кривые пересекают прямую  $\nu(\alpha, \gamma) = 0.5$  в точках, определяемых формулой



$$\alpha(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2 + 2\gamma + \sqrt{1 + 14\gamma + \gamma^2}}{\gamma - 1} \right)^2. \quad (22)$$

Локализованные колебания возможны в точках  $(\nu, \alpha)$ , лежащих выше соответствующей кривой. Область допустимых значений функции (20) для локализованных колебаний определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 1 \leq \gamma < \infty, \\ \alpha(\gamma) \leq \alpha \leq \infty, \\ \nu(\alpha, \gamma) \leq \nu_2 \leq 0.5. \end{cases} \quad (23)$$

Формы изгибных колебаний в этом случае мало отличаются от двух предыдущих.

**Заключение.** В работе предложена методика определения области существования локализованных изгибных колебаний составных пластинок, в которой многомерная функция дисперсионного уравнения от физических и геометрических параметров заменяется дисперсионным уравнением от функции многомерной поверхности, разделяющей области локализованных колебаний от нелокализованных. В работе приведено решение задачи изгибных колебаний свободно опертых тонких составных пластин, состоящих из двух частей для трёх частных случаев: части пластин отличаются только коэффициентами Пуассона и размерами ширины частей и отличающихся только отношением изгибных жёсткостей пластины. Для этих случаев определены условия существования локализованных колебаний и получены графические изображения форм изгибных колебаний пластины.

В заключение автор выражает благодарность профессору Белубекяну М.В. за помощь, оказанную им при работе над статьей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю.К. Об изгибных волнах рэлеевского типа // Акустический журнал. 1960. Т.6. Вып.1. С.124-126.
2. Вешев В.А., Ключкин И.И., Коузов Д.П., Лукьянов В.Д. О распространении колебательной энергии в тонкой упругой пластине постоянной ширины // Акустический журнал. 1977. Т.23. Вып.2. С.228-233.
3. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Институт механики НАН Армении. 1997. С.79-96.
4. Белубекян М.В. Учёт поперечных сдвигов в задаче изгибных колебаний пластинки, локализованных вдоль свободной кромки // В сб.: «Оптимальное управление и прочность механических систем». Ереван: 2002. С.130-133.
5. Мкртчян А.П. Локализованные изгибные и планарные колебания упругих пластин // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат.наук. Ереван: 2005.

6. Зильберглейт А.С., Сулова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах // Акустический журнал. 1983. Т.29. Вып.2. С.186-191.
7. Каплунов Ю.Д., Косович Е.Л., Мухомодьяров Р.Р., Сорокина О.В. Явные модели распространения изгибных краевых и интерфейсных волн в тонких изотропных пластинах. //Известия Саратовского университета. 2013. Т.13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып.1, ч. 1. С.56-63.
8. Белубекян М.В., Саноян Е.Ю. Локализованные колебания в составных свободно опёртых пластинах. //Труды XVIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Том 1. Ростов-на-Дону: 7-10 ноября 2016. С. 61-64.
9. Белубекян М.В., Саноян Е.Ю., Гараков В.Г. О существовании локализованных изгибных колебаний в составных свободно опёртых пластинах// Вестник. 2016. Т.16, вып. 2. С. 9-15.

**Сведения об авторе:**

**Саноян Юрий Геворкович** – к.ф.-м.н., ст. научн. сотр. Института механики НАН Армении. Тел.: (+374 10) 541319; **E-mail.ru:** [yuriisanoyan@mail.ru](mailto:yuriisanoyan@mail.ru)

Поступила в редакцию 22.03.2017