

**ПЕРЕДАЧА НАГРУЗОК ОТ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА КОНЕЧНЫХ
СТРИНГЕРОВ К УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПОСРЕДСТВОМ
ЛИПКИХ СДВИГОВЫХ СЛОЁВ**

Керопян А.В., Саакян К.П.

Ключевые слова: контакт, стрингер (накладка), упругая полуплоскость, бесконечная пластина, липкий слой, система интегральных уравнений, операторное уравнение.

Keywords: contact, stringer (overlay), elastic half-plane, infinite sheet, adhesive layer, system of integral equations, operator equation.

Բանալի բառեր. կոնտակտ, ստրինգեր, առաձգական կիսահարթություն, անվերջ սալ, կաշտոն շերտ, ինտեգրալ հավասարումների համակարգ, օպերատորային հավասարում

Քերոբյան Ա.Վ., Սահակյան Կ.Պ.

**Վերջավոր թվով վերջավոր ստրինգերներից բեռնավորումների փոխանցումը առաձգական
կիսահարթությանը կաշտոն սահմի շերտերի միջոցով**

Դիտարկված է խնդիր առաձգական կիսահարթության համար, որը xOy հարթության մեջ $y = 0$ գծի երկարությամբ վերջավոր տեղամասերում ուժեղացված է տարբեր առաձգական բնութագրեր և փոքր հաստատուն հաստություններ ունեցող վերջավոր թվով վերջավոր երկարությամբ վերադիրներով: Կոնտակտային փոխազդեցությունը վերադիրների և դեֆորմացվող հիմքի միջև իրագործվում է այլ ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական բնութագրեր ունեցող կաշտոն շերտերի (սոսնձի շերտերի) միջոցով: Վերադիրները դեֆորմացիայի են ենթարկվում նրանց ծայրերում կիրառված հորիզոնական ուժերի ազդեցության տակ: Անհայտ շոշափող լարումների որոշման խնդիրը հանգեցված է տարբեր միջակայքերում որոշված վերջավոր թվով անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Ցույց է տրված, որ այդ հավասարումների համակարգը խնդրին բնորոշ բնութագրիչ պարամետրի փոփոխման որոշ տիրույթում Բանախի B տարածության մեջ կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր և պարզաբանված է անհայտ շոշափող լարումների բնույթը և վարքը կոնտակտի տարբեր տեղամասերում և ներկայացված են թվային արդյունքներ:

Kerobyan A.V., Sahakyan K.P.

**Loads Transfer from Finite Number Finite Stringers to an Elastic Half-plane
Through Adhesive Shear layers**

In the paper the problem for an elastic half-plane which on finite intervals along $y = 0$ line in the plane xOy is strengthened by arbitrary finite number of finite stringers (overlays) with different elastic characteristics and small constant thickness is observed. The contact interaction between deformable base and stringers through adhesive shear layers with other physical - mechanical properties and geometric configuration is realized. The stringers are deformed under the action of horizontal forces. The determination problem of unknown shear stresses which are acting between deformable base and stringers are reduced to the system of Fredholm's integral equations of second kind relative to finite number of unknown functions which specified in different finite intervals. It is shown that in the certain domain of the change of characteristic parameter of problem this system of integral equations in Banach space may be solved by the method of successive approximations. The particular

cases are observed and the character and behaviour of unknown shear stresses are investigated and numerical results are presented.

В работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, которое на конечных отрезках вдоль линии $y = 0$ в плоскости xOy усилена произвольным конечным числом стрингеров (накладок) конечной длины с различными модулями упругости и малыми постоянными толщинами. Взаимодействия между стрингерами и деформируемым основанием во всех участках их подкрепления осуществляются посредством одинаковых тонких липких сдвиговых слоёв с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. В работе задача определения закона распределения неизвестных касательных напряжений, действующих между деформируемым основанием и стрингерами, сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с конечным числом неизвестных функций, определённых на различных конечных интервалах, которую в определённой области изменения характерного параметра задачи в банаховом пространстве B можно решать методом последовательных приближений. Рассмотрены некоторые частные случаи и выяснен характер и поведение неизвестных напряжений, действующих между полуплоскостью и стрингерами. Далее, в зависимости от изменения значения характерных параметров задачи осуществлен численный расчёт. Результаты вычислений представлены на графиках.

1. Введение.

Исследованию задач, связанных с передачей нагрузки от тонкостенных элементов в виде упругих стрингеров (накладок) к более массивным упругим телам моделированных в виде классических и неклассических областей теории упругости посредством липких сдвиговых слоёв (обусловленных как их теоретической, так и большой практической важностью), посвящено немало работ. Здесь отметим некоторые из них [1-8], тесно связанных с настоящей работой.

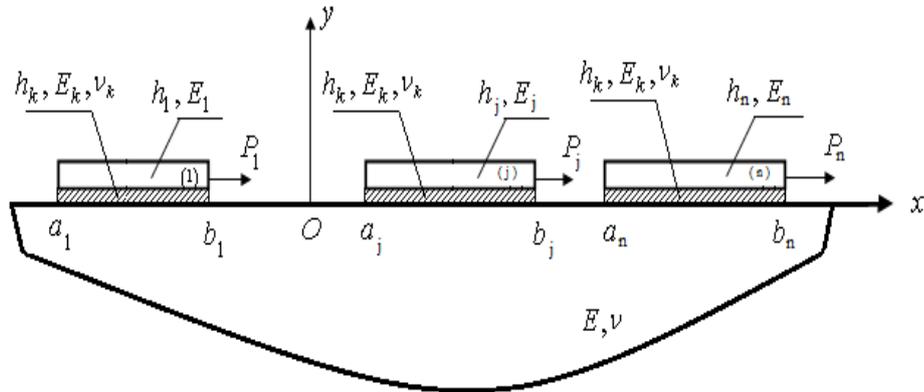
Задачи для линейно-деформируемого основания в виде упругой полуплоскости, бесконечной пластины и полосы, усиленного одним конечным стрингером (накладкой) посредством липкого слоя разными подходами, рассмотрены в работах [1-5], а задачи о передаче нагрузок от двух стрингеров конечных длин к упругим основаниям посредством липких слоёв, рассмотрены в работах [6,7]. В работе [8] рассмотрена задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами посредством липкого слоя с одним стрингером. В настоящей работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, которая на конечных отрезках вдоль своей границы усилена произвольным конечным числом конечных стрингеров (накладок) с различными модулями упругости и с малыми постоянными толщинами. Контактное взаимодействие между деформируемым основанием и стрингерами осуществляются посредством тонких липких сдвиговых слоёв с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками.

2. Постановка задачи и вывод системы разрешающих интегральных уравнений.

Пусть упругая полуплоскость с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν на конечных отрезках $[a_j, b_j]$ ($b_j > a_j, j = \overline{1, n}; b_j < a_{j+1}, j = \overline{1, n-1}$) своей границы $y = 0$ (в плоскости xOy) усилена конечным числом конечных стрингеров (накладок) малых толщин h_j ($h_j \ll b_j - a_j; j = \overline{1, n}$), модуль упругости которых при $x \in [a_j, b_j]$ ($j = \overline{1, n}$) равен E_j ($j = \overline{1, n}$), соответственно. Контактное

взаимодействие между полуплоскостью и стрингерами во всех участках их скрепления осуществляется посредством одинаковых, тонких липких слоёв с модулем упругости E_k , коэффициентом Пуассона ν_k и малой толщиной h_k . Задача заключается в определении закона распределения неизвестных напряжений, действующих между полуплоскостью и стрингерами, когда вдоль оси стрингеров в точках $x = b_j, j = \overline{1, n}$ приложены сосредоточенные силы $P_j (j = \overline{1, n})$, которые направлены вдоль оси Ox в одну сторону (фиг. 1).

Для стрингеров (накладок) принимается модель одномерного упругого континуума [9,10], а для липких слоёв – условия чистого сдвига [1]. При таких предположениях полагается, что между деформируемым основанием и стрингерами действуют только касательные напряжения [1-8].



Фиг. 1

Согласно вышесказанному и известным предположениям [1,9,10], запишем дифференциальные уравнения равновесия стрингеров, находящиеся на отрезках $[a_j, b_j] (j = \overline{1, n})$, в виде:

$$\frac{d^2 u^{(j)}}{dx^2} = \frac{\tau_j(x)}{E_j h_j}, \quad a_j \leq x \leq b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (1)$$

Здесь $u^{(j)}(x) (j = \overline{1, n})$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров на участках $[a_j, b_j] (j = \overline{1, n})$, причём, производные от них (т.е. деформации стрингеров) в конечных точках стрингеров удовлетворяют определённым граничным условиям (которые будут представлены далее), а $\tau_j(x)$ – касательные напряжения, действующие под стрингерами на участках $[a_j, b_j] (j = \overline{1, n})$, соответственно.

Теперь, полагая, что каждый дифференциальный элемент липкого слоя находится в условиях чистого сдвига [1-8], будем иметь следующие условия:

$$u^{(j)}(x) - u(x, 0) = k \tau_j(x), \quad a_j \leq x \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

поскольку

$$u^{(j)}(x) - u(x, 0) = h_k \gamma_k^{(j)}(x), \quad \tau_j(x) = G_k \gamma_k^{(j)}(x), \quad a_j \leq x \leq b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

где $k = h_k / G_k$, $G_k = E_k / 2(1 + \nu_k)$, G_k – модуль сдвига материала липких слоёв, $u(x, 0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости, $\tau_j(x)$ – касательные напряжения в липких слоях, а $\gamma_k^{(j)}(x)$ – деформация сдвига в липких слоях на участках $[a_j, b_j]$ ($j = \overline{1, n}$), соответственно.

С другой стороны, согласно вышесказанному, запишем горизонтальные перемещения $u(x, 0)$ граничных точек упругой полуплоскости, когда на конечных отрезках $[a_j, b_j]$ ($j = \overline{1, n}$) своей границы $y = 0$ действуют касательные силы интенсивности $\tau_j(x)$ ($j = \overline{1, n}$) соответственно, в виде:

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi A} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \left(\ln \frac{1}{|x-s|} + C \right) \tau_i(s) ds, \quad (3)$$

где $A = E / 2(1 - \nu^2)$, C – произвольная постоянная.

Далее, имея в виду (2), уравнения (1) можно представить в виде:

$$\frac{d^2 u^{(j)}}{dx^2} - \gamma_j^2 u^{(j)}(x) = -\gamma_j^2 u(x, 0), \quad a_j \leq x \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где имеют место также и граничные условия:

$$\left. \frac{du^{(j)}}{dx} \right|_{x=a_j} = 0, \quad \left. \frac{du^{(j)}}{dx} \right|_{x=b_j} = \frac{P_j}{E_j h_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Здесь

$$\gamma_j^2 = 1 / k E_j h_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Решения граничных задач (4), (5) получим в виде:

$$u^{(j)}(x) = u_0^{(j)}(x) + \gamma_j^2 \int_{a_j}^{b_j} G_j(x, s) u(s, 0) ds, \quad a_j \leq x \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где $u_0^{(j)}(x)$ ($j = \overline{1, n}$) – общие решения соответствующих (4) однородных уравнений при соответствующих граничных условиях (5) и имеют вид:

$$u_0^{(j)}(x) = \frac{P_j \operatorname{ch}[\gamma_j(x - a_j)]}{\gamma_j E_j h_j \operatorname{sh}[\gamma_j(b_j - a_j)]}, \quad j = \overline{1, n},$$

а $u_*^{(j)}(x) = \gamma_j^2 \int_{a_j}^{b_j} G_j(x, s) u(s, 0) ds$, $j = \overline{1, n}$, где $G_j(x, s)$ – функции Грина [11],

являются частными решениями уравнения (4) при нулевых граничных условиях:

$$\left(\frac{du^{(j)}}{dx} \right)_{x=a_j} = 0, \quad \left(\frac{du^{(j)}}{dx} \right)_{x=b_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}), \text{ причём}$$

$$G_j(x, s) = \frac{1}{\gamma_j \operatorname{sh}[\gamma_j(b_j - a_j)]} \begin{cases} \operatorname{ch}\gamma_j(x - b_j) \operatorname{ch}\gamma_j(s - a_j), & x > s, \\ \operatorname{ch}\gamma_j(x - a_j) \operatorname{ch}\gamma_j(s - b_j), & x < s, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что $G_j(x, s)$ – непрерывные функции и $G_j(x, s) = G_j(s, x)$ ($j = \overline{1, n}$).

Далее, в силу (6) и согласно условиям (2) получим следующие уравнения:

$$k\tau_j(x) + u(x, 0) = \gamma_j^2 \int_{a_j}^{b_j} G_j(x, s) u(s, 0) ds + u_0^{(j)}(x), \quad a_j \leq x \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Отметим, что спектром симметричного дифференциального оператора $D = -d^2/dx^2 + \gamma^2 I$, областью определения которого являются дважды непрерывно дифференцируемые функции $u(x)$, удовлетворяющие условиям $(du/dx)_{x=a} = 0$, $(du/dx)_{x=b} = 0$, являются собственные значения $\lambda_m = \gamma^2 + m^2\pi^2 / (b-a)^2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), а соответствующими собственными функциями являются функции $\cos[m\pi(x-a)/(b-a)]$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Далее известно [11], что симметричный, вполне непрерывный оператор B :

$$B\varphi = \int_a^b G(x, s) \varphi(s) ds,$$

действующий в $L_2(a, b)$, является обратным оператором оператора D .

Следовательно, будем иметь:

$$\int_{a_j}^{b_j} G_j(x, s) \cos\left[\frac{m\pi(s-a_j)}{b_j-a_j}\right] ds = \frac{(b_j-a_j)^2}{(b_j-a_j)^2 \gamma_j^2 + m^2\pi^2} \cos\left[\frac{m\pi(x-a_j)}{b_j-a_j}\right], \quad m=0, 1, 2, \dots, j=\overline{1, n}, \quad (8)$$

где функции $\cos\left[\frac{m\pi(x-a_j)}{b_j-a_j}\right]$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) ($j = \overline{1, n}$) образуют полную

ортогональную систему в пространствах $L_2(a_j, b_j)$ ($j = \overline{1, n}$), соответственно.

Теперь, имея в виду (3), из (7) будем иметь:

$$\begin{aligned} \tau_j(x) + \frac{1}{\pi k A} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \left(\ln \frac{1}{|x-s|} + C \right) \tau_i(s) ds = \\ = \frac{\gamma_j^2}{\pi k A} \sum_{i=1}^n \int_{a_j}^{b_j} G_j(x, s) \left[\int_{a_i}^{b_i} \left(\ln \frac{1}{|s-t|} + C \right) \tau_i(t) dt \right] ds + \frac{u_0^{(j)}(x)}{k}, \quad a_j \leq x \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, после замены переменных x на ax , s на as , t на at , где $a > 0$ – координата одной из крайних точек стрингеров, из системы (9) получим:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) + \delta^2 \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \ln \frac{1}{|x-t|} \varphi_i(t) dt - a \gamma_j^2 \delta^2 \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_j}^{\beta_j} G_j(ax, as) \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \ln \frac{1}{|s-t|} \varphi_i(t) dt ds - \frac{a u_0^{(j)}(ax)}{k} = 0, \\ \alpha_j \leq x \leq \beta_j, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (10)$$

поскольку, согласно (8), имеют место равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} G_j(ax, as) ds = \frac{1}{a \gamma_j^2}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Здесь

$$\delta^2 = a / \pi k A, \quad \alpha_j = a_j / a, \quad \beta_j = b_j / a, \quad \varphi_j(x) = a \tau_j(ax) \quad (j = \overline{1, n}).$$

Систему интегральных уравнений (10) можно представить и так:

$$\varphi_j(x) + \delta^2 \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} M_j(x, t) \varphi_i(t) dt = g_0^{(j)}(x), \quad \alpha_j \leq x \leq \beta_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} M_j(x, t) = \ln \frac{1}{|x-t|} - a \gamma_j^2 \int_{\alpha_j}^{\beta_j} G_j(ax, as) \ln \frac{1}{|s-t|} ds, \quad j = \overline{1, n}, \\ g_0^{(j)}(x) = \frac{a u_0^{(j)}(ax)}{k} = \frac{P_j a \gamma_j \operatorname{ch} [a \gamma_j (x - \alpha_j)]}{\operatorname{sh} [a \gamma_j (\beta_j - \alpha_j)]}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что при получении системы (12) был изменен порядок интегрирования, достоверность которого следует из теоремы Фубини [11]. В дальнейшем часто будем пользоваться теоремой Фубини, не отмечая это особо.

Теперь рассмотрим некоторые возможные частные случаи, которые непосредственно можно получить из системы (12). При $\delta^2 = 0$ получим решение поставленной задачи в случае жёсткого основания (т.е. при $E \rightarrow \infty$) в виде $\varphi_j(x) = g_0^{(j)}(x)$ ($j = \overline{1, n}$), соответственно. В случае одного конечного стрингера, заданного на участке $[a_1, b_1]$ (т.е. при $n = 1$ в системе (12) имеем $j; i = 1$), вместо системы (12) будем иметь интегральное уравнение Фредгольма

второго рода относительно неизвестной функции $\varphi_1(x)$, определённой на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$:

$$\varphi_1(x) + \delta^2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_1(x, t) \varphi_1(t) dt = g_0^{(1)}(x), \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_1, \quad (12a)$$

Отметим также, что при выводе системы (12) нигде не использовались условием равновесия стрингеров:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \tau_j(ax) dx = P_j / a \quad (j = \overline{1, n}). \quad (14)$$

В системе интегральных уравнений (12), условия (14) выполняются автоматически, поскольку имеют место равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} g_0^{(j)}(x) dx = P_j / a \quad (j = \overline{1, n}).$$

В этом можно легко убедиться, если проинтегрировать первое уравнение системы (12) в пределах от α_1 до β_1 , второе уравнение – в пределах α_2 до β_2 и последнее – в пределах от α_n до β_n , а затем изменить порядок интегрирования в полученных повторных интегралах с учётом равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} M_j(x, t) dx = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

которые следуют из (8), соответственно.

Таким образом, решение задачи сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (12), ядра которых квадратично интегрируемы по двум переменным и с правыми частями которых являются решения задачи в случае жёсткого основания. Из системы (12) легко заметить, что в концевых точках стрингеров $x = \alpha_j$, $x = \beta_j$ ($j = \overline{1, n}$), неизвестные касательные напряжения $\varphi_j(x)$ ($j = \overline{1, n}$) принимают конечные значения.

3. Исследование разрешимости системы интегральных уравнений (12).

Систему (12) запишем в виде:

$$\Psi + S\Psi = f_0 \quad (15)$$

где Ψ и f_0 – столбцы, соответственно, с элементами φ_j и $g_0^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, а S – матрица с элементами $\delta^2 k_{ji}$, при этом,

$$k_{ji}\varphi_i = \int_{\alpha_i}^{\beta_j} M_j(x,t)\varphi_i(t)dt \quad (j; i = \overline{1, n}). \quad (16)$$

Рассмотрим операторное уравнение (15) в банаховом пространстве B вектор-

функций $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, где $X_j \in L_2(\alpha_j, \beta_j)$ ($j = \overline{1, n}$) с нормой

$\|X\| = \max \{ \|X_1\|_{L_2(\alpha_1, \beta_1)}, \|X_2\|_{L_2(\alpha_2, \beta_2)}, \dots, \|X_n\|_{L_2(\alpha_n, \beta_n)} \}$. Здесь $L_2(\alpha_j, \beta_j)$ – пространство квадратично суммируемых функций, определённых на интервале (α_j, β_j) .

Операторы k_{ji} ($j; i = \overline{1, n}$) действуют следующим образом $k_{ji}: L_2(\alpha_i, \beta_i) \rightarrow L_2(\alpha_j, \beta_j)$ ($j; i = \overline{1, n}$), причем при $j = i = \overline{1, n}$ они действуют в пространствах $L_2(\alpha_1, \beta_1), \dots, L_2(\alpha_n, \beta_n)$, соответственно.

Очевидно, что оператор S действует в пространстве B и является фредгольмовым. Тогда операторное уравнение (15) в пространстве B можно решать методом последовательных приближений, если $\|S\| < 1$, причём

$$\|S\| = \max \{ \delta^2(\|k_{11}\| + \dots + \|k_{1n}\|), \delta^2(\|k_{21}\| + \dots + \|k_{2n}\|), \dots, \delta^2(\|k_{n1}\| + \dots + \|k_{nn}\|) \}.$$

Следовательно, условие $\|S\| < 1$ будет выполняться, если

$$\delta^2(\|k_{11}\| + \dots + \|k_{1n}\|) < 1, \delta^2(\|k_{21}\| + \dots + \|k_{2n}\|) < 1, \dots, \delta^2(\|k_{n1}\| + \dots + \|k_{nn}\|) < 1. \quad (17)$$

Решение уравнения (15) запишется в виде:

$$\psi = (I + S)^{-1} f_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m S^m f_0.$$

Теперь найдём те значения параметра δ^2 , при которых будут удовлетворяться условия (17). Из (16), в силу неравенства Коши-Буняковского, будем иметь:

$$\|k_{ji}\| \leq c_{ji}, \quad \text{где } c_{ji} = \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} M_j^2(x,t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (j; i = \overline{1, n}). \quad (18)$$

Как следует из выражений для c_{ji} ($j; i = \overline{1, n}$), их трудно вычислить, но можно оценить. Не останавливаясь на подробностях, отметим, что с помощью равенства Парсеваля для ядер $M_j(x,t)$ ($j = \overline{1, n}$), а также соотношения (8) и неравенства Коши-Буняковского, можно получить следующие оценки:

$$c_{ji} < \frac{l_j}{2} \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \ln^2 |x-t| dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j; i = \overline{1, n}, \quad l_j = \beta_j - \alpha_j, \quad (19)$$

Тогда условия (17) будут выполняться, если:

$$\delta^2 < \left(\sum_{i=1}^n c_{ji} \right)^{-1} = c_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Следовательно, условия выполнения (17) получим в виде:

$$\delta^2 < \min(c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (21)$$

где $c_j (j = \overline{1, n})$ – положительные числа, меньшие единицы.

Отметим, что оценка (19) при $j; i = 1$ другим методом получена и в работе [5].

Значения касательных напряжений $\varphi_j(x)$ ($j = \overline{1, n}$) в концевых точках стрингеров $x = \alpha_j$, $x = \beta_j$ ($j = \overline{1, n}$) получим из системы (12).

4. Численные результаты и их анализ.

Для двух случаев поставленных задач, указанных выше (т.е. в случаях $n = 1$ и $n = 2$), исходя из интегрального уравнения (12а) и системы интегральных уравнений (12), проведён анализ числовых результатов. Поскольку $\alpha_1 = a_1/a$, $\beta_1 = b_1/a$, и $\alpha_2 = a_2/a$, $\beta_2 = b_2/a$, приняв $a_1 = -a$, $b_1 = a$ и $a_2 = 2a$, $b_2 = 4a$, получим $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 1$ и $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 4$. Тогда интегральное уравнение (12а) запишем в виде:

$$p^*(x) = \delta_* \int_{-1}^1 K(x, t) p^*(t) dt + f(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (12а*)$$

а систему интегральных уравнений (12) в случае $n = 2$ – в виде:

$$p^*(x) = \delta_* \int_{-1}^1 K(x, t) p^*(t) dt + \delta_* \theta \int_2^4 K(x, t) q^*(t) dt + f(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (12б*)$$

$$q^*(x) = \delta_* \int_2^4 M(x, t) q^*(t) dt + \delta_* \theta^{-1} \int_{-1}^1 M(x, t) p^*(t) dt + g(x), \quad 2 \leq x \leq 4,$$

Здесь введены безразмерные величины и обозначения:

$$p^*(x) = \varphi_1(x)/P_1, \quad q^*(x) = \varphi_2(x)/P_2, \quad \delta_* = \delta^2, \quad \theta = P_2/P_1,$$

$$h_k^* = h_k/a, \quad h_j^* = h_j/a, \quad \kappa_j = E_j/E, \quad j = 1, 2,$$

$$f(x) = \frac{\gamma_1^* \operatorname{ch}[\gamma_1^*(x+1)]}{\operatorname{sh}(2\gamma_1^*)}, \quad g(x) = \frac{\gamma_2^* \operatorname{ch}[\gamma_2^*(x-2)]}{\operatorname{sh}(2\gamma_2^*)}, \quad \gamma_j^* = a\gamma_j = \left(\frac{\kappa_j E h_k^* h_j^*}{G_k} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$K(x,t) = \ln|x-t| - \gamma_1^* \int_{-1}^1 G_1^*(x,s) \ln|s-t| ds, \quad K(x,t) = -M_1(x,t),$$

$$M(x,t) = \ln|x-t| - \gamma_2^* \int_{-2}^4 G_2^*(x,s) \ln|s-t| ds, \quad M(x,t) = -M_2(x,t),$$

$$G_j^*(x,s) = \frac{1}{\text{sh}(2\gamma_j^*)} \begin{cases} \text{ch}[\gamma_j^*(x-\beta_j)] \text{ch}[\gamma_j^*(s-\alpha_j)], & x > s, \\ \text{ch}[\gamma_j^*(x-\alpha_j)] \text{ch}[\gamma_j^*(s-\beta_j)], & x < s, \end{cases} \quad j=1,2.$$

Далее, после вычисления соответствующих интегралов (19) в рассматриваемых случаях, согласно (21), для уравнения (12а*) получим условие разрешимости методом последовательных приближений в виде $\delta_* < 0.36$, а для системы уравнений (12б*) – в виде $\delta_* < 0.201$ (в этом случае $c_{11} = c_{22} \approx 2.76$ и $c_{12} = c_{21} \approx 2.20$).

Результаты решения интегрального уравнения (12а*) и системы интегральных уравнений (12б*) методом последовательных приближений для некоторых значений характерных параметров задачи δ_* и γ_j^* ($j=1,2$) при $\theta=1$ приводятся в виде графиков. Вычисления проводились при помощи программы «Mathematica 9.0».

В расчётах для материала липких слоёв выбран конструкционный клей Redux 775 [12] с модулем сдвига $G_k = 1.20$ ГПа или с модулем упругости $E_k = 3.35$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu_k = 0.395$ (используется в авиастроении для соединения металла с металлом и других конструкционных материалов, в частности, для скрепления стрингеров [12]).

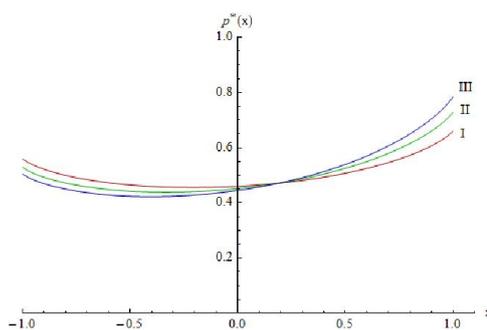
Для безразмерной толщины липких слоёв везде в расчётах принято $h_k^* = 2.5 \cdot 10^{-2}$ (для всех типов Redux h_k на практике принимает значения от 10^{-2} до $2.5 \cdot 10^{-2}$ см [12]), а для толщины стрингеров принято $h_j^* = 40h_k^*$ ($j=1,2$). Тогда, полагая $E/G_k = 10^2$, которое имеет место, если $E = 120$ ГПа (соответствует например, для бронзы [13]), в случае $\kappa_j = 3$ ($j=1,2$) получим $\gamma_j^* = 0.35$ (здесь и в дальнейшем индекс j принимает значения $j=1,2$), в случае $\kappa_j = 2.5$ получим $\gamma_j^* = 0.4$, в случае $\kappa_j = 1.6$ получим $\gamma_j^* = 0.5$, в случае $\kappa_j = 1$ (т.е. $E_j = E$) получим $\gamma_j^* = 0.6$. В рассматриваемых случаях для параметра δ_* получим: $\delta_* = 0.2$.

Отметим, что в случае $\kappa_j = 1$, когда материал основания и стрингера из алюминиевого сплава [13] с модулем упругости $E = 75$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.35$ (в этом случае $E/G_k = 0.6 \cdot 10^2$), будем иметь $\delta_* = 0.3$ и $\gamma_j^* = 0.85$. Тогда, если $\delta_* = 0.3$ и $\gamma_j^* = 0.5$, для модуля упругости стрингеров

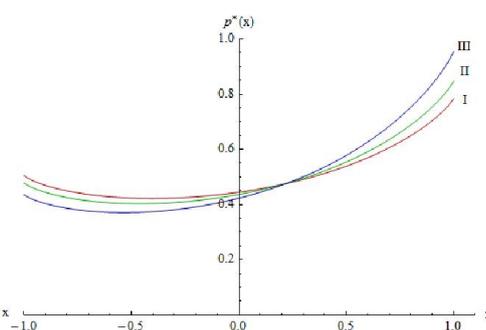
получим $E_j = 200$ ГПа (соответствует материалу стали [13]). При значениях $\delta_* = 0.3$ и $\gamma_j^* = 0.6$, для E_j получим: $E_j = 140$ ГПа, а при значениях $\delta_* = 0.3$ и $\gamma_j^* = 0.7$ для E_j получим: $E_j = 100$ ГПа (соответствует материалам – титану, латуни [13]).

Для упругой бесконечной пластины [6] будем иметь соответственно такие же значения для параметра $\bar{\delta}_*$ (здесь $\bar{\delta}_* = \bar{\delta}^2$), если $d/b_1^* = 0.6$.

Некоторые численные результаты решения интегрального уравнения (12а*) при различных значениях параметров δ_* и $\gamma_1^* = \gamma^*$, приводятся ниже в виде графиков. Кривые, представленные на фиг. 2 и 3, графически иллюстрируют соответствующие решения уравнения (12а*), полученного методом последовательных приближений (сходятся при шестом приближении) для различных значений δ_* и γ^* . На фиг.2 кривые I, II и III соответствуют значениям $\delta_* = 0.2$ и $\gamma^* = 0.35$; $\gamma^* = 0.5$; $\gamma^* = 0.6$, соответственно, а на фиг.3 кривые I, II и III соответствуют значениям $\delta_* = 0.3$ и $\gamma^* = 0.6$; $\gamma^* = 0.7$; $\gamma^* = 0.85$, соответственно.

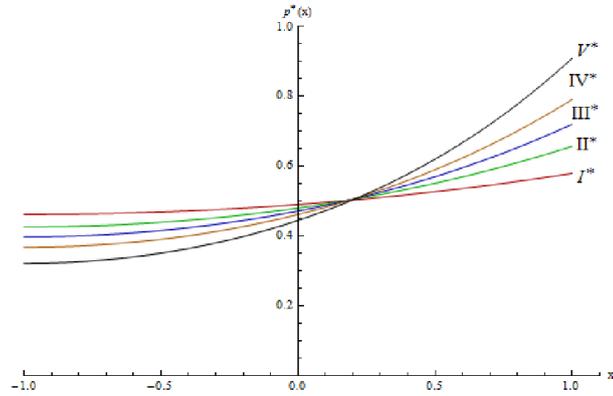


Фиг. 2



Фиг. 3

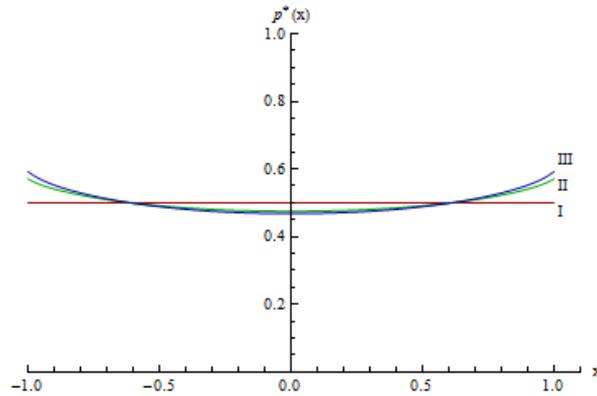
Кривые, представленные на фиг.4, являются начальными решениями (нулевыми приближениями) интегрального уравнения (12а*), полученными методом последовательных приближений при различных значениях параметра γ^* . Они одновременно графически иллюстрируют закон распределения касательных напряжений, действующих под стрингером конечной длины в случае абсолютно жёсткого основания (т.е. в случае $\delta_* = 0$). На фиг.4 кривые I*, II*,..., V* соответствуют значениям $\gamma^* = 0.35$ и $\gamma^* = 0.5$; $\gamma^* = 0.6$; $\gamma^* = 0.7$; $\gamma^* = 0.85$, соответственно.



Фиг. 4

Из расчётов и соответствующих графиков следует, что с уменьшением значения параметра γ^* касательные напряжения уменьшаются вблизи конца стрингера $x = 1$ и, наоборот, увеличиваются вблизи конца стрингера $x = -1$. Это означает что, чем жёстче материал стрингера, тем симметричнее распределяются касательные напряжения относительно середины стрингера, в противном случае, касательные напряжения концентрируются вблизи конца стрингера, где приложена сила. Далее, с уменьшением значения параметра δ_* при тех же значениях γ^* соответствующие значения касательных напряжений уменьшаются.

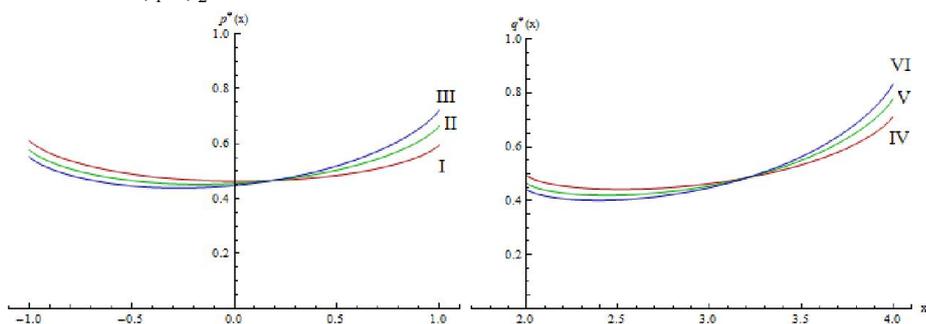
На фиг.5 кривые I, II и III показывают закон распределения касательных напряжений в случае жёсткого стрингера, т.е. когда $\gamma^* \approx 0$ (в расчётах принято $\gamma^* = 1 \cdot 10^{-6}$). Здесь кривая I соответствует значениям параметров $\delta_* = 0$ и $\gamma^* \approx 0$, т.е. когда материал основания и стрингера становится жёстким. В этом случае касательные напряжения распределяются равномерно и принимает постоянное значение: $p^*(x) = 0.5$.



Фиг. 5

Кривые II и III, представленные на фиг.5 соответствуют значениям параметров $\gamma_1^* \approx 0$ и $\delta_* = 0.2$; $\delta_* = 0.3$, соответственно, при которых касательные напряжения распределяются симметрично относительно середины стрингера.

Некоторые результаты решения системы интегральных уравнений (12б*) при различных значениях параметров δ_* и γ_1^*, γ_2^* приводятся ниже в виде графиков. Кривые, представленные на фиг.6 и 7 иллюстрируют соответствующие решения системы (12б*), полученной методом последовательных приближений для различных значений δ_* и γ_1^*, γ_2^* .

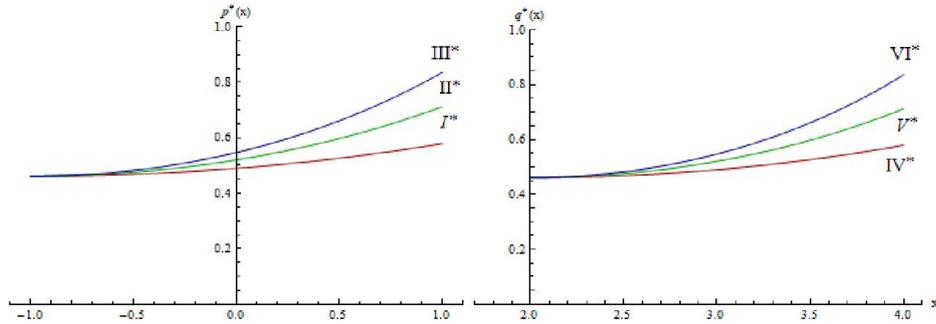


Фиг. 6

На фиг.6 при значениях $\delta_* = 0.2$ кривые I и IV соответствуют значениям параметров $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые II и V соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.5$, а кривые III и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.6$.

Далее, с помощью соответствующих результатов вычислений будем иметь, что кривые I и V, представленные на фиг.6 с незначительной ошибкой (не влияют, в общем, на вид графиков), соответствуют также значениям $\delta_* = 0.2$ и $\gamma_1^* = 0.35$; $\gamma_2^* = 0.5$, соответственно, кривые I и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35$; $\gamma_2^* = 0.6$, кривые II и IV соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.5$; $\gamma_2^* = 0.35$, кривые II и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.5$; $\gamma_2^* = 0.6$ и т.д.

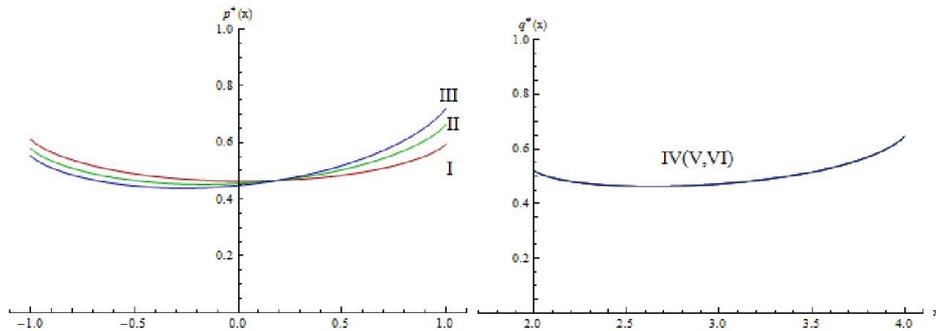
Кривые, полученные соответственно на фиг. 7 представляют закон распределения касательных напряжений, действующих под двумя конечными стрингерами в случае абсолютно жёсткого основания (т.е. в случае $\delta_* = 0$). Они одновременно являются и начальными решениями (нулевыми приближениями) системы интегральных уравнений (12б*), полученных методом последовательных приближений при различных значениях параметров γ_1^*, γ_2^* в виде кривых I*, II*, III* и IV*, V*, VI*, соответственно.



Фиг. 7

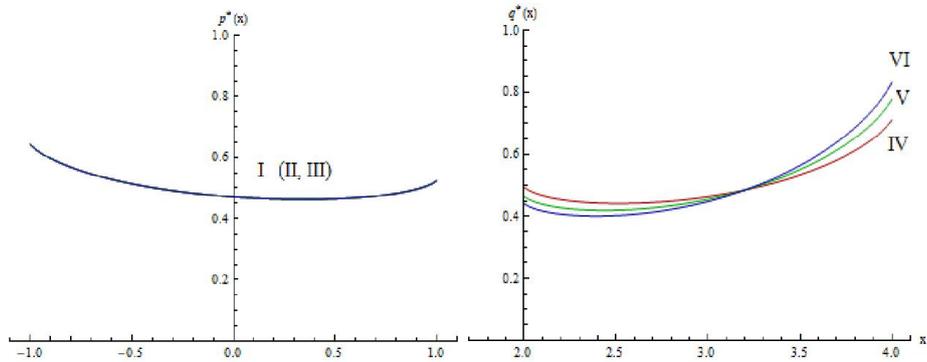
На фиг.7 кривые I* и IV* соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые II* и V* – значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.5$, а кривые III* и VI* – значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.6$, соответственно. Кривые I* и V* соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35$ и $\gamma_2^* = 0.5$, кривые I* и VI* соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35$ и $\gamma_2^* = 0.6$, соответственно, и т.д.

Когда материал одного из двух конечных стрингеров становится жёстким, закон распределения касательных напряжений приведён на фиг.8 и 9. На фиг.8 при значениях $\delta_* = 0.2$ кривые I и IV соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35$; $\gamma_2^* \approx 0$, соответственно, кривые II и V соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.5$; $\gamma_2^* \approx 0$, а кривые III и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.6$; $\gamma_2^* \approx 0$.



Фиг. 8

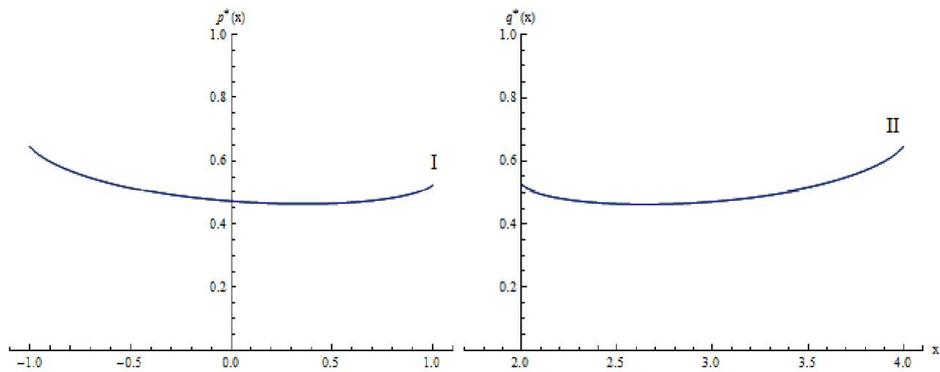
В случае, когда материал первого стрингера слева становится жёстким, результаты вычисления приведены на фиг.9. На фиг.9 при значениях $\delta_* = 0.2$, кривые I и IV соответствуют значениям параметров $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые I и V соответствуют значениям $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* = 0.5$, а кривые I и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* = 0.6$.



Фиг. 9

Из расчётов и соответствующих графиков следует, что если в случае одного конечного жёсткого стрингера касательные напряжения распределяются симметрично относительно середины стрингера, то в случае двух стрингеров, когда материал одной из двух стрингеров становится жёстким, симметричность нарушается, что обусловлено значительным воздействием стрингеров друг на друга.

Когда материал обоих стрингеров становится жёстким, закон распределения касательных напряжений приведён на фиг.10. Кривые I и II, представленные на фиг. 10, иллюстрируют соответствующие решения системы (126*), полученной методом последовательных приближений при значениях $\delta_* = 0.2$ и $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* \approx 0$.



Фиг. 10

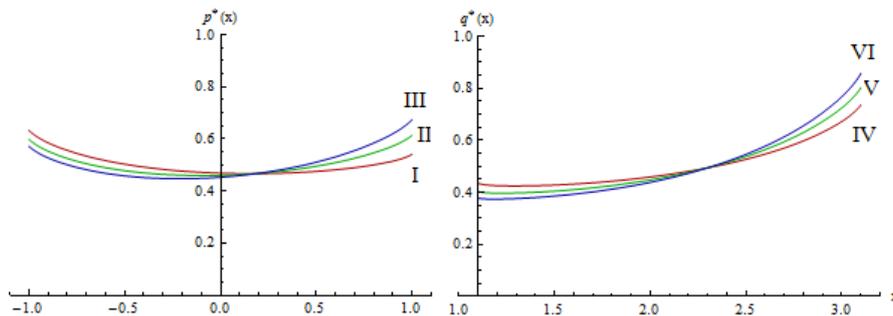
Из вычислений следует, что в этом случае касательные напряжения распределяются симметрично относительно середины промежуточного интервала между стрингерами, а в конечных точках стрингеров $x=1$, $x=2$ и $x=-1$, $x=4$ соответственно, они принимают одинаковые значения.

В случае, когда материал и основания, и стрингеров становится жёстким, т.е. когда $\delta_* = 0$ и $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* \approx 0$, касательные напряжения распределяются равномерно и принимают одинаковые постоянные значения: $p^*(x) = 0.462$ и $q^*(x) = 0.462$.

Далее, с изменением расстояния между двумя стрингерами оставляя их длины неизменными, изменяются и условия разрешимости системы уравнений. Когда

расстояние между стрингерами увеличивается в два раза, тогда стрингеры будут находиться в интервалах $[-1, 1]$ и $[3, 5]$ соответственно, и условие разрешимости системы уравнений находим в виде: $\delta_* < 0.181$ (в этом случае $c_{ji} \approx 2.76$, $j; i = 1, 2$). Приняв для вычислений $\delta_* = 0.18$, а для параметров γ_1^* , γ_2^* , соответственно, те же значения, для касательных напряжений получим те же распределения, как и в предыдущих случаях, только с незначительными изменениями их соответствующих значений.

Когда расстояние между двумя стрингерами уменьшается, т.е. если они находятся в интервалах $[-1, 1]$ и $[1.1, 3.1]$, соответственно, результаты вычисления (при тех же значениях параметров δ_* и γ_1^*, γ_2^* соответствующих на фиг.6) иллюстрируются на фиг.11. Здесь имеется в виду, что условие разрешимости системы уравнений имеет вид: $\delta_* < 0.23$ (в этом случае $c_{11} = c_{22} \approx 2.76$ и $c_{12} = c_{21} \approx 1.62$). На фиг. 11 при значениях $\delta_* = 0.2$ кривые I и IV соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые II и V соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.5$, соответственно, а кривые III и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.6$.



Фиг. 11

Сравнение результатов вычисления, приведённых на фиг. 11 и 6, показывают, что в рассматриваемом случае при тех же значениях параметров δ_* и γ_1^*, γ_2^* для стрингера, находящегося на участке $[-1, 1]$, вблизи конца стрингера $x = -1$ соответствующие значения касательных напряжений увеличиваются и наоборот, вблизи конца стрингера $x = 1$ (т.е. у точки приложения силы) соответствующие значения напряжений значительно уменьшаются. Тогда, для стрингера находящегося на участке $[1.1, 3.1]$, соответствующие значения касательных напряжений вблизи конца стрингера $x = 1.1$ также значительно уменьшаются, а вблизи конца стрингера $x = 3.1$ увеличиваются незначительно (на величину 0,03). Заметим также, что в этом случае, в конечных точках стрингеров $x = 1$ и $x = 1.1$, чем жёстче становятся стрингера, тем разность значений соответствующих напряжений в этих точках уменьшаются и наоборот, увеличиваются в противном случае. Такое поведение напряжений обусловлено в рассматриваемом случае более сильным воздействием стрингеров друг на друга. Отметим также, что в рассматриваемом случае для

нулевых решений системы (т.е. для жёсткого основания) будем иметь те же распределения напряжения, какими они и есть на фиг.7.

Заключение. Полученная в работе произвольная конечная система интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных касательных напряжений, действующих на различных конечных участках и её исследование на разрешимость, задают эффективное решение поставленной задачи. При помощи этой системы уравнений, как для случая одного конечного стрингера, так и для случая двух конечных стрингеров в зависимости от изменения характерных параметров соответствующих задач, приведён анализ полученных числовых результатов и выяснены закономерности изменения касательных напряжений в зависимости от изменения жёсткостей материалов стрингеров и деформируемого основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive Shear Flow for an Axially Loaded, Finite Stringer Bonded to an Infinite Sheet. -Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XXIII, 1970, p. 521-533.
2. Керопян А.В., Саркисян В.С. Решение задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеена накладка конечной длины. Юбилейная научн. конферен. посвящ. 60-летию основ. Гюмрийского пед. института. //В сб. научных трудов: т.1, Высшая школа, Гюмри, 1994, с. 73-76. Kerobyan A.V., Sarkisyan V.S. The Solution of the Problem for an Anisotropic Half-plane on the boundary of Which Finite Length Stringer is Glued. Proceedings of the Scientific Conference, Dedicated to the 60th Anniversary of the Pedagogical Institute of Gyumri, V.1, Vysshaya Shkola, Gyumri, 1994, p.73-76, (in Russian).
3. Саркисян В.С., Керопян А.В. Некоторые контактные задачи для упругих бесконечных тел, границы которых усилены через слой клея стрингерами (накладками) различных свойств и длин. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. //В сб. научных трудов конференции», ЕГУ, Институт механики НАН Армении, Ереван, 1997, с. 239-244. Sarkisyan V.S., Kerobyan A.V. Some Contact Problems for an Elastic Infinite Bodies, Which Boundary are Reinforced by a Glued Stringers (Overlays) of Different Properties and Length. Optimal Control, Stability and Durability Problems of Mechanical Systems. Proceedings of Conference, YSU, Institute of Mechanics of NAS RA, Yerevan, 1997, p.239-244 (in Russian).
4. Саркисян В.С., Керопян А.В. О решении задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеен нелинейно-деформируемый стрингер конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. №3-4, с.17-26. Sarkisyan V.S., Kerobyan A.V. On the Solution of the Problem for Anisotropic Half-plane on the Edge of Which a Nonlinear Deformable Stringer of Finite Length is Glued. Proceedings of NAS RA. Mechanics, V. 50, №3-4, 1997, p.17-26 (in Russian).
5. Григорян Э.Х. О решении задачи для упругой бесконечной пластины на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. №4, с.11-16. Grigoryan E. Kh. On Solution of Problem for an Elastic Infinite Plate, one the Surface of Which Finite Length Stringer is Glued. Proceedings of NAS RA, Mechanics, V. 53, №4, 2000, p.11-16 (in Russian)

6. Kerobyan A.V. About Contact Problems for an Elastic Half -Plane and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays In the Presence of Shear Interlayers. Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences, №2, 2015, p. 30-38.
7. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полосы и бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. №1, с. 22-34. Kerobyan A.V. Contact Problems for an Elastic Layer and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays in the Presence of Shear Interlayers. Proceedings of NAS RA, Mechanics, V.67, № 1, 2014, p.22-34 (in Russian)
8. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. №2, с.14-23. Grigoryan E.Kh., Kerobyan A.V., Shahinyan S.S. The Contact Problem for the Infinite Plate with Two Finite Stringers One from Which is Glued, Other is Ideal Conducted. Proceedings of NAS RA, Mechanics, V.55, №2, 2002, p.14–23 (in Russian).
9. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.-Ingeniuer-Archiv, Bd.3, Heft 2, 1932, s.123-129.
10. Muki R. and Sternberg E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi- infinite elastic sheet. Transactions of the ASME, №4,1968, p.737-746.
11. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Гос. изд. физ. мат. лит., 1961, 442с. Shilov G.E. Mathematical Analysis, Special Course, Moscow, 1961, 442 p. (in Russian).
12. Beevers A. Forensic Studies of Adhesive Joints, Report №9, Part-2-Bonded Aircraft Structure, September, 1995, 62p.
13. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов. М.: Изд-во МГТУ, 1999. 592с. Feodosev V.I. Resistance of materials, MSTY Publishers, Moscow, 1999, 592p. (in Russian).

Сведения об авторах:

Керопян Агаси Вачаганович – к.ф.м.н., доцент, ЕГУ

Адрес: Ереван, ул. А. Манукяна, 1. Тел.: 010 461941, 098 033611,

Е-mail: agas50@ysu.am

Саакян Карен Пайкарович – к.ф.м.н., доцент, ЕГУ

Адрес: Ереван, ул., А.Манукяна, 1. Тел.: 093 243862,

Е-mail: karen_sahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 22.11. 2016