

**РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ПОЛОСУ И СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ
ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ТРЕЩИНЫ**

Տաակյան Ա.Վ., Տարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

Ключевые слова: упругая плоскость, полоса, перпендикулярные трещины, особенность, контактные напряжения.

Key words: elastic plane, strip, perpendicular cracks, singularity, contact stresses.

Բանալի բառեր: Առաձգական հարթություն, շերտ, փոխուղղահայաց ճաքեր, եզակիություն, կոնտակտային լարումներ:

Մահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

Շերտ և համաչափ դասավորված փոխուղղահայաց ճաքեր պարունակող բաղադրյալ առաձգական հարթության հավասարակշռությունը

Դիտարկվում է երկու կիսահարթություններ և այլ նյութից շերտ պարունակող առաձգական հարթության հավասարակշռությունը: Շերտի ու կիսահարթությունների հավասար գծերի վրա և շերտի կենտրոնում կան սիմետրիկ դասավորված փոխուղղահայաց ճաքեր: Որոշված են հարթության լարվածային վիճակը և կոնտակտային լարումները:

Sahakyan A.V., Sargsyan V.G., Khachikyan A.S.

The equilibrium of the compound elastic plane, with the strip and symmetric located perpendicular cracks.

The equilibrium of the elastic plane, which is composed from the two similar half planes, joined together by the strip from the other material is considered. On the contact lines of the strip and on the center of the strip symmetric and perpendicular cracks are located. The stress station of the plane and contact stresses are determined.

Рассматривается напряжённое состояние кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из двух одинаковых полуплоскостей и полосы из другого материала. Предполагается, что она содержит три трещины конечной длины, две из которых расположены на контактных линиях полосы с полуплоскостями, а третья – перпендикулярно к ним в центральной части полосы. Расположение трещин двояко симметрично. Определено напряжённое состояние плоскости и вычислены контактные напряжения.

Введение. Определению напряжённого состояния составной плоскости, содержащей трещины, посвящено множество исследований, из которых отметим, в частности, [1-3]. Особое место занимают задачи определения напряжённого состояния составной плоскости, когда трещина или система трещин, находится на линии раздела материалов, либо перпендикулярно выходят на неё, в этой связи отметим лишь работы [4-8].

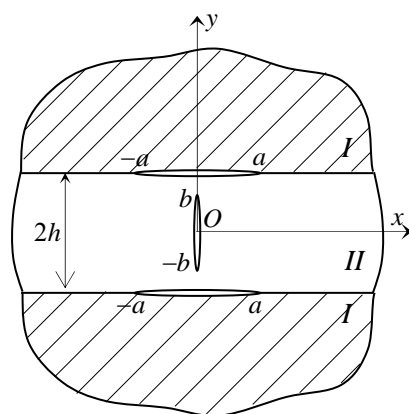
В настоящей работе рассмотрено напряжённое состояние кусочно-однородной плоскости, составленной из полосы и двух одинаковых полуплоскостей, при предположении, что на линиях контакта полосы с полуплоскостями имеются по одной трещине конечной длины, расположенных симметрично друг к другу, а также одна, перпендикулярная к линиям контакта, трещина в центральной части полосы. Исследовано взаимовлияние двух типов трещин: интерфейсной и внутренней.

Постановка задачи. Рассматривается упругая плоскость, содержащая полосу из другого материала. На линиях контакта полосы имеются две симметрично расположенные трещины длиной $2a$, а внутри полосы перпендикулярная к ним трещина длиной $2b$, которая равноудалена от концов трещин и не доходит до берегов трещин (фиг.1а). Внешние усилия в виде равномерного давления приложены к берегам трещин симметрично. В силу симметричности задачи рассматривается первая четверть плоскости (фиг.1б).

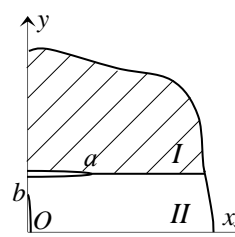
Граничные условия на линиях контакта с введением новых неизвестных в виде разности перемещений в области трещины будут

$$\begin{aligned}
 u_1 - u_2 = u, \quad v_1 - v_2 = v \quad (0 \leq x < a, y = h), \quad u = v = 0 \quad (a < x, y = h) \\
 \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad (y = h; x > 0); \\
 \tau_{xy}^{(2)} = 0, \quad u_2 = 0, \quad (b < y \leq h, x = 0), \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad u_1 = 0, \quad (x = 0, h \leq y < \infty) \\
 \tau_{xy}^{(2)} = 0, \quad v_2 = 0 \quad (y = 0, 0 \leq x < \infty)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь индексом «1» отмечены величины, относящиеся к полуплоскости, а индексом «2» – к слою.



Фиг.1а



Фиг.1б

Внешняя нагрузка в виде симметричных давлений приложена к берегам трещин

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(1)} = f_1(x) \quad (0 \leq x < a, y = h) \\
 \sigma_x^{(2)} = f_2(x), \quad (x = 0; 0 \leq y < b)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Решение задачи. Бигармоническую функцию Эри представим в виде:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y), & y > h, x > 0 \\ \Phi_2(x, y), & 0 < y < h, x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)] e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^{\infty} (A_2(x) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y B_2(x) \operatorname{sh} \lambda y) \cos \lambda x d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + \lambda_k x b_k) e^{-\lambda_k x} \cos \lambda_k y, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{h}$$

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [1], переходя к образам Фурье и удовлетворяя условиям (1) для подынтегральных коэффициентов в выражении бигармонической функции Эри, получим:

$$A_1(\lambda) = \frac{4E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left[c_1 \operatorname{sh} \lambda h (l_2 \operatorname{ch} \lambda h - l_4 \operatorname{sh} \lambda h) + \frac{c_2 l_4 - c_3 l_2}{4} (\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) + \right.$$

$$\left. + (\lambda h - e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda h) (c_2 \operatorname{ch} \lambda h - c_3 \operatorname{sh} \lambda h) \right]$$

$$B_1(\lambda) = \frac{4E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left[(c_3 - c_1 l_1 e^{-\lambda h}) \operatorname{sh} \lambda h - \frac{(c_2 - c_3) l_1}{4} (\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) - c_2 \operatorname{ch} \lambda h \right]$$

$$A_2(\lambda) = \frac{2E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left\{ c_2 e^{-\lambda h} [\lambda h e^{\lambda h} (l_4 - \lambda h l_1) + l_4 \operatorname{sh} \lambda h - 2e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda h] + \right.$$

$$\left. + c_1 [l_1 (l_4 - l_2) (\operatorname{sh} \lambda h + \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) + 2e^{-\lambda h} (l_1 (\lambda h - 1) e^{-\lambda h} + l_4 \operatorname{sh} \lambda h - l_2 \operatorname{ch} \lambda h)] + \right.$$

$$\left. + c_3 e^{-\lambda h} [\lambda h e^{\lambda h} (\lambda h l_1 - l_3) - l_2 \operatorname{sh} \lambda h + 2e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda h] \right\}$$

$$B_2(\lambda) = \frac{2E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left\{ c_1 l_1 (l_2 - l_4) \operatorname{sh} \lambda h + c_2 e^{-\lambda h} [e^{\lambda h} (l_1 \lambda h - l_4) - l_1 \operatorname{ch} \lambda h] + \right.$$

$$\left. + c_3 e^{-\lambda h} [e^{\lambda h} (l_2 - l_1 \lambda h) + l_1 \operatorname{ch} \lambda h] \right\}$$

$$\Delta(\lambda) = -\frac{1}{4} [d + 4e^{-2\lambda h} \lambda h d_4 d_3 - e^{-4\lambda h} d_4 d_5];$$

$$a_k = b_k = -\frac{1}{h\lambda_k^2} \int_0^b u_2'(y) \sin \lambda_k y dy;$$

$$d = [(1 + \nu_2) + (3 - \nu_1) E_*] [(3 - \nu_2) + (1 + \nu_2) E_*]; \quad E_* = \frac{E_2}{E_1};$$

$$d_1 = (1 - \nu_2) - (1 - \nu_1) E_*; \quad d_2 = (1 + \nu_2) + (1 - \nu_1) E_*;$$

$$d_3 = 1 + \nu_2 + (3 - \nu_1) E_*; \quad d_4 = -(1 + \nu_2) + (1 + \nu_1) E_*;$$

$$d_5 = 3 - \nu_2 - (3 - \nu_1) E_*; \quad c_1 = \frac{1}{2} \int_0^b u_2'(y) \left(y \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda h} - h \operatorname{cth} \lambda h \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda h} \right) dy;$$

$$c_2 = -\int_0^a v'(x) \sin \lambda x dx; \quad c_3 = \int_0^a u'(x) \cos \lambda x dx + \int_0^b u'_2(y) \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda h} dy + \frac{1+v_2}{2} c_1;$$

$$l_1 = [-(1+v_2) + (1+v_1) E_*] e^{-\lambda h}; \quad l_4 = (\lambda h d_4 - 2E_*) e^{-\lambda h};$$

$$l_2 = \left\{ -(1+v_2)(\lambda h - 1) + [(1-v_1) + (1+v_1)\lambda h] E_* \right\} e^{-\lambda h}$$

где $E_i, v_i (i=1, 2)$ – модули упругости и коэффициенты Пуассона составляющих плоскость материалов.

Перейдём к безразмерным величинам:

$$x = at; \quad y = b\tau; \quad a_0 = \frac{a}{h}; \quad b_0 = \frac{b}{h}; \quad (5)$$

$$\varphi(t) = u'(x) + iv'(x); \quad w(\tau) = u'_2(y).$$

Удовлетворяя условиям (2) и учитывая симметричность искомым функций относительно средних точек трещин, определяющие интегральные уравнения запишем на интервалах, занимаемых трещинами. В итоге будем иметь

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{t - \tau} + \theta \pi i \varphi(t) + \pi \int_{-1}^1 M_{11}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + \pi \int_{-1}^1 M_{12}(t, \tau) \bar{\varphi}(\bar{\tau}) d\tau +$$

$$+ \pi \int_{-1}^1 M_{13}(t, \tau) w(\tau) d\tau = \pi i f_1^*(t)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{w(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{-1}^1 K_{41}(t, \tau) w(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 M_{21}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^1 M_{22}(t, \tau) \bar{\varphi}(\tau) d\tau = f_2^*(t), \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau = 0; \quad \int_{-1}^1 w(\tau) d\tau = 0,$$

где

$$M_{11}(t, \tau) = \frac{1}{2} [K_{11}(t, \tau) + K_{21}(t, \tau) + i(K_{22}(t, \tau) - K_{12}(t, \tau))],$$

$$M_{12}(t, \tau) = -\frac{1}{2} [K_{11}(t, \tau) - K_{21}(t, \tau) + i(K_{22}(t, \tau) + K_{12}(t, \tau))],$$

$$M_{13}(t, \tau) = -K_{13}(t, \tau) - iK_{23}(t, \tau),$$

$$M_{21}(t, \tau) = \frac{1}{2} (K_{32}(t, \tau) + iK_{33}(t, \tau)), \quad M_{22}(t, \tau) = \overline{M_{21}(t, \tau)},$$

$$\begin{aligned}
M_{23}(t, \tau) &= \pi b_0 \operatorname{cth} \frac{\pi b_0}{2} (\tau - t) - \frac{2}{\tau - t} + K_{31}(t, \tau) \\
f_1^*(t) &= \frac{idf_1(at)\pi}{E_2(E_* + 1)}, \quad f_2^*(t) = \frac{d}{E_2} f_2(bt), \quad \theta = \frac{d_1}{2(E_* + 1)}, \\
K_{11}(t, \tau) &= -\frac{da_0^2}{8(E_* + 1)} \int_0^\infty G_2(\lambda) \cos a_0 \lambda t \cos a_0 \lambda \tau d\lambda, \\
K_{12}(t, \tau) &= \frac{da_0^2}{8(E_* + 1)} \int_0^\infty G_3(\lambda) \cos a_0 \lambda t \sin a_0 \lambda \tau d\lambda, \quad K_{22}(t, \tau) = K_{12}(\tau, t), \\
K_{13}(t, \tau) &= \frac{db_0}{2(E_* + 1)} \int_0^\infty \cos a_0 \lambda t G_5(\lambda, \tau) d\lambda, \\
G_5(\lambda, \tau) &= \frac{\operatorname{sh} b_0 \tau \lambda}{\Delta(\lambda) e^{2\lambda}} \left[-\frac{d_1 \operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda d_2}{2 \operatorname{sh} \lambda} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda (d_2 \operatorname{ch} \lambda + 2E_* \operatorname{sh} \lambda) (b_0 \tau \operatorname{cth} b_0 \tau \lambda - \operatorname{cth} \lambda) \right], \\
G_2(\lambda) &= -\frac{e^{-2\lambda}}{4d\Delta(\lambda)} \left[4\lambda (d_2 d + d_3 d_4 d_1) + e^{-2\lambda} d_1 (d + d_4 d_5) \right], \\
G_3(\lambda) &= G_1(\lambda) + \frac{e^{-2\lambda}}{\Delta(\lambda)}, \\
G_1(\lambda) &= \frac{e^{-2\lambda} (E_* + 1)}{d\Delta(\lambda)} \left\{ 4d_3 d_4 \lambda - 2d\lambda \frac{E_* - 1}{E_* + 1} + e^{-\lambda} \left[d \frac{E_* - 1}{E_* + 1} - d_4 d_5 \right] \right\} \\
K_{21}(t, \tau) &= \frac{da_0^2}{2\pi(E_* + 1)} \int_0^\infty G_2(\lambda) \sin a_0 \lambda t \sin a_0 \lambda \tau d\lambda, \\
K_{31}(t, \tau) &= \frac{b_0 a_0}{2} \int_0^\infty G_6(\lambda, t, \tau) d\lambda, \quad K_{32}(t, \tau) = a_0^2 \int_0^\infty F_3(\lambda, t) \cos \lambda \tau \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}, \\
K_{33}(t, \tau) &= a_0^2 \int_0^\infty F_2(\lambda, t) \sin \lambda \tau \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}, \\
G_6(\lambda, t, \tau) &= \frac{e^{-2\lambda}}{\Delta(\lambda)} \frac{\operatorname{sh} \lambda b_0 t}{\operatorname{sh} \lambda} \left\{ F_3(\lambda, \tau) \left[2 + (1 + \nu_2) \lambda (b_0 \tau \operatorname{cth} \lambda b_0 t - \operatorname{cth} \lambda) \right] + \right. \\
&\quad \left. + F_1(\lambda, \tau) (b_0 t \operatorname{cth} \lambda b_0 t - \operatorname{cth} \lambda) \right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
F_1(\lambda, \tau) &= e^{\lambda(b_0\tau-1)} d_3 \left\{ -2 + d_4(1 + \lambda(b_0\tau-1)) + e^{-2\lambda b_0\tau} [2 - d_4(1 - \lambda(b_0\tau+1))] \right\} - \\
&- e^{\lambda(b_0\tau-3)} d_4 \left\{ 2 + d_3(1 + \lambda(b_0\tau+1)) - e^{-2\lambda b_0\tau} [2 + d_3(1 + \lambda(1-b_0\tau))] \right\} \\
F_2(\tau) &= e^{-\lambda(1-b_0\tau)} [d_3(2 - \lambda(1-b_0\tau)) - 2(E_* + 1)] - \\
&- e^{-\lambda(b_0\tau+1)} [d_3(2 + \lambda(1+b_0\tau)) + 2(E_* + 1)] + \\
&+ e^{-\lambda(3-b_0\tau)} [-d_4(2 + \lambda(1+b_0\tau)) + 2(E_* - 1)] + \\
&+ e^{-\lambda(3+b_0\tau)} [-d_4(2 + \lambda(1-b_0\tau)) + 2(E_* - 1)] \\
F_3(\lambda, \tau) &= e^{-\lambda(1-b_0\tau)} [d_3(1 + \lambda(b_0\tau-1))] + 2(E_* + 1) + \\
&+ e^{-\lambda(1+b_0\tau)} [d_3(1 - \lambda(b_0\tau+1)) + 2(E_* + 1)] + \\
&+ e^{-\lambda(3-b_0\tau)} [d_4(1 + \lambda(b_0\tau+1)) + 2(1 + E_*)] + \\
&+ e^{-\lambda(3+b_0\tau)} [d_4(1 - \lambda(1-b_0\tau)) + 2(1 + E_*)]
\end{aligned}$$

Учитывая, что в уравнения системы (6) помимо основных неизвестных функций $\varphi(t)$ и $w(t)$ входит и сопряжённая с первой из них $\overline{\varphi(t)}$, систему уравнений (6) дополним третьим уравнением, являющимся сопряжённым к первому уравнению, а функцию $\overline{\varphi(t)}$ будем рассматривать как самостоятельную неизвестную.

Используя известные результаты о поведении сингулярных интегралов в окрестности конечных точек [9], найдём, что решение расширенной системы можно представить в виде

$$\varphi_k(t) = (1-t)^{\alpha_k} (1+t)^{\beta_k} \varphi_k^*(t), \quad (k=1,2,3), \quad (8)$$

где $\varphi_1(t) = \varphi(t)$; $\varphi_2(t) = \overline{\varphi(t)}$; $\varphi_3(t) = w(t)$;

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} - i\gamma; \quad \beta_1 = -\frac{1}{2} + i\gamma; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} + i\gamma; \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} - i\gamma;$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}; \quad \beta_3 = -\frac{1}{2}. \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcth}(-\theta);$$

Как явствует из этих формул, здесь приведены известные значения показателей особенности напряжений около концов интерфейсных трещин $(\alpha_i, \beta_i, i=1,2)$ и около концов внутренней трещины в полосе (α_3, β_3) .

Согласно методу механических квадратур [10], решение расширенной системы уравнений вместе с необходимыми дополнительными условиями сведём к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^n \frac{a_{km} \Phi_{km}}{x_{km} - y_{kj}} + \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^n a_{lm} H_{kl}(x_{km}, y_{kj}) \Phi_{lm} = f_k(y_{kj}) \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad (9)$$

$$\sum_{m=1}^n a_{km} \Phi_{km} = 0 \quad (k=1, 2, 3),$$

где Φ_{km} ($k=1, 2, 3$) – значения искомым функций $\Phi_k^*(t)$ в узловых точках x_{km} , являющихся корнями многочлена Якоби $P_n^{(\alpha_k, \beta_k)}(x)$. $H_{kl}(x_{km}, y_{kj})$ – значения соответствующих регулярных ядер, n – порядок аппроксимации искомым функций,

$$a_{km} = -\frac{\pi P_{n-1}^{(-\alpha_k, -\beta_k)}(x_{km})}{2 \sin \pi \alpha_k P_{n-1}^{(1+\alpha_k, 1+\beta_k)}(x_{km})}, \quad (k=1, 2, 3), \quad (m=1, 2, \dots, n),$$

y_{kj} – точки коллокации, совпадающие с корнями многочлена Якоби $P_{n-1}^{(-\alpha_k, -\beta_k)}(x)$.

После нахождения коэффициентов Φ_{km} ($k=1, 2, 3$) напряжения на линии контакта между полуплоскостью и полосой, а также на продолжении трещины в полосе можно рассчитать по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau) &= \frac{E_2(E_*+1)}{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^n \Phi_{3j} a_{3j} K_{13}(\tau, x_{3j}) - \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_{1j} \Phi_{1j}}{x_{1j} - \tau} \left(1 - \frac{q_1(\tau)}{q_1(x_{1j})} \right) - \right. \\ &- \sum_{j=1}^n a_{1j} \Phi_{1j} (iK_{12}(\tau, x_{1j}) + K_{11}(\tau, x_{1j})) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j} \Phi_{2j}}{x_{2j} - \tau} \left(1 - \frac{q_2(\tau)}{q_2(x_{2j})} \right) + \\ &+ \left. \sum_{j=1}^n a_{2j} \Phi_{2j} (iK_{12}(\tau, x_{2j}) - K_{11}(\tau, x_{2j})) \right\} \quad (\tau > 1) \\ \sigma_x(\tau) &= \frac{E_2}{2\pi} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{a_{3j} \Phi_{3j}}{x_{3j} - \tau} \left(1 - \frac{q_3(\tau)}{q_3(x_{3j})} \right) + \sum_{j=1}^n a_{3j} \Phi_{3j} K_{41}(x_{3j}, \tau) \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^n a_{1j} \Phi_{1j} M_{21}(x_{1j}, \tau) + \sum_{j=1}^n a_{2j} \Phi_{2j} M_{22}(x_{2j}, \tau) \right\}, \quad \left(1 < \tau \leq \frac{1}{b_0} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

а раскрытие трещин, с учетом (5), – по формулам [11]:

$$\int_{-1}^y \Phi_k(\xi) (1-\xi)^{\alpha_k} (1+\xi)^{\beta_k} d\xi = \sum_{m=1}^n a_{km} \Phi_{km} \left[\frac{B_{\frac{1+y}{2}}(\beta_k+1, \alpha_k+1)}{B(\beta_k+1, \alpha_k+1)} - \right.$$

$$-(1-y)^{\alpha_k+1} (1+y)^{\beta_k+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_j^{(\alpha_k, \beta_k)}(x_{km}) P_{j-1}^{(\alpha_k+1, \beta_k+1)}(y)}{2j h_{kj}} \quad (11)$$

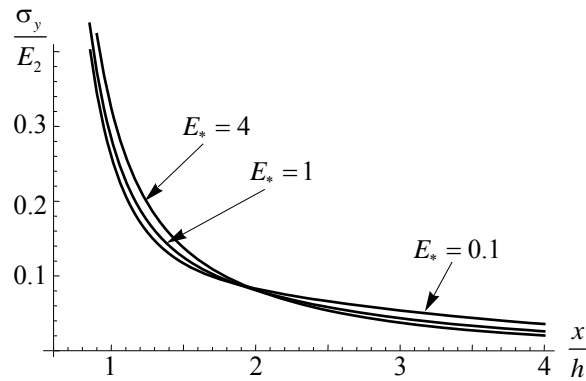
где

$$q_k(t) = \left(\frac{1}{1+t} \right)^{n+1} F \left(n+1, n+\beta_k+1; 2n+1; \frac{2}{1+t} \right),$$

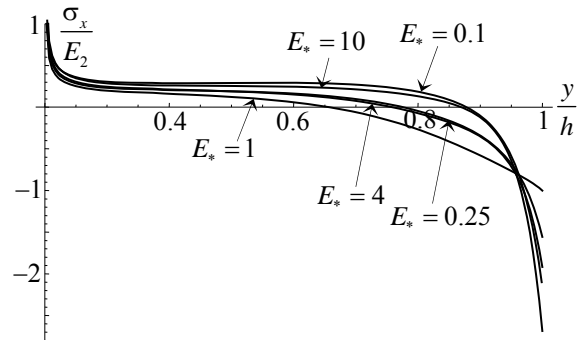
$$h_{km} = \frac{2^{\alpha_k+\beta_k+1} \Gamma(m+\alpha_k+1) \Gamma(m+\beta_k+1)}{(2m+\alpha_k+\beta_k+1) \Gamma(m+1) \Gamma(m+\alpha_k+\beta_k+1)},$$

$F(a, b; c; x)$ – гипергеометрическая функция, $B(a, b)$, $B_z(a, b)$ – полная и неполная бета-функции, $\Gamma(a)$ – гамма-функция, а a_{km} и x_{km} определены выше.

Численный анализ. Очевидно, что полученная разрешающая система линейных алгебраических уравнений (9) позволяет получить решение при самых различных значениях параметров поставленной задачи, каковыми являются относительные длины трещин a_0 и b_0 , отношение модулей упругости материалов полосы и полуплоскости E_* , коэффициенты Пуассона ν_1, ν_2 , величины нормальных нагрузок, приложенных к берегам трещин $f_1(t), f_2(t)$. При расчётах коэффициенты Пуассона принимались равными $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, внешние нагрузки предполагались равномерно распределёнными. Ниже представлены графики распределения безразмерных нормальных напряжений $\sigma_y(x)/E_2$ по линии контакта полуплоскости с полосой (Фиг.2) и напряжений $\sigma_x(y)/E_2$ на продолжении линии вертикальной трещины (Фиг.3), рассчитанные при $a_0 = 0.5$; $b_0 = 0.2$; $f_2^*(t) = 0, f_1^*(t) = -1$ для различных значений E_* .



Фиг.2. Нормальные напряжения на линии контакта

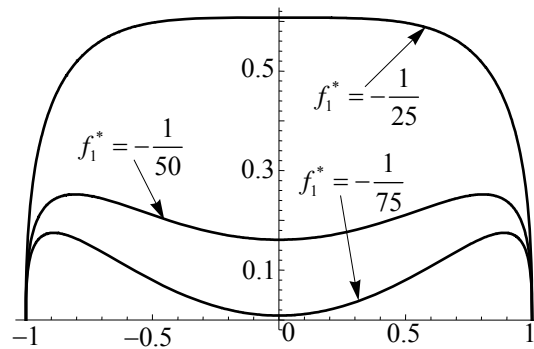


Фиг.3. Нормальные напряжения на продолжении внутренней трещины

Как видно из графиков фиг.2 и фиг.3, нормальные контактные напряжения σ_y на линии соединения полуплоскости и полосы намного меньше реагируют на изменение отношения модулей упругости материалов E_* , чем напряжения σ_x на продолжении трещины в полосе. Из фиг.3 замечаем, что перераспределение напряжения σ_x в зависимости от E_* происходит почти симметрично относительно однородного случая $E_* = 1$, причём, наибольшее отличие наблюдается при выходе на нижний берег горизонтальной трещины.

Были рассчитаны также раскрытия трещин при действии внешней нагрузки как на берегах обеих трещин, так и на берегах одной из них. Выяснено, что при действии нагрузки только на берега горизонтальной, интерфейсной, трещины раскрытия обеих трещин принимают только положительные значения и, следовательно, постановка задачи и её решение правомерны. При действии же внешней нагрузки только на берега вертикальной, внутренней, трещины, на отрезке, занимаемом горизонтальной трещиной, появляются зоны, где берега трещины выходят друг на друга. Следовательно, наличие внешней нагрузки и на берегах горизонтальной трещины необходимо.

На фиг.4 приведены графики раскрытия (разности нормальных компонент перемещений берегов) горизонтальной трещины, рассчитанные при следующих значениях параметров: $a_0 = 0.5$; $b_0 = 0.5$; $E_* = 0.2$; $f_2^*(t) = -1$; и различных значениях параметра, характеризующего нагрузку на горизонтальную трещину, $f_1^* = -0.133$; -0.02 ; -0.04 . Раскрытие вертикальной трещины носит традиционный характер и, поэтому, не приводится.



Фиг.4. Величина раскрытия берегов горизонтальной трещины

Исходя из графиков, представленных на фиг.4, можно утверждать, что для обеспечения верности решения задачи при наличии нагрузки на берегах внутренней трещины необходимо придерживаться определённого условия, налагаемого на параметр f_1^* , в качестве которого, в рассмотренном случае можно принять условие $f_1^* \geq -1/75$. Отметим, что при $E_* > 1$ берега трещины начинают смыкаться у вершин трещины.

Заключение: Детальное численное исследование напряжённого состояния составной плоскости с взаимно перпендикулярными конечными трещинами выявило достаточно сложную его зависимость от параметров задачи. В частности, выявлено, что при действии на берега внутренней трещины равномерно распределённой нагрузки, разность перемещений берегов интерфейсных трещин может менять знак, что свидетельствует об образовании новых участков контакта внутри отрезка, занимаемого трещиной, и, тем самым, искажении первоначальной постановки задачи. Указано, что для получения решения, укладывающегося в рамки исходной постановки задачи, необходимо наличие на берегах этой трещины внешней нагрузки, превосходящей определённый уровень.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576с.
2. Черепанов Г.П. О напряжённом состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. //Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. №1. С.131-137.
3. Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие упругой плоскости, содержащей полосу и симметричные трещины на линиях контакта. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.3-9.
4. Ni L., Nemat-Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: general case//Quarterly of Applied Mathematics. 1992. V.50. P.305-322.
5. Cook N.S., Erdogan F. Stresses in bounded materials with a crack perpendicular to the interface. //Int.J.Eng. Sci.-1972-10, №8.-p.677-697.
6. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин. //Доклады НАН Армении. 2002. Т.102. №1. С.29-34.

7. Агаян К.Л., Саркисян В.Г. Контактная задача упругой плоскости с трещинами, армированной бесконечными включениями. //В сб.: «Механика деформируемого твердого тела». Ереван: Изд-во АН Арм.ССР. 1993. С.63-78.
8. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А. Взаимодействие тонкого упругого включения с трещиной в кусочно-однородной плоскости. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. №3. С.12-24.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
10. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgia. Vol.156 (2011), pp.101-111.
11. Саакян А.В. Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом. //Тр. II межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, С.107-111.

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович – Доктор физ.-мат. наук, зам.директора Института механики НАН Армении,
Тел.: (37410) 568188, (37494)579348
Е-mail: avсах@mechins.sci.am

Саркисян Вардан Гарегинович – Кандидат техн.наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (37410)61-55-78

Хачикян Альберт Серобович – Кандидат физ.-мат.наук, ведущий научный сотр. Института механики.
Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (37410)74-02-89.

Поступила в редакцию 30. 05. 2017