ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №4, 2017 Механика
УДК 539.3

К ВОПРОСУ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: одномерные колебания, оптимальное управление, минимизируемый функционал.
Key words: One-dimensional vibrations, optimal control, minimized functional.
Բանալի բառեր. Միաչափ տատանումներ, օպտիմալ ղեկավարում, մինիմիզացվող ֆունկցիոնալ:

Մովսիսյան Լ.Ա.
Գլանային թաղանթի շարժման օպտիմալ ղեկավարման հարցի մասին
Դիտարկված է գլանային թաղանթի երկայնական և ընդլայնական միաչափ շարժումների օպտիմալ ղեկավարման հարցը: Որպես մինիմիզացվող ֆունկցիոնալ վերցված է փնտրվող բեռի քառակուսային ֆունկցիոնալը:

Movsisyan L.A.
To the problem of optimal control of a cylindrical shell motion
The problem of optimal control of one-dimensional motions of a cylindrical shell under longitudinal and transverse oscillations is studied separately. The quadratic functional of the given load is taken as a minimized functional.

Изучается вопрос оптимального управления одномерных движений цилиндрической оболочки при продольных и поперечных колебаниях в отдельности. В качестве минимизируемого функционала берётся квадратичный функционал от искомой нагрузки.

Введение. Вопросу оптимального управления движением тонких упругих систем (стержень, балка, пластинка, цилиндрическая оболочка) посвящены многочисленные работы [1-3 и др.]. Как правило, в рассмотренных примерах – движение однокомпонентное, в том числе, и для цилиндрической оболочки учитывается только инерционный член от прогиба. В [4] изучается задача оптимального управления одномерного движения пластинки, находящейся в нестационарном температурном поле.

В представленной работе изучается вопрос оптимального управления одномерных движений цилиндрической оболочки при продольных и поперечных колебаниях в отдельности. Хотя движения одномерные, но двухкомпонентные. В качестве минимизируемого функционала берётся квадратичный функционал от искомой нагрузки [5]. Для типично вязкоупругого тела подобная задача изучается в статической постановке.

Исследования по вопросу управления движением упругих тонких тел появились сравнительно недавно [5-11 и др.]

Постановка задачи. Уравнения одномерного движения оболочки

$$C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\quad C=\frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+C\frac{1}{R}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R}\right)=Z-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{1.1}$$

Здесь все величины общепринятые, поэтому нет нужды их напоминания, только отметим, что нормальное давление $\left(Z\right)$– искомая величина, которая обеспечивает оптимальность управления.

Рассмотрим оболочку со свободно опёртыми условиями:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty} f_m\left(t\right)\sin\lambda_m x\ ,\ u=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m\left(t\right)\cos\lambda_m x\ ,\ \lambda_m=\frac{m\pi}{l}\ . \tag{1.2}$$

Пусть заданы произвольные начальные условия $\left(t=0\right)$

$$\begin{gathered} w=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\lambda_m x\ ,\ \frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty} b_m\sin\lambda_m x\ , \\ u=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\lambda_m x\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty} d_m\cos\lambda_m x\ , \end{gathered} \tag{1.3}$$

тогда, относительно f_m и φ_m будет:

$$\frac{d^2\varphi_m}{dt^2}+\omega_m^2\varphi_m-e_m f_m=0,\quad \frac{d^2 f_m}{dt^2}+\Omega_m^2 f_m-e_m\varphi_m=A_m\ . \tag{1.4}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{gathered} \omega_m^2=\frac{1}{\rho h}C\lambda_m^4,\ \Omega_m^2=\frac{1}{\rho h}\left(D\lambda_m^4+C\frac{1}{R^2}\right) \\ e_m=\frac{1}{\rho h}C\frac{\nu}{R}\lambda_m\ ,\ A_m=\frac{1}{\rho h}q_m,\ Z=\sum_{m=1}^{\infty} q_m\sin\lambda_m x \end{gathered} \tag{1.5}$$

Решением системы (1.4) с условиями (1.3) будет

$$\varphi_m\left(t\right)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(-1\right)^{i+1}}{p_2^2-p_1^2}\left(X_i+Y_i+\int_0^t Z_i d\tau\right)$$

$$X_i=\left[e_m b_m+\left(\Omega_m^2-p_i^2\right)d_m\right]\frac{1}{p_i}\sin p_i t$$

$$Y_i=\left[d_m\left(\Omega_m^2-p_i^2\right)+e_m d_m\right]\cos p_i t$$

$$Z_i=A_m e_m\frac{1}{p_i}\sin p_i\left(t-\tau\right)$$

$$f_m\left(t\right)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(-1\right)^{i+1}}{p_2^2-p_1^2}\left(\overline{X}_i+\overline{Y}_i+\int_0^t \overline{Z}_i d\tau\right)$$

$$\bar{X}_i = \left[b_m \left(\omega_m^2 - p_i^2 \right) + e_m d_m \right] \frac{1}{p_i} \sin p_i t$$

$$\bar{Y}_i = \left[a_m \left(\omega_m^2 - p_i^2 \right) + e_m c_m \right] \cos p_i t \tag{1.6}$$

$$\bar{Z}_i = A_m \left(\omega_m^2 - p_i^2 \right) \frac{1}{p_i} \sin p_i t \left(t - \tau \right),$$

где через p_i обозначены

$$p_i^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_m^2 + \Omega_m^2 \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega_m^2 - \Omega_m^2 \right)^2 + 4 e_m^2} \,, \quad \begin{pmatrix} i = 1 - - \\ i = 2 - + \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Пусть потребуется, чтобы в какой-то момент $t = t_1$ систему привести в новое состояние посредством нормального давления q_m:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{a}_m \sin \lambda_m x \,, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{b}_m \sin \lambda_m x$$

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m \cos \lambda_m x \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{d}_m \cos \lambda_m x \tag{1.8}$$

Вопрос оптимального управления движением оболочки ставится обычным образом: систему из состояния (1.3) привести в состояние (1.8) оптимальным образом. Здесь критерием качества будем брать минимум функционала [5]

$$I = \int_0^l \int_0^{t_1} q^2 \left(x, t \right) dx dt, \tag{1.9}$$

что равносильно минимуму каждой гармоники. Искомая оптимальная нагрузка определяется как

$$q_m \left(t \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\mu_i \cos p_i t + \chi_i \sin p_i t \right) , \tag{1.10}$$

где неизвестные множители μ_i и χ_i (для каждой гармоники) определятся следующим образом. Вычислим производные от φ_m и f_m, подставляя в подынтегральные выражения (1.6) и удовлетворяя условиям (1.8). Получатся четыре линейных уравнения относительно четырёх μ_i и χ_i. Записи громоздкие, поэтому не приводятся.

Как известно, частота Ω_m на порядок меньше, чем ω_m, и во многих работах при рассмотрении колебаний цилиндрических оболочек учитывается только инерционный член от прогиба. Да и в задачах управления движением можно ставить вопрос управления одним компонентом движения (или даже только положением или скоростью). Здесь будем осуществлять управление только изгибным движением (инерционные члены от продольного движения остаются). Искомая функция оптимального управления теперь

$$q = -\frac{1}{2}\left(\chi_1 \sin p_1\tau + \mu_1 \cos p_1\tau\right). \tag{1.11}$$

Для каждой гармоники (m) приведённые формулы верны, поэтому для краткости записи индексы не вписываются.

Если (1.11) подставить в (1.6) для f и её производной и потребовать, чтобы в момент $t = t_1$ они приняли значение по (1.8)

$$f(t_1) = \bar{a}\ ,\ f'(t_1) = \bar{b}\ , \tag{1.12}$$

то полученная система даёт:

$$\begin{gathered}
\chi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \mu_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ ,\ \Delta = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} \\
\Delta_1 = \rho h\left[\left(\bar{a} - a\right)a_{22} - \left(\bar{b} - b\right)a_{12}\right] \\
\Delta_2 = \rho h\left[\left(\bar{b} - b\right)a_{11} - \left(\bar{a} - a\right)a_{21}\right] \\
a_{11} = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{p_i}A_i S_i\ ,\ a_{12} = \sum_{i=1}^{2} B_i S_i\ ,\ a_{21} = \sum_{i=1}^{2} C_1 S_i \\
a_{22} = \sum_{i=1}^{2} D_1 S_i\ ,\ S_i = \frac{1}{2}\left(\omega^2 - p_i^2\right) \\
A_i = \frac{1}{2}t_i \cos p_1 f_1\ ,\ A_2 = \frac{1}{\Delta p}\left(p_2 \sin p_1 t_i - p_1 \sin p_2 t_1\right) \\
C_1 = p_1 B_1 = -\frac{1}{2}t_1 \sin p_1\ ,\ \frac{B_2}{p_2} = \frac{C_2}{p_1} = \frac{1}{\Delta p}\left(\cos p_1 t_1 - \cos p_2 t_1\right) \\
D_1 = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{t}_1 \cos p_1 t_1 + \frac{1}{p_1}\sin p_2 t_1\right) \\
D_2 = \frac{1}{\Delta p}\left(\mathrm{p}_1 \sin p_1 t_1 - p_2 \sin p_2 t_1\right),\ \Delta p = p_2^2 - p_1^2
\end{gathered} \tag{1.13}$$

2. Аналогичную задачу предыдущей, можно поставить для движения кольца (или бесконечной оболочки). Уравнение движения в этом случае

$$\begin{gathered}
C\left(\frac{\partial \nu}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{D}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho h \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} \\
\frac{C}{R}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y^2} + \frac{1}{R}w\right) + D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $C = Eh$, $D = C\dfrac{h^2}{12}$, Z – искомая оптимальная нагрузка

Если искать решение системы (2.1) в виде

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\left(f_n^{(1)}\cos n\varphi+f_n^{(2)}\sin n\varphi\right),$$

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi_n^{(1)}\sin n\varphi+\varphi_n^{(2)}\cos n\varphi\right), \tag{2.2}$$

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\left(Z_n^{(1)}\cos n\varphi+Z_n^{(2)}\sin n\varphi\right)\ \left(y=R\varphi\right),$$

то система относительно $f_n^{(t)}$ и $\varphi_n^{(t)}$ (аналогичная для $f_n^{(2)}$ и $\varphi_n^{(2)}$) будет

$$\frac{d^2\varphi_n^{(t)}}{dt^2}+\omega_n^2-X_n^{(t)}f_n^{(t)}=0,\quad \frac{d^2 f_n^{(t)}}{dt^2}+\Omega_n^2 f_n^{(t)}-Y_n^{(t)}\varphi_n^{(t)}=q_n^{(t)}. \tag{2.3}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega_n^2=\frac{C}{\rho h}\mu_n^2,\ \Omega_n^2=\frac{1}{\rho h}\left(\frac{C}{R^2}+D\mu_n^4\right),\ X_n^{(1)}=\frac{1}{\rho hR}\mu_n\left(C+D\mu_n^2\right)$$

$$Y_n=\frac{1}{\rho hR}C\mu_n,\ q_n^{(1)}=\frac{1}{\rho h}Z_n^{(1)} \tag{2.4}$$

Собственные частоты определяются

$$p^2=\frac{1}{2}\left(\omega_n^2+\Omega_n^2\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_n^2-\Omega_n^2\right)^2+4X_n^{(1)}Y_n^{(1)}}\ .$$

Дальнейшие действия – как в предыдущем пункте.

3. Задачу управления движением для деформируемых систем можно рассматривать и в статической постановке для вязкоупругих тел, в частности, для объекта из типичного материала. Для одномерного движения имеем уравнения:

$$\widehat{E}J\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+kw\right)=Z,\ k=\frac{12\left(1-v^2\right)}{h^2R^2},J=\frac{h^3}{12\left(1-v^2\right)},$$

$$\widehat{E}f=E\left[f-\frac{E-H}{En}\int_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau\right]. \tag{3.1}$$

При получении (3.1) уже учтено, что на концах $x=0$ и $x=l$ продольное усилие отсутствует. Если представить решение (3.1) в виде

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(t)\sin\lambda_m x,\ Z=\sum_{m=1}^{\infty}Z_m(t)\sin\lambda_m x,\ \lambda_m=\frac{m\pi}{l} \tag{3.2}$$

и учесть начальное условие

$$w(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(0)\sin\lambda_m x=\sum_{m=1}^{\infty}f_m^0\sin\lambda_m x, \tag{3.3}$$

то для $f_m(t)$ получим:

$$f_m(t) = f_m^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t \Phi_m(t) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau . \tag{3.4}$$

Здесь

$$\Omega_m = \lambda_m^4 + k ,\ \Phi_m = q_m' + \frac{1}{n} q_m ,\ q_m = \frac{Z_m}{EJ\Omega_m} ,\ \alpha = \frac{H}{Eh} . \tag{3.5}$$

Если теперь из начального состояния систему привести в момент $t = t_1$ в новое состояние оптимальным образом, то искомая $\Phi(t)$ должна иметь следующий вид:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \lambda e^{\alpha t} , \tag{3.6}$$

где множитель λ определится (для каждой гармоники) из (3.4) (при $t = t_1$, $f_m = a_m$) и (3.6)

$$\lambda = 2EJ\Omega_m \frac{f_m^0 - a_m e^{\alpha t_1}}{I} ,\ I = \int_0^{t_0} e^{\alpha^2 \tau^2} d\tau , \tag{3.7}$$

а искомая q из (3.5) определится, как

$$q = (q_0 + \Lambda) e^{-\frac{1}{n} t} - \Lambda e^{\alpha t} ,\quad \Lambda = \frac{1}{2} \lambda \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^{-1} , \tag{3.8}$$

где q_0 – произвольное начальное условие. А давление Z определится по (3.5).

Заключение. Классическая задача оптимального управления движением упругой системы ставится для колебаний цилиндрической оболочки. Движения оболочки двухкомпонентные, но одномерные (продольное – нормальное, поперечное – нормальное). Вопрос оптимального управления ставится обычным образом: систему из одного состояния привести в другое при минимуме определённого функционала от нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем. // МТТ. 1999. №6. С.146-153.
2. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению колебаниям упругих систем, описанным волновым уравнением. //ПМ. 2012. №2. С.137-143.
3. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. Об оптимальном управлении и наблюдении упругих колебаний балки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. №2. Т.67. С.69-79.
4. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы. //Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №3. С.15-22.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. Короткий А.И. Обратные задачи управления систем с распределёнными параметрами. //Изв. ВУЗов. Математика. 1995. №11. С.101-124.

7. Дегтярёв Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Синтез оптимального управления в системах с распределёнными параметрами при неполном измерении состояния (обзор). //Изв. АН СССР. Кибернетика. 1983. №2. С.123-136.
8. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2014. 176 с.
9. Бутковский А.Г. Методы управления движением с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
10. Крылов Е.Ю., Папкова И.В., Салтыкова О.А. Управление колебаниями цилиндрической оболочки. Естественные и математические науки в современном мире. /В сб. статей XXVII межд. научно-практич. конф.: №2 (26). Новосибирск: 2015. С.96-101.
11. Кравцова И.В., Краско В.А. Управление хаотическими колебаниями гибких сферических оболочек. //Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С.161-172.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
Тел.: (+37410). 56821
E-mail: mechins@sci.am

Поступила 07.06.2017