ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №4, 2017 Механика

УДК 539.3

О ДИВЕРГЕНЦИИ СЖАТОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НАБЕГАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, сжимающие усилия, дестабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание.
Key words: stability, compressive forces, destabilizing effect, divergence of the panel, localized divergence, supersonic overrunning
Բանալիի բառեր՝ կայունություն, սեղմող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.
Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին, բեռնված սեղմող ուժերով: Ցույց է տրված թիթեղի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում տեղայնացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և տեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.
On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of compressed forces at the hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the compressed forces leads to the destabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

В линейной постановке исследуется зависимость форм потери статической устойчивости сжатой тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем от характера начального напряжённого состояния в предположении, что пластинка обтекается сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. Показана возможность потери устойчивости невозмущённой формы равновесия пластинки, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции в окрестности ее свободного края. Установлено, что при обтекании начальное напряжённое состояние приводит к дестабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

Введение. Как известно [1(с. 285), 2 (с. 245), 3, 4], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, намного мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

Исследованию зависимости форм потери устойчивости от характера начального напряжённого состояния пластин и оболочек как необтекаемых, так и обтекаемых, посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях и в статьях [1, 2, 5, 6–8].

В предлагаемой статье в линейной постановке исследуется задача статической устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, равномерно сжатой в одном направлении вдоль шарнирно закреплённых краёв и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.

С помощью графоаналитических методов исследования рассматриваемой задачи устойчивости установлена зависимость форм потери статической устойчивости от характера начального напряжённого состояния и от скорости обтекающего потока газа. Проведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка-поток» на область устойчивости и области статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость, соответственно, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции.

Установлено своеобразное влияние начального напряжённого состояния на невозмущённую форму равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки: начальное напряжённое состояние приводит к «скачкообразному» падению значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции, в сравнении с соответствующими значениями обтекаемой панели с ненагруженными краями [14–16].

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. При этом, пластинка сжата вдоль краёв $y = 0$ и $y = b$ сжимающими силами $N_y = 2h\sigma_y$, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1(с. 285), 2 (с. 245)].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [9, 10]:

$\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль кромок $y = 0$ и $y = b$ пластинки сжимающими силами $N_y = 2h\sigma_y$.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба сжатой тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [2 (с. 245), 4]

$$D\Delta^2 w + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2(с. 27,101)]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \text{ при } x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \ y = b; \tag{1.4}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагруженными краями $y = 0$ и $y = b$. Иными словами, требуется определить значения скорости потока газа V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2)-(1.4).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы панели, сжатой усилиями σ_y и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y)$.

Следует заметить, что в работах [17–19] в нелинейной постановке исследована задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки с нагруженными шарнирно закреплёнными краями.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка-поток» рассмотрим класс решений уравнения (1.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.2)–(1.4), в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n=\pi n b^{-1}\,, \tag{2.1}$$

где C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b; r – корни характеристического уравнения

$$r^4-2r^2+\alpha_n^3\cdot r+1-\beta_y^2=0 \tag{2.2}$$

или

$$(r^2-1)^2=-\alpha_n^3 r+\beta_y^2\,, \tag{2.3}$$

$$\alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}\,,\ \beta_y^2=N_y D^{-1}\mu_n^{-2}=2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2}\,,\ \alpha_n^3>0\,,\ \beta_y^2>0\,, \tag{2.4}$$

соответствующему дифференциальному уравнению (1.1).

Здесь параметр α_n^3 характеризует неконсервативную составляющую нагрузки, а параметр β_y^2 – консервативную составляющую нагрузки. Исследуем уравнение (2.2).

Сводя с помощью метода Феррари [11] характеристическое уравнение (2.2) к системе двух квадратных уравнений, получаем:

$$\begin{cases} r^2+\sqrt{2(q+1)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}=0,\\ r^2-\sqrt{2(q+1)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}=0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где q – параметр скорости потока газа V, являющийся действительным корнем кубического уравнения

$$8\cdot(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)-\alpha_n^6=0\,,\ \alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}\,. \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.5) следует, что корни r_i характеристического уравнения (2.3) определяются выражениями:

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)}\,, \tag{2.7}$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)}\,. \tag{2.8}$$

В соответствии с выражениями (2.7) и (2.8) общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \tag{2.9}$$

А в соответствии с соотношением (2.6), скорость потока газа V определится выражением:

$$V=2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,, \tag{2.10}$$

или

$$V=2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1}\,, \tag{2.11}$$

γ – параметр отношения ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma = ab^{-1}. \tag{2.12}$$

Как следует из выражений (2.7) и (2.8), корни r_i характеристического уравнения (2.2) могут быть как действительными, так и комплексно-сопряжёнными числами в зависимости от параметров q и β_y^2.

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.3), можно показать, что в пространстве параметров системы «пластинка-поток» среди корней r_i характеристического уравнения, определяемых выражениями (2.7), (2.8), при условии (2.6) корни r_1 и r_2 являются действительными числами, а корни $r_{3,4}$ – комплексно-сопряжёнными числами при всех значениях $0 \le \beta_y^2 \le 4/3$, $q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3, \infty\right)$ и $\beta_y^2 > 4/3$, $q \in (1, \infty)$. При этом имеем:

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0 \ \text{для всех}\ \beta_y^2 \in [0,1),\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3, \infty\right); \tag{2.13}$$

$$r_1 < 0,\ r_2 > 0 \ \text{для всех}\ \beta_y^2 \in (1, 4/3],\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3, \infty\right) \ \text{и} \tag{2.14}$$

$\beta_y^2 \in (4/3, \infty)$, $q \in (1, \infty)$;

$$r_1 < 0,\ r_2 = 0 \ \text{для}\ \beta_y^2 = 1 \ \text{и}\ q \in (1/3, \infty). \tag{2.15}$$

Как известно [3,5,12–16], необходимым условием потери статической устойчивости невозмущённого равновесия как полубесконечной пластины-полосы ($\gamma \to \infty$ или $a \to \infty$), так и достаточно широкой прямоугольной пластинки $(a \gg b)$ в форме локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x = 0$, является условие затухания на краю $x = a$:

$$\lim_{x \to a} w(x, y) = 0 \ \text{для всех}\ y \in [0, b],\ \text{когда}\ a \to \infty \ \text{или}\ a \gg b. \tag{2.16}$$

Так как для весьма широких пластинок $(a \gg b)$ и для полубесконечной пластины-полосы $(\gamma = \infty)$ в общем решении (2.9) можно, считая $C_3 = C_4 = 0$, удовлетворять только первым двум граничным условиям (1.2), то условие (2.16), очевидно, имеет место, когда

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0. \tag{2.17}$$

Следовательно, общее решение (2.9), удовлетворяющее необходимому условию локализованной неустойчивости (2.16), можно представить в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} \exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2} \exp(\mu_n r_2 x) \right) \cdot \sin(\mu_n y), \tag{2.18}$$

где r_1 и r_2 определяются выражениями (2.7).

Из соотношений (2.13) – (2.15) в соответствии с условием (2.16) очевидно , что в случае обтекаемых достаточно широких пластинок $(a \gg b)$ при значениях

$\beta_y^2 \in [0,1)$ существует возможность потери устойчивости в форме локализованной дивергенции.

При отсутствии обтекания $V=0$ ($\alpha_n^3 = 0$) характеристическое уравнение (2.2) перепишется в виде

$$(r^2-1)^2 - \beta_y^2 = 0\,. \tag{2.19}$$

Легко показать, что корни r_i характеристического уравнения (2.19) при $\beta_y^2 < 1$ определяются выражениями [1, 3, 5]

$$r_1 = -\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}\,,\; r_2 = -\sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\,,\; r_3 = \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\,,\; r_4 = \sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}\,. \tag{2.20}$$

При $\beta_y^2 = 1$ имеем

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2}\,,\;\; r_{3,4} = 0\,. \tag{2.21}$$

При $\beta_y^2 > 1$ корни r_i характеристического уравнения (2.19) будут вида [1, 3, 5]

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}\,,\quad r_{3,4} = \pm\, i\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\,. \tag{2.22}$$

Из формул (2.20)–(2.21) следует, что при отсутствии обтекания $V=0$ необходимое условие локализованной неустойчивости (2.16) выполняется, когда $\beta_y^2 < 1$, и не выполняется при значениях $\beta_y^2 \geq 1$.

Итак, при условии $V=0$, когда $\beta_y^2 < 1$, существует возможность потери устойчивости невозмущённого равновесия достаточно широкой пластинки $a \gg b$ в форме локализованной неустойчивости в окрестности точек свободного края $x=0$. При этом, в выражении общего решения (2.18) значения корней r_1 и r_2 определяются первыми двумя формулами (2.20).

Таким образом, в соответствии с выражениями (2.13) – (2.15), (2.20) из условия (2.17) следует, что при значениях $\beta_y^2 < 1$ необходимое условие локализованной неустойчивости (2.16) выполняется как для необтекаемых, так и для обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(a \gg b)$.

Отсюда следует возможность потери устойчивости невозмущённой формы равновесия необтекаемых достаточно широких пластинок в форме локализованной неустойчивости, а обтекаемых пластинок – в форме локализованной дивергенции. А также обтекаемая прямоугольная пластинка при значениях $\beta_y^2 < 1$ может потерять устойчивость и в форме дивергенции панели в зависимости от значений параметров системы.

Согласно выражениям (2.14), (2.15), (2.21) и (2.22) при значениях $\beta_y^2 \geq 1$ для необтекаемой прямоугольной пластинки существует возможность потери статической устойчивости только лишь в форме неустойчивости панели, а для обтекаемой пластинки – в форме дивергенции панели.

Необходимо заметить, что условия (2.13)–(2.15) позволяют выявить возможность потери статической устойчивости пластинки в указанных формах ранее, ещё до получения и исследования дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

3. Подставляя общее решение (2.9) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2)–(1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель приводит к следующему дисперсионному уравнению относительно параметров $q(V)$, n, γ, β_y^2, ν исходной задачи устойчивости:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) =$$

$$\sqrt{2(q+1)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2\right\}B_1B_2- \tag{3.1}$$

$$-\sqrt{2(q+1)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2\right\}B_1B_2\times$$

$$\times\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+2\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(q-1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\cdot\beta_y^2-$$

$$\left.-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2)\nu+(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1)}(q+1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$

$$+2\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+(2q^2-4q+1)(q+1)+(q-1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\beta_y^2+\right.\right.$$

$$\left.+2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2)\nu-(\mathrm{q}+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\nu^2\right]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-$$

$$\left.-\sqrt{2(q+1)}\cdot(3(q^2-1)+2\beta_y^2)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\cdot\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)=0;$$

где

$$B_1(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)}\,,\quad B_2(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)}. \tag{3.2}$$

Здесь β_y^2 – коэффициент напряжения, характеризующий сжимающие силы $N_y=2h\sigma_y$: $\beta_y^2\in[0,\infty)$; q – параметр скорости потока газа V – действительный корень кубического уравнения (2.6): $q\in\left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)$ при всех $\beta_y^2\in[0,4/3]$ и $q\in(1,\infty)$ при всех $\beta_y^2\in(4/3\,,\infty)$ в соответствии с соотношениями (2.13)–(2.15); γ – параметр отношения сторон пластинки, определяемый выражением (2.12): $\gamma\in(0,\infty)$; ν – коэффициент Пуассона.

Очевидно, что $B_1(q)>0$ и $B_2(q)>0$ при всех допустимых значениях q и β_y^2.

В уравнении (3.1) предполагается, что $\gamma \in (0, \infty)$. В соответствии с обозначением (2.12), значения $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки: при условии $\gamma = 0$ пластинка удлинённая, а при условии $\gamma = \infty$ имеем полубесконечную пластину-полосу.

Подставляя общее решение исходной задачи устойчивости в виде (2.18), в котором корни r_1 и r_2 определяются выражениями (2.7), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2}.

Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений приводит к следующему дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной дивергенции в окрестности свободного края обтекаемой полубесконечной пластинки-полосы $\gamma = \infty$:

$$F_1(q, \beta_y^2, \nu) = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 = 0\,,\ \beta_y^2 < 1\,. \quad (3.3)$$

Можно показать, что дисперсионное уравнение (3.1) для всех $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2}\,)/3, \infty\right)$, $\nu \in (0, 0.5)$, $\beta_y^2 < 1$ и n в предельном случае, в котором $\gamma \to \infty$, совпадает с уравнением (3.3):

$$\lim_{\gamma\to\infty} F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = F_1(q, \beta_y^2, \nu) = 0\,. \quad (3.4)$$

Аналогично, подставляя общее решение (2.18), в котором корни r_1 и r_2 определяются выражениями (2.20), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной неустойчивости в окрестности свободного края необтекаемой полубесконечной пластинки-полосы:

$$K_1(\beta_y^2, \nu) = \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2}\right)^2 - 2\nu\left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2}\right) - (1-\nu)^2 = 0\,,\ \beta_y^2 < 1\,. \quad (3.5)$$

Подставляя общее решение (2.9), в котором корни r_i определяются выражениями (2.20), в граничные условия (1.2)–(1.4) и, приравнивая к нулю определитель однородной системы уравнений четвёртого порядка относительно постоянных C_{nk}, получаем дисперсионное уравнение $K\left(n, \gamma, \beta_y^2, \nu\right) = 0$, характеризующее достаточное условие неустойчивости необтекаемой прямоугольной пластинки для $\beta_y^2 < 1$.

В данной работе, в силу громоздкости, описание уравнения $K\left(n, \gamma, \beta_y^2, \nu\right) = 0$ не приведено.

Необходимо отметить, что при всех $\beta_y^2 < 1$, $\gamma \ge 80$, $\nu \in (0, 0.5)$ и n уравнение $K\left(n,\gamma,\beta_y^2,\nu\right)=0$ равносильно уравнению (3.5) с точностью порядка 10^{-5}, а при значениях $\gamma < 80$ решения не имеет. Это означает, что плоская форма равновесия необтекаемой пластинки в случае, в котором $\gamma < 80$ остаётся устойчивой. А плоская форма равновесия достаточно широкой пластинки $\gamma \ge 80$ может потерять устойчивость только в форме локализованной неустойчивости при значениях $\beta_y^2 \ge \left(\beta_y^2\right)_{locinst}$, где критическое значение $\left(\beta_y^2\right)_{locinst} < 1$ является корнем уравнения (3.5). Из равносильности уравнений (3.5) и $K\left(n,\gamma,\beta_y^2,\nu\right)=0$ для всех $\gamma \ge 80$ следует, что корень уравнения $K\left(n,\gamma,\beta_y^2,\nu\right)=0$ может быть найден проще из уравнения (3.5).

Следует отметить, что при значениях коэффициента напряжения $1 > \beta_y^2 \ge \left(\beta_y^2\right)_{locinst}$ наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна и искривлённая форма равновесия, при которой изгиб пластинки локализован в окрестности свободного края пластинки.

Далее, подставляя решение (2.9), в котором корни r_i определяются выражениями (2.22), в граничные условия (1.2)–(1.4) и, приравнивая к нулю определитель однородной системы уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}, получаем дисперсионное уравнение, соответствующее неустойчивости необтекаемой прямоугольной пластинки для $\beta_y^2 > 1$, в виде [1]

$$\left(\sqrt{\beta_y^2}-1+\nu\right)^2\cdot\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\cdot\operatorname{ch}\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\right)\cdot\sin\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\right)+ \tag{3.6}$$

$$+\left(\sqrt{\beta_y^2}+1-\nu\right)^2\cdot\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\cdot\operatorname{sh}\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\right)\cdot\cos\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\right)=0,$$

$\beta_y^2 > 1$.

В таблице 1 приведены значения критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{unst} > 1$ – первого корня уравнения (3.6) при различных значениях $\gamma \le 40$, ν и $n=1$. При значениях $\beta_y^2 \ge \left(\beta_y^2\right)_{unst} > 1$ наряду с плоской формой равновесия (неизогнутая пластинка) становится возможным и искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка).

Следует отметить, что среди множества первых корней уравнения (3.6), полученных при различных n и при фиксированных значениях остальных параметров, наименьшему значению корня $\left(\beta_y^2\right)_{unst}$ соответствует $n=1$ [1].

При значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \ge \left(\beta_y^2\right)_{inst} > 1$ плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет статическую устойчивость в форме неустойчивости панели, при которой срединная поверхность пластинки «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Как следует из данных, приведённых в табл.1, критический коэффициент напряжения $(\beta_y^2)_{unst} = (N_y)_{unst} D^{-1}\mu_n^{-2}$ при умеренных значениях $\gamma \in [0.1; 40]$ зависит от коэффициента Пуассона ν и параметра γ: она больше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с возрастанием γ – убывает. При этом в случае достаточно длинных пластинок $\gamma < 0.1$ и достаточно широких пластин $\gamma > 40$ можно сказать с точностью до порядка 10^{-4}, что критический коэффициент напряжения $(\beta_y^2)_{unst}$ почти не зависит от коэффициента Пуассона ν.

Начиная, примерно, со значения $\gamma = 5$, значение критического коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{unst}$ чуть больше единицы; при дальнейшем увеличении параметра γ коэффициент $(\beta_y^2)_{unst}$ уменьшается, приближаясь к единице сверху, не достигая её. Необходимо отметить, что при значениях $\gamma > 40$ интервалы чередования корней уравнения (3.6) очень малы, примерно порядка 10^{-3} и меньше. Иными словами, разность значений $(\beta_y^2)_{unst}$, соответствующих переходам от устойчивости к неустойчивости и наоборот, является величиной порядка не более 10^{-3}.

Таблица 1

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.01	$3.2718\cdot10^7$	$3.2718\cdot10^7$	$3.2718\cdot10^7$	$3.2718\cdot10^7$	$3.2718\cdot10^7$
0.05	$5.1529\cdot10^4$	$5.1529\cdot10^4$	$5.1529\cdot10^4$	$5.1529\cdot10^4$	$5.1529\cdot10^4$
0.1	3192.25	3249.03	3249.16	3252.21	3283.29
0.3	39.693	42.251	43.564	44.896	47.615
0.5	6.1009	6.9169	7.2899	7.7841	8.7025
0.8	2.1609	2.3256	2.4025	2.5644	2.8912
1.0	1.6384	1.7424	1.7956	1.8769	2.0449
1.2	1.4161	1.4641	1.4884	1.5625	1.6907
1.5	1.2544	1.2882	1.3110	1.3456	1.4280
1.8	1.1728	1.1968	1.2102	1.2387	1.2996
2.0	1.1363	1.1577	1.1707	1.1924	1.2432
2.2	1.1130	1.1299	1.1384	1.1534	1.2012
2.5	1.0868	1.1004	1.1088	1.1257	1.1599
3.0	1.0609	1.0712	1.0774	1.0899	1.1151
5.0	1.0221	1.0281	1.0302	1.0363	1.0465
10.0	1.0056	1.0082	1.0094	1.0114	1.0144
20.0	1.0014	1.0026	1.0030	1.0035	1.0042
40.0	1.00048	1.00082	1.00092	1.00102	1.00114

Дисперсионное уравнение, соответствующее необтекаемой пластинки при значении $\beta_y^2 = 1$, имеет вид

$$(2-\nu)^2 \cdot \mathrm{sh}(\sqrt{2} \cdot \pi n\gamma) - \pi n\gamma \cdot \nu^2 \cdot \mathrm{ch}(\sqrt{2} \cdot \pi n\gamma) = 0 \,. \qquad (3.7)$$

В табл. 2 приведены значения корня $\gamma_{cr} = \gamma(n, \nu)$ уравнения (3.7) при значении $n = 1$ и некоторых значениях коэффициента Пуассона ν.

Таблица 2

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma_{cr.}$	71.62	15.60	10.22	5.97	2.87

Для всех значений коэффициента Пуассона ν, при значениях $\gamma(\nu) \geq \gamma_{cr.}(\nu)$, приведённых в табл. 2, когда $\beta_y^2 = 1$, плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет устойчивость в форме неустойчивости панели, при которой «выпучивается» вся срединная поверхность пластинки [1,5,6]. Соответственно, при значениях параметра $\gamma(\nu) < \gamma_{cr.}(\nu)$ и при всех ν плоская форма равновесия необтекаемой пластинки при $\beta_y^2 = 1$ является устойчивой.

В табл. 3 приведены значения корня $\left(\beta_y^2\right)_{locunst}$ уравнения (3.5) при различных значениях коэффициента Пуассона ν.

Начиная с значения $\gamma = \tilde{\gamma}_{cr} = 80$, при всех $\beta_y^2 \in [\left(\beta_y^2\right)_{loc.inst}, 1)$ и коэффициента Пуассона ν плоская форма равновесия необтекаемой достаточно широкой пластинки теряет устойчивость в форме локализованной неустойчивости в окрестности точек свободного края $x = 0$ пластинки, приводящая к «выпучиванию» поверхности пластинки в окрестности свободного края $x = 0$ вдоль стороны b.

Таблица 3

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\left(\beta_y^2\right)_{locinst}$	0.9998	0.9983	0.9962	0.9889	0.9567

Отметим, что устойчивость необтекаемых прямоугольных пластинок при различных граничных условиях и различных значениях отношения сторон $\gamma = a \cdot b^{-1}$ рассмотрена, в частности, в [1, 5, 6]. В статье [3] и в монографии [6], в которых рассмотрена устойчивость сжатой пластинки, соответственно, с двумя свободными краями и с одним свободным и жёстко заделанным краями, получено при значениях $\nu = 0.3$ и $\gamma = \infty$ то же значение $\left(\beta_y^2\right)_{locinst} = 0.9962$, что и в табл. 2. Это совпадение связано с локализацией прогиба $w(x, y)$ вблизи свободного края $x = 0$ пластинки при достаточно больших значениях $\gamma \geq \tilde{\gamma}_{cr} = 80$, в результате которой граничные условия на краю $x = a$ перестают оказывать влияние [5,14-16].

Таким образом, начальное напряжённое состояние необтекаемой пластинки при всех значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{inst} > 1$ (табл. 1) и $\gamma \in (0, \infty)$, а также при значении $\beta_y^2 = 1$ и всех значений $\gamma \ge \gamma_{cr.}$ (табл. 2), приводит к потере устойчивости её плоской формы равновесия в форме дивергенции панели, при котором пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

А начальное напряжённое состояние, в случае необтекаемой достаточно широкой пластинки $\gamma \ge 80$, характеризуемое коэффициентом напряжения $\beta_y^2 \ge \left(\beta_y^2\right)_{locinst}$ (табл. 3), приводит к потере устойчивости в форме локализованной неустойчивости. При этом «выпучивается» узкая полоса срединной поверхности пластинки в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки вдоль стороны b. То есть, прогиб локализуется вблизи свободного края пластинки $x = 0$.

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_y^2 = 0$ в уравнения (3.1) и (3.3) можно убедиться в их тождественности соответствующим дисперсионным уравнениям, полученных в работах [14, 15] при исследовании задач устойчивости, соответственно, обтекаемой полубесконечной пластины-полосы и прямоугольной пластинки с ненагруженными краями.

4. Перейдём теперь к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки.

Исследуем дисперсионное уравнение (3.1), при всех значениях $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, (\beta_y^2)_{inst})$, $\gamma \in (0, \infty)$ и коэффициента Пуассона ν, а также дисперсионное уравнение (3.3) при значениях $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst})$ и при всех ν, являющиеся, соответственно, достаточными признаками неустойчивости плоской формы равновесия прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины-полосы. Критические значения $\left(\beta_y^2\right)_{inst} > 1$ и $\left(\beta_y^2\right)_{locinst} < 1$ коэффициента напряжения β_y^2 приведены в табл. 1 и 3 соответственно.

При этом, в соответствии с условиями (2.13)–(2.15), параметр скорости $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2}\,)/3, \infty\right)$ при всех $\beta_y^2 \le 4/3$, а при всех $\beta_y^2 \in (4/3, \left(\beta_y^2\right)_{inst})$ имеем $q \in (1, \infty)$.

С помощью методов численного анализа найдены первые корни $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n, \gamma, \beta_y^2, \nu)$ уравнения (3.1) и единственный действительный корень $q_{\mathrm{loc}.div} = q_{\mathrm{loc}.div}(\beta_y^2, \nu)$ уравнения (3.3), соответствующие различным значениям параметров n, β_y^2, γ и ν. Оказалось, что уравнения (3.1) и (3.3) равносильны при всех $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2}\,)/3, \infty\right)$, $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst})$, $\gamma \in [2, \infty)$ и $\nu \in \left(0, 0.5\right)$:

$$q_{cr.div} = q_{\mathrm{loc}.div} = q^* . \tag{4.1}$$

Решение (4.1) существует только лишь при значениях $\beta_y^2 \in [0, 0.85]$, $\nu \in (0, 0.5)$ и $\beta_y^2 \in (0.85, 0.95)$, $\nu \in (0, 0.25)$. Отсюда следует, что, начиная с значения $\gamma = 2$, плоская форма равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции, подобной форме потери устойчивости обтекаемой полубесконечной пластины-полосы.

Необходимо отметить, что при значениях $\gamma \in [2,\infty)$, $\beta_y^2 \in (0.95,1)$ и всех ν, функции (3.1) и (3.3) на интервале $q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)$ отрицательны:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) < 0,\ F_1(q,\beta_y^2,\nu) < 0\,. \tag{4.2}$$

Из условия (4.2) очевидно следует, что плоская форма равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки при всех $\gamma \in [2,\infty)$, $\beta_y^2 \in (0.95,1)$ и всех ν, как и плоская форма равновесия полубесконечной пластины-полосы $(\gamma = \infty)$, является неустойчивой при всех значениях параметра скорости $q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)$.

Подставляя найденные значения первого корня $q_{cr.div}$ уравнения (3.1) в соотношение (2.10) и корня $q_{loc.div} = q^*$ уравнения (3.3) в соотношения (2.11), определяем с достаточной точностью значения приведённых критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) = V_{cr.div}(n,\gamma,\beta_y^2,\nu)$ при всех значениях $\beta_y^2 \in [0,(\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1,(\beta_y^2)_{inst})$, $\gamma \in (0,\infty)$, $\nu \in \left(0,0.5\right)$ и локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) = V_{\mathrm{loc}.div}(n,\beta_y^2,\nu)$ при всех $\beta_y^2 \in [0,1)$, $\nu \in \left(0,0.5\right)$.

Критические скорости $V_{cr.div}$ разграничивают области устойчивости и дивергентной неустойчивости невозмущённой формы равновесия прямоугольной пластинки в форме дивергенции панели при всех $\gamma \in [0,\infty)$, $\nu \in \left(0,0.5\right)$ и $\beta_y^2 \in [0,(\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1,(\beta_y^2)_{inst})$.

Критические скорости $V_{\mathrm{loc}.div}$ разграничивают области устойчивости и дивергентной неустойчивости как прямоугольной пластинки при всех $\gamma \geq 2$, $\beta_y^2 \in [0,0.95)$, $\nu \in \left(0,0.5\right)$, так и полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$) при всех $\beta_y^2 \in [0,95)$, $\nu \in \left(0,0.5\right)$ в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$.

При значениях скоростей потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит плавное изменение формы пластинки: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания», а при скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div}$ «выпучивается» узкая полоса вдоль стороны b в окрестности свободного края $x = 0$ полубесконечной пластины-полосы.

Численные исследования уравнений (3.1) и (3.3) показали, что при любых n, $\beta_y^2 \in [0,(\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1,(\beta_y^2)_{inst})$, $\gamma \in [0,\infty)$ и $\nu \in (0, 0.5)$ наименьшие значения приведённых критических скоростей $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ и $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ соответствуют значению $n=1$, так что вдоль стороны b всегда образуется одна полуволна.

Ограниченность объёма статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. В табл. 4–8 представлены численные результаты решения задачи устойчивости прямоугольной пластинки (1.1)–(1.4), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости приведённых критических скоростей локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл. 4) и дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл. 5–8) от существенных параметров системы «пластинка-поток», соответствующих значению $n=1$.

Таблица 4

$\tilde{\beta}_y^2$ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00	324.761	173.371	149.854	120.741	77.398
$1\cdot 10^{-4}$	315.780	169.907	143.878	114.922	76.865
$1\cdot 10^{-2}$	289.523	168.325	142.374	113.390	75.732
0.10	267.024	160.853	131.075	106.909	72.643
0.20	249.954	146.091	125.277	95.056	71.283
0.30	229.367	132.122	117.723	86.243	57.706
0.40	207.652	115.081	99.107	78.311	47.424
0.50	183.146	103.084	87.564	67.196	43.956
0.60	152.743	86.676	71.532	53.324	34.241
0.70	124.604	68.526	57.471	41.562	27.147
0.80	95.948	53.077	42.506	30.817	26.152
0.85	82.261	37.475	33.923	28.162	–
0.90	60.942	32.161	29.851	–	–
0.95	41.193	31.753	–	–	–

В таблице 4 приведены значения критической скорости локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ при некоторых значениях $\beta_y^2 = \tilde{\beta}_y^2 \in [0, 0.95]$, $\gamma \in [2,\infty)$ и $\nu \in (0, 0.5)$.

В соответствии с соотношениями (2.11) и (3.3) приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ зависит от коэффициента напряжения $\tilde{\beta}_y^2$ и коэффициента Пуассона ν.

Как следует из данных, приведённых в таблице 4, при значениях $\tilde{\beta}_y^2 < 0.9$ и $\nu \in (0, 0.5)$ критическая скорость локализованной дивергенции

$V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с возрастанием коэффициента напряжения $\tilde{\beta}_y^2$ – убывает.

В силу условия (4.2) при всех значениях параметров $\beta_y^2 \in (0.9,1)$, $\gamma \in [2,\infty)$ и $\nu \in \left(0.125, 0.5\right)$ при обтекании плоская форма равновесия прямоугольной пластинки «мгновенно» теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции: происходит «скачкообразный рост» коэффициента напряжения β_y^2 от 0.956 до 0.999. Как показали численные исследования, пластинка остаётся неустойчивой в форме локализованной дивергенции и далее, при всех допустимых значениях скорости V обтекающего потока газа – значениях скорости, соответствующих интервалу $q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2}\,)/3\,,\infty\right)$, пока $\beta_y^2 < 1$.

Из сопоставления данных табл. 3 и 4 следует, что критические значения коэффициента напряжения $\beta_y^2 = \left(\beta_y^2\right)_{locinst}$, найденные при отсутствии обтекания (табл. 3), оказываются больше, примерно на 14%, чем критические значения $\beta_y^2 = (\tilde{\beta}_y^2)$, найденные при обтекании пластинки потоком газа (табл. 4). А критические скорости локализованной дивергенции $V_{\mathrm{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ уменьшаются примерно в четыре раза с ростом коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 0$ до $\beta_y^2 = 0.9$. Это указывает на существенную дестабилизацию состояния плоской формы равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, у которой $\gamma \geq 2$, при наличии начального напряжённого состояния, пока коэффициент напряжения $\beta_y^2 < 1$.

Таблица 5

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00001	$0.3562 \cdot 10^{-8}$	$0.2949 \cdot 10^{-8}$	$0.2767 \cdot 10^{-8}$	$0.2455 \cdot 10^{-8}$	$0.1957 \cdot 10^{-8}$
0.0001	$0.3562 \cdot 10^{-6}$	$0.2949 \cdot 10^{-6}$	$0.2767 \cdot 10^{-6}$	$0.2455 \cdot 10^{-6}$	$0.1957 \cdot 10^{-6}$
0.001	$0.3562 \cdot 10^{-4}$	$0.2949 \cdot 10^{-4}$	$0.2767 \cdot 10^{-4}$	$0.2455 \cdot 10^{-4}$	$0.1957 \cdot 10^{-4}$
0.01	$0.3562 \cdot 10^{-2}$	$0.2949 \cdot 10^{-2}$	$0.2767 \cdot 10^{-2}$	$0.2455 \cdot 10^{-2}$	$0.1957 \cdot 10^{-2}$

В случае достаточно длинных пластинок $\gamma < 0.1$ приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ не зависит от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in (0,(\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1,25)$, а зависит только от коэффициентов γ и ν: при всех значениях $\beta_y^2 \in [0,(\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1,25)$ она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν и убывает с уменьшением γ, устремляясь к нулю при $\gamma \to 0$ (табл. 5).

Из сопоставления значений критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, приведённых в табл. 5, с результатами, полученными в работах [15,16] при исследовании устойчивости обтекаемой ненагруженной пластинки, следует, что при всех $\gamma \le 0.1$ и $\beta_y^2 \in [0,(\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1,25)$ критические скорости дивергенции панели с точностью порядка 10^{-8} равны соответствующим значениям критической скорости дивергенции панели с ненагруженными краями $(\beta_y^2 = 0)$.

Итак, в случае достаточно длинных пластинок, у которых $\gamma < 0.1$, пока коэффициент напряжения $\beta_y^2 < 25$, наличие начального напряжённого состояния не оказывает влияние на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой пластинки для всех $\nu \in (0, 0.5)$.

А при значениях $\beta_y^2 \in [25,(\beta_y^2)_{inst})$ обтекание приводит к «скачкообразному» («мгновенному») увеличению коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 25$ до значения $\beta_y^2 = (\beta_y^2)_{inst}$ более чем в 130 раз (табл.1) для всех $\nu \in (0.125, 0.5)$. В силу этого, пластинка, будучи до обтекания устойчивой, при обтекании «мгновенно» теряет устойчивость в форме дивергенции панели: плоская форма равновесия пластинки «мгновенно» становится «изогнутой».

Однако, как показали численные исследования, при скоростях потока газа, примерно $V \ge V_{stab.} \approx 76.12 \cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$, неустойчивая плоская форма равновесия достаточно длинной прямоугольной пластинки $(\gamma < 0.1)$ становится устойчивой: изогнутая пластинка становится плоской.

В случае прямоугольной пластинки умеренных размеров $\gamma \in (0.1, 2)$ при значениях $\beta_y^2 \in [0,1)$ и всех значениях коэффициента Пуассона плоская форма равновесия пластинки при скоростях потока газа $V \ge \tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

Значения $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ приведены в табл. 6 и 7.

Как следует из данных табл. 6 и 7, приведенная критическая скорость дивергенции панели $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от параметров γ, β_y^2 и ν: она возрастает с ростом γ, убывает с увеличением $\beta_y^2 \in [0,1)$ и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν.

В табл. 6 и 7, значения критической скорости $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, взятые в фигурные скобки, соответствуют, соответственно, значениям коэффициента Пуассона ν: 0.125, 0.25, 0.3, 0.375, 0.5.

Так как при всех $\beta_y^2 \in [0, 0.95)$ и $\gamma \ge 2$ плоская форма равновесия пластинки теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции, то отсюда следует, что значение $\gamma = 2$ является границей перехода от одной формы неустойчивости к другой – от дивергенции панели к локализованной дивергенции, пока коэффициент напряжения не слишком велик: $\beta_y^2 < 1$.

Таблица 6

γ \ β_y^2	0.00	0. 01	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	{0.3562, 0.2949, 0.2767, 0.2455, 0.1955}	{0.3556, 0.2948, 0.2766, 0.2454, 0.1954}	{0.3525, 0.2944, 0.2757, 0.2451, 0.1948}	{0.3513, 0.2942, 0.2754, 0.2449, 0.1946}	{0.3489, 0.2940, 0.2752, 0.2448, 0.1944}	{0.3473, 0.2939, 0.2750, 0.2447, 0.1942}
0.3	{3.820, 3.299, 3.080, 2.760, 2.223}	{3.808, 3.288, 3.074, 2.754, 2.214}	{3.759, 3.234, 3.025, 2.702, 2.166}	{3.643, 3.127, 2.921, 2.592, 2.067}	{3.527, 3.015, 2.804, 2.493, 1.961}	{3.415, 2.914, 2.783, 2.379, 1.852}
0.5	{14.95, 13.52, 11.96, 10.78, 9.06}	{13.88, 12.42, 11.51, 10.57, 8.19}	{13.20, 11.92, 11.04, 10.12, 7.79}	{12.92, 11.32, 10.21, 8.77, 5.41}	{12.36, 10.20, 9.44, 8.39, 6.28}	{10.99, 9.23, 8.44, 7.41, 5.45}
0.8	{80.47, 60.09, 54.32, 46.75, 35.95}	{79.56, 59.23, 53.30, 45.88, 33.56}	{71.50, 54.73, 48.86, 42.72, 22.73}	{59.31, 46.39, 41.87, 35.95, 25.29}	{48.83, 38.67, 34.94, 29.92, 21.82}	{39.63, 31.33, 28.16, 23.62, 16.57}
1.0	{522.80, 157.17, 126.42, 101.74, 70.21}	{520.33, 155.40, 124.71, 99.37, 68.44}	{516.25, 139.65, 115.82, 93.08, 65.17}	{504.51, 105.49, 90.61, 73.78, 52.25}	{122.12, 81.60, 71.40, 59.57, 41.26}	{82.09, 61.20, 53.67, 43.66, 29.92}
1.2	{613.51, 320.02, 257.83, 194.87, 133.24}	{609.32, 313.09, 249.79, 191.98, 127.92}	{583.17, 288.88, 222.77, 176.87, 122.07}	{546.92, 217.80, 178.67, 137.43, 95.07}	{457.67, 158.08, 134.04, 88.98, 72.25}	{176.02, 107.35, 92.74, 75.44, 51.70}
1.5	{980.85, 595.80, 497.87, 388.36, 269.25}	{962.21, 589.82, 482.37, 374.96, 258.99}	{915.84, 542.89, 456.90, 360.79, 247.37}	{788.08, 445.92, 377.05, 283.59, 194.75}	{683.91, 341.43, 268.63, 219.57, 142.03}	{498.06, 231.18, 181.13, 147.35, 100.98}

Таблица 7

γ \ β_y^2	0.8	0.9	0.95	0.97	0.99
0.1	$\begin{Bmatrix} 0.3458 \\ 0.2938 \\ 0.2748 \\ 0.2446 \\ 0.1941 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3452 \\ 0.2937 \\ 0.2745 \\ 0.2445 \\ 0.1940 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3451 \\ 0.2936 \\ 0.2742 \\ 0.2444 \\ 0.1939 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3449 \\ 0.2935 \\ 0.2738 \\ 0.2443 \\ 0.1937 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3446 \\ 0.2933 \\ 0.2736 \\ 0.2442 \\ 0.1935 \end{Bmatrix}$
0.3	$\begin{Bmatrix} 3.361 \\ 2.849 \\ 2.642 \\ 2.328 \\ 1.803 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.302 \\ 2.790 \\ 2.587 \\ 2.272 \\ 1.746 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.271 \\ 2.762 \\ 2.556 \\ 2.244 \\ 1.720 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.259 \\ 2.752 \\ 2.548 \\ 2.235 \\ 1.710 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.251 \\ 2.742 \\ 2.537 \\ 2.225 \\ 1.701 \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 10.55 \\ 8.71 \\ 8.09 \\ 6.84 \\ 5.08 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.13 \\ 8.35 \\ 7.61 \\ 6.50 \\ 4.71 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.01 \\ 8.05 \\ 7.19 \\ 6.33 \\ 4.55 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 9.67 \\ 7.95 \\ 7.27 \\ 6.28 \\ 4.38 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 9.54 \\ 7.85 \\ 7.20 \\ 6.17 \\ 4.38 \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 34.86 \\ 27.33 \\ 25.39 \\ 20.81 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 30.42 \\ 24.35 \\ 21.65 \\ 18.09 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 28.74 \\ 22.47 \\ 20.38 \\ 16.46 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 27..77 \\ 21.75 \\ 19.78 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 27..54 \\ 21.16 \\ 18.81 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.0	$\begin{Bmatrix} 68.09 \\ 50.47 \\ 44.30 \\ 40.39 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 54.99 \\ 41.53 \\ 36.91 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 48.71 \\ 37.09 \\ 32.70 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 47.68 \\ 35.43 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 45.02 \\ 34.12 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix} 126.17 \\ 85.71 \\ 73.42 \\ 60.30 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 112.47 \\ 66.46 \\ 56.84 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 102.70 \\ 56.64 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 73.43 \\ 35.32 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 69.33 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.5	$\begin{Bmatrix} 318.14 \\ 170.34 \\ 143.40 \\ 117.39 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 180.60 \\ 119.28 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 142.62 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 128.23 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 115.16 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$

При значениях $\beta_y^2 \in (0.95,1)$ и $\gamma \geq 2$ плоская форма равновесия необтекаемой пластинки, являясь неустойчивой в форме локализованной неустойчивости, остаётся такой же и при обтекании, пока $\beta_y^2 < 1$. А при значениях $\beta_y^2 \geq 1$ значение $\gamma = 2$ является границей обратного перехода от одной формы неустойчивости к другой –

перехода от локализованной неустойчивости к неустойчивости в форме дивергенции панели.

Таблица 8

$\tilde{\tilde{\beta}}_y^2$ / γ	1.00	1.1025	1.21	1.2544	1.2996	1.3225	1.44	2.25
0.1	$\begin{Bmatrix} 0.3445 \\ 0.2932 \\ 0.2734 \\ 0.2440 \\ 0.1934 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3441 \\ 0.2930 \\ 0.2733 \\ 9.2438 \\ 0.1929 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3437 \\ 0.2928 \\ 0.2731 \\ 9.2434 \\ 0.1923 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3432 \\ 0.2926 \\ 0.2728 \\ 9.2430 \\ 0.1918 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3428 \\ 0.2924 \\ 0.2725 \\ 9.2428 \\ 0.1914 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3425 \\ 0.2922 \\ 0.2721 \\ 9.2425 \\ 0.1908 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3415 \\ 0.2918 \\ 0.2717 \\ 9.2423 \\ 0.1906 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3361 \\ 0.2841 \\ 0.2639 \\ 9.2419 \\ - \end{Bmatrix}$
0.2	$\begin{Bmatrix} 1.3946 \\ 1.1812 \\ 1.1166 \\ 0.9906 \\ 0.7748 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.3889 \\ 1.1780 \\ 1.1009 \\ 0.9806 \\ 0.7656 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.3859 \\ 1.1731 \\ 1.0896 \\ 0.9629 \\ 0.7542 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.3794 \\ 1.1682 \\ 1.0748 \\ 0.9524 \\ 0.7402 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.3743 \\ 1.1641 \\ 1.0724 \\ 0.9425 \\ 0.7373 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.3703 \\ 1.1507 \\ 1.0714 \\ 0.9322 \\ 0.7307 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
0.3	$\begin{Bmatrix} 3.218 \\ 2.733 \\ 2.537 \\ 2.232 \\ 1.688 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.159 \\ 2.659 \\ 2.443 \\ 2.132 \\ 1.605 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.105 \\ 2.578 \\ 3.382 \\ 2.074 \\ 1.493 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.071 \\ 2.563 \\ 2.343 \\ 2.056 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.005 \\ 2.518 \\ 2.341 \\ 1.992 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.004 \\ 2.501 \\ 2.326 \\ 1.943 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
0.4	$\begin{Bmatrix} 5.922 \\ 4.939 \\ 4.592 \\ 3.919 \\ 2.920 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.791 \\ 4.821 \\ 4.292 \\ 3.726 \\ 2.738 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.498 \\ 4.459 \\ 4.091 \\ 3.573 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.414 \\ 4.441 \\ 3.997 \\ 3.485 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.347 \\ 4.386 \\ 3.998 \\ 3.426 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.319 \\ 4.343 \\ 3.971 \\ 3.389 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 9.643 \\ 7.815 \\ 7.494 \\ 6.082 \\ 4.308 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 8.961 \\ 7.273 \\ 6.634 \\ 5.692 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 8.460 \\ 6.695 \\ 5.784 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 8.227 \\ 5.725 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.864 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 26.81 \\ 21.21 \\ 18.52 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 22.86 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$

Как следует из данных, приведённых в табл. 6 и 7, критическая скорость дивергенции панели $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ уменьшается примерно в 1,5 – 2 раза при увеличении коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 0$ до $\beta_y^2 = 0.99$ и всех $\gamma < 1$. При значениях $\gamma \in [1,2)$ и $\beta_y^2 \in (0.95,1)$ обтекание приводит к «скачкообразному» увеличению коэффициента напряжения до значений, больших критического значения $(\beta_y^2)_{inst.}$ (табл. 1). Вследствие этого, плоская форма равновесия пластинки, будучи устойчивой до обтекания, при обтекании «мгновенно» теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

Значения приведённой критической скорости дивергенции панели $\tilde{\tilde{V}}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ при некоторых значениях $\beta_y^2 \in [1,(\beta_y^2)_{inst.})$ и $\gamma \in [0.1, 0.8]$ даны в табл. 8.

Как видно из таблицы 8, приведённая критическая скорость $\tilde{\tilde{V}}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ дивергенции панели возрастает с ростом $\gamma \in (0.1, 0.5)$, убывает с возрастанием коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [1,(\beta_y^2)_{inst.})$ и становится меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν.

Из сопоставления данных, приведённых в табл. 1, 6 (столб. 1) и 8, следует, что при всех $\gamma \in (0.1, 0.8]$, $\beta_y^2 \in [1, 2.25]$ обтекание приводит к «скачкообразному» росту коэффициента напряжения в 2.5–30 раз. Вследствие этого, критическая скорость дивергенции панели $\tilde{\tilde{V}}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ «скачкообразно» уменьшается в 1.5–2 раза при значениях $\gamma \in (0.1, 0.5)$ и $\nu \in (0, 0.5)$, в сравнении с критической скоростью дивергенции панели с ненагруженными краями, а при значениях $\gamma \in (0.1, 0.5)$, $\beta_y^2 > 1.3225$, $\nu \in (0, 0.5)$ и $\gamma \in [0.5, 0.8)$, $\beta_y^2 > 1.21$, $\nu > 0.25$ при обтекании происходит «мгновенная» потеря устойчивости плоской формы равновесия прямоугольной пластинки в форме дивергенции панели.

Из проведённых численных исследований следует, что при всех $\gamma \geq 0.8$, $\beta_y^2 \geq 1$ и $\nu > 0.125$ обтекание приводит к «мгновенной» потере устойчивости плоской формы равновесия пластинки в форме дивергенции панели.

Однако, после «мгновенной» потери устойчивости при обтекании при значениях параметров $\beta_y^2 \in [25,(\beta_y^2)_{inst.})$, $\gamma \in (0, 0.1)$ и $\beta_y^2 \in [1, 2.25]$, $\gamma \in [0.1, 0.8]$, при скоростях потока газа $V \geq V_{stab.}$ искривлённая форма равновесия пластинки вновь становится плоской. При остальных значениях параметров задачи после «мгновенной» потери устойчивости плоской формы равновесия обтекание не приводит к стабилизации, т.е. $V_{stab.} = \infty$.

Таким образом, как следует из сопоставления полученных результатов с результатами работ [14–16], начальное напряжённое состояние оказывает существенное дестабилизирующее влияние на устойчивость плоской формы равновесия прямоугольной пластинки, обтекаемой свехзвуковым потоком газа.

Значения $V_{stab.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) = V_{stab.}(\beta_y^2, \gamma, \nu)$ приведены в табл. 9.

Таблица 9

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma < 0.1$, $\beta_y^2 \geq 25$	76.12	76.12	76.12	76.12	76.12
$\gamma = 0.1$, $\beta_y^2 > 4$	77.55	77.61	77.65	77.69	77.75
$\gamma = 0.2$, $\beta_y^2 > 1.3225$	81.50	82.11	82.53	82.88	83.56
$\gamma = 0.3$, $\beta_y^2 > 1.3225$	87.31	88.32	88.93	90.02	91.10
$\gamma = 0.4$, $\beta_y^2 > 1.3225$	97.94	102.33	103.87	106.78	109.04
$\gamma = 0.5$, $\beta_y^2 > 1.2544$	113.99	117.36	119.85	122.50	127.73
$\gamma = 0.6$, $\beta_y^2 > 1.21$	131.42	139.59	145.13	153.58	168.01
$\gamma = 0.7$, $\beta_y^2 > 1.1025$	151.83	171.42	183.57	200.20	∞
$\gamma = 0.8$, $\beta_y^2 > 1.1025$	188.58	225.41	249.39	∞	∞

Наиболее ярко эффект дестабилизации проявляется при следующих значениях параметров β_y^2 и γ: $\beta_y^2 \in [25, (\beta_y^2)_{inst.})$, $\gamma \in (0, 0.1]$ и $\beta_y^2 \in [1, 2.25]$, $\gamma \in (0.1, 0.8]$. При этих значениях параметров пластинка, будучи устойчивой до обтекания, при обтекании «мгновенно» теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

В рассмотренном примере явления дестабилизации и стабилизации вполне объяснимы сложным взаимодействием консервативной и неконсерватиной составляющих нагрузки, действующей на пластинку в сверхзвуковом потоке газа.

5. Основные результаты. В работе на примере обтекаемой сверхзвуковым потоком газа сжатой упругой прямоугольной пластинки со свободным краем проиллюстрировано своеобразное влияние начального напряжённого состояния на устойчивость невозмущённого состояния равновесия пластинки.

Определены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия теряет статическую устойчивость в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции в зависимости от параметров системы «пластинка-поток» в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка-поток» на области устойчивости и статической неустойчивости. Исследована граница области устойчивости.

Определены условия, позволяющие выявить возможность потери статической устойчивости пластинки в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции ранее, ещё до получения и исследования дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, разграничивающие области устойчивости и статической неустойчивости, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции.

Показана существенная дестабилизирующая роль начального напряжённого состояния на устойчивость плоской формы равновесия пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

Результаты работы могут быть использованы при исследовании задач панельного флаттера в нелинейной постановке [17–19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329 с.
3. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С.38–46.
4. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
5. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. М.: Наука, Физматлит, 1995. 320 с.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
7. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
8. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122.
9. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755.
10. Ashley G. H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P.1109–1118.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832 с.
12. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С.124–126.
13. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности». Ереван: Изд-во ЕГУ. 1997. С. 95–99.
14. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Дивергентная неустойчивость прямоугольной пластинки при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край.// Тр. VIII Международной научной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис–Степанакерт (Армения), 2014, сентябрь 22-25, с. 98–103.
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12 - 42.
17. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. № 1. С. 92–98.

18. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38.
19. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер нелинейных колебаний гибких пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа.// Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. № 4. С. 20–40.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,
Тел.: (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,
Тел.: (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 20. 06. 2017