ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика

УДК 621.38; 62.50

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ И УСЛОВИЯ ЕЁ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Гукасян А.А.

Ключевые слова: манипулятор, процесс обслуживания, промежуточные состояния, матрица управляемости.

Key words: manipulator, maintenance process, intermediate states, controllability matrix

Բանալի բառեր. Մանիպուլյատոր, մատակարարման պրոցես, միջանկյալ վիճակներ, ղեկավարելիության մատրիցա

Ղուկասյան Ա.Ա.

Մատակարարման պրոցեսի մաթեմատիկական մոդելավորման և նրա ղեկավարելիության պայմանների մասին

Բերված են աբստրակտ մատակարարման պրոցեսի մաթեմատիկական մոդելավորման արդյունքները, որի հիմնական էլեմենտը հանդիսանում է ղեկավարվող բազմօղակ մանիպուլյատորը: Մանիպուլյատորը պետք է ավտոմատ կերպով ապահովի օբյեկտների անընդհատ աշխատանքը, կախված մատակարարման պրոցեսի նշանակությունից: Ենթադրվում է, որ մանիպուլյատորի դինամիկական բնութագրիչները մատակարարման պրոցեսի ընթացքում, կախված տեղափոխվող բեռի կամ գործիքի զանգվածից կարող են փոփոխվել ժամանակի վերջավոր պահերի: Ընդհանուր դեպքում բերվում է շարժական և անշարժ օբյեկտներին մանիպուլյատորի միջոցով մատակարարման նկարագրությունը և հետազոտվում է ղեկավարելիության հարցերը այն դեպքում, երբ մանիպուլյատորի շարժումը տարբեր ինտերվալներում նկարագրվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով, իսկ օբյեկտների շարժումները տրված են:

Ghukasyan A.A.

On the mathematical modeling of maintenance process and the condition of its controllability

The results of mathematical modeling of an abstract maintenance process the main element of which is a controlled multilink manipulator are presented. The manipulator must automatically maintain the continuous operation of objects, depending on the purpose of the maintenance process. It is assumed that in the process of maintenance the dynamic characteristics of the manipulator depending on the weight of the load or tool could be transformed in some final moments of the time. In general, the description of the maintenance process of movable and fixed objects are brought and the question of control in a case when the motion of the manipulator at each service interval is described by linear differential equations with constant coefficients, as well as the motion of the objects are given.

Приводятся результаты математического моделирования абстрактного процесса обслуживания, основным элементом которого является управляемый многозвенный манипулятор. Манипулятор должен автоматически обслуживать непрерывную работу объектов в зависимости от назначения процесса обслуживания. Предполагается, что в процессе обслуживания, динамические характеристики манипулятора в зависимости от массы переносимого груза или инструмента может изменяться в некоторые конечные моменты времени. В общем случае приводится описание процесса обслуживания манипулятором подвижных и неподвижных объектов и исследуются вопросы управляемости в случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы.

Введение. На практике часто встречаются различные задачи обслуживания, которые могут быть реализованы с использованием манипуляторов с программным управлением или адаптивного манипуляционного робота, оснащённого системой технического зрения, чувствительным элементом и другими элементами искусственного интеллекта. Применение роботов эффективно для выполнения, главным образом, вспомогательных операций производственного процесса (перемещение предмета, установка, загрузка, разгрузка, манипуляции предметом и т.д.), а также операций, выполняемых в экологически вредных и дискомфортных условиях (при высокой или низкой температуре, запыленности, загазованности и т.д.). Имеются многочисленные работы по разработке и проектированию различных процессов обслуживания в системе автоматизированных производственных систем по различным отраслям промышленности, которые могут быть интересны как для научных работников, так и для инженеров-проектировщиков [1-8]. Не нарушая общности, элементы в системе обслуживания, то есть станки, манипуляторы, конвейеры, склады с деталями или другими технологическими инструментами, при моделировании могут быть рассмотрены как подвижные и неподвижные объекты (цели). Состояния объектов могут быть заданы или являться решениями некоторых дифференциальных уравнений, описывающих их движение. Ниже, для частных случаев, на основе абстрактного модельного примера исследуются вопросы о возможности математического моделирования технологического процесса обслуживания и условия её управляемости. Исследования являются продолжением работы [8], где рассматривается модель управляемого технологического процесса, состоящего из подвижных конвейеров, тележки с различными деталями и адаптивным манипулятором. Манипулятор оптимальным образом обслуживает работу конвейеров нужными деталями, когда последовательность обслуживания определяется с помощью датчика усилий, расположенного во внутренней поверхности захватного устройства манипулятора.

1.Математическая модель процесса обслуживания. Рассматривается технологический участок, который состоит из k подвижных или неподвижных объектов (целей) и управляемого многозвенного манипулятора. Задача манипулятора состоит в том, что он должен обслуживать непрерывную работу объектов в зависимости от технологического назначения.

В общем случае движение i-го объекта в процессе обслуживания в обобщённых координатах зададим уравнением

$$\ddot{\mathbf{y}}^i = \mathbf{g}^i\left(\mathbf{y}^i, \dot{\mathbf{y}}^i\right) \left(i = 1, 2, \cdots, k\right) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\left(\mathbf{y}^i\left(t_{i-1}\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(t_{i-1}\right)\right) \in \mathbf{G}_y^i \ \left(i = 1, 2, \cdots, k\right), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{y}^i = \left(y_1^i, y_2^i, \cdots y_m^i\right) \left(i = 1, 2, \cdots, k\right)$ – вектор обобщённых координат i-ой цели, $\mathbf{G}_y^i$ – $2m$-мерная область начальных условий движения объектов.

Уравнение, описывающее движение манипулятора, в общем случае представим в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}\right), \ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{S}, \mathbf{u} \in \left\{\mathbf{U}\right\}, \boldsymbol{\omega} \in \left\{\boldsymbol{\Omega}\right\} \tag{1.3}$$

с начальным условием

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\left(t_o\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}\left(t_o\right)\right) \in \mathbf{G}_\alpha \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l)$ – вектор обобщённых координат манипулятора, $\mathbf{u}$ – вектор управления манипулятором, $\mathbf{S}$ – та часть технологического пространства, где возможно свободное передвижение манипулятора, $\{\mathbf{U}\}$ – выпуклая область, характеризующая возможность управления, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор, определяющий параметры, входящие в систему уравнений движения манипулятора, который может изменяться после каждой встречи с объектами (изменение параметра $\boldsymbol{\omega}$ в процессе движения манипулятора может быть непрерывно или скачкообразно $[9,10]$), $\{\boldsymbol{\Omega}\}$ – область допустимых значений параметра $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{G}_\alpha$ – область начального состояния манипулятора. В практических задачах обслуживания в качестве параметра $\boldsymbol{\omega}$ может являться масса переносимого манипулятором груза или инструмента.

Далее предполагается, что в зависимости от параметра $\boldsymbol{\omega}$ изменяются динамические свойства манипулятора после каждого этапа движения. Это предположение означает, что масса переносимого манипулятором груза существенна и её необходимо учитывать при моделировании движений. Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее движение манипулятора (1.3) и условия (1.4), на i-ом этапе обслуживания, можно представить в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}^i = f^i\left(\boldsymbol{\alpha}^i, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i\right), \boldsymbol{\alpha}^i \in \mathbf{S}^i, \mathbf{u}^i \in \left\{\mathbf{U}^i\right\},$$

$$\boldsymbol{\omega}^i \in \{\boldsymbol{\Omega}\} \left(i = 1, 2, \cdots, k\right) \left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(t_{i-1}\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(t_{i-1}\right)\right) \in \mathbf{G}_\alpha^i, \left(i = 1, 2, \cdots, k\right), \tag{1.5}$$

где $\mathbf{G}_\alpha^i$ – $2l$-мерная область начальных состояний движения манипулятора.

В задачах управления манипулятором, для обеспечения встреч с целями необходимо также задать обобщённые координаты схвата манипулятора относительно выбранной инерциальной системы координат. Обобщённые координаты схвата обозначим через вектор $\mathbf{q} = (q_1, q_2 \cdots, q_N)$, где $\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\alpha})$. Здесь $\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\alpha})$ – заданная N-мерная вектор-функция, структура которой зависит от выбора обобщённых координат и от геометрии манипулятора, вектор $\boldsymbol{\alpha}$, на i-ом этапе движения, определяется решением уравнения (1.5).

Движение манипулятора с целью обслуживания объектов (1.1) начинается в момент времени t_0 и заканчивается в момент T (T может быть заданным или определяться из дополнительных условий). Начиная с t_0 до T, манипулятор должен осуществлять встречи с объектами (1.1) в моменты времени $t_1, t_2, \cdots, t_k$, где t_i – момент встречи манипулятора с i-ой целью ($i = 1, 2, \cdots, k$). Эти условия для переменных $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{y}^i, \dot{\mathbf{y}}^i$, в общем случае, можно представить следующим образом:

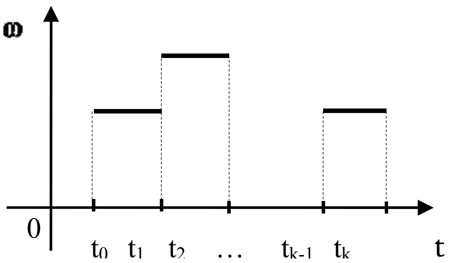
$$\left(\mathbf{q}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{q}}^i\left(t_i\right),\mathbf{y}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{y}}\left(t_i\right)\right)\in\mathbf{G}^i_{\mathrm{q},y}\ \left(i=1,2,\cdots,k\right) \tag{1.6}$$

или для переменных $\boldsymbol{\alpha}^i$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i$ и $\mathbf{y}^i$, $\dot{\mathbf{y}}^i$ в виде

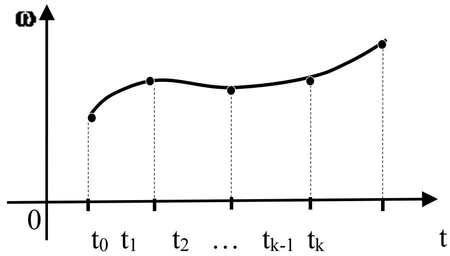
$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(t_i\right),\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(t_i\right),\mathbf{y}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{y}}^i\left(t_i\right)\right)\in\mathbf{G}^i_{\alpha,y}\ \left(i=1,2,\cdots,k\right). \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{G}^i_{q,y}$ и $\mathbf{G}^i_{\alpha,y}$ – $2\left(N+m\right)$ и $2\left(l+m\right)$-мерные области.

Предполагается, что время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается, то есть считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту (предположение имеет место, поскольку $\tau/_{(T-t_0)} \ll 1$, где $\tau-$ время нахождения манипулятора около объекта, а $\left(T-t_0\right)$ – время процесса обслуживания). То есть, момент времени t_i $\left(i=1,2,\cdots,k\right)$ является началом движения манипулятора для обслуживания объекта под номером $\left(i+1\right)$. Варианты изменения $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}\left(t\right)$ представлены на фиг.1,2.



Фиг.1



Фиг. 2

Условия (1.6) и (1.7) являются дополнительными требованиями к движению манипулятора и объектов в процессе обслуживания и их, как правило, необходимо учитывать при моделировании. Возможны также другие совместные требования как на движение манипулятора и объектов обслуживания, так и на управляющие силы и моменты, развиваемые приводами. Эти требования формально можно представить в виде

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(t_i\right),\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(t_i\right),\mathbf{y}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{y}}^i\left(t_i\right),\mathbf{u}^i\right)\in\mathbf{G}^i_{\alpha,y,u}\ \left(i=1,2,\cdots,k\right). \tag{1.8}$$

Отметим, что если последовательность обслуживания манипулятором объектов фиксирована, то задача на каждом этапе движения $[t_{i-1},t_i]$ сводится к обычной задаче управления или оптимального уравления с фиксированными или свободными краевыми условиямии $[13-15]$.

Минимизирующий функционал на каждом этапе движения в общем случае можно представить в виде

$$I_i = I\left[t_i, t_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}^i, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i\right] \to \min_{\mathbf{u}^i \in \{\mathbf{U}\}} \quad \left(i = 0,1,2,\cdots,k-1\right). \tag{1.9}$$

В случае, когда последовательность обслуживания и моменты встреч с объектами не фиксированы, то первоначальную задачу управления можно сформулировать как задачу нахождения последовательностей объектов обслуживания и моментов встреч, в процессе которых минимизирующий функционал будет зависеть также от последовательности встреч. Решение такой задачи существует, поскольку число возможных последовательностей встреч с объектами конечно. С точки зрения технологического процесса немаловажным критерием качества является также рациональное использование технологического участка $(\mathbf{S} \to \min)$. Этот критерий является геометрическим и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение [8].

Из (1.1), (1,5), (1,6)-(1.9) следует, что сформулированный процесс обслуживания можно рассматривать как результат целенаправленных управляемых движений составных динамических систем (1.1), (1.5) на интервалах времени $[t_{i-1}, t_i]$ $\left(i = 1,2,\cdots,k\right)$ со следующими условиями преемственности между ними

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \mathbf{y}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \boldsymbol{\alpha}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right)\right) \in \boldsymbol{\Phi}^i_\alpha, \left(i = 1,2,\cdots,k\right) \tag{1.10}$$

или

$$\left(\mathbf{q}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{q}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \mathbf{y}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \mathbf{q}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{q}}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right)\right) \in \boldsymbol{\Phi}^i_q, \left(i = 1,2,\cdots,k\right).$$

Условие (1.11) означает, что в момент времени t_i конечное состояние i-ой динамической системы (1.1), (1.5) и начальное состояние $\left(i+1\right)$-ой системы (1.5) принадлежат некоторой $2\left(m+l\right)$-мерной области $\boldsymbol{\Phi}^i_\alpha$, или $2\left(N+m\right)$-мерной области $\boldsymbol{\Phi}^i_q$ $\left(i = 1,2,\cdots,k\right)$. С математической точки зрения (1.10) даёт возможность рассматривать обслуживание манипулятором технологического процесса как управление движением манипулятора с переменной динамикой и с промежуточными состояниями. В работах $\left[11,12,13\right]$ исследованы различные вопросы оптимального управления составных систем и определены условия управляемости.

Важным вопросом для дальнейшего исследования процесса обслуживания манипулятором объектов (технологического участка) являются вопросы управляемости, как на отдельных этапах обслуживания, так и управляемость всей системы в целом, то есть на всем интервале времени.

2. Об управляемости процесса обслуживания. Рассматриваются вопросы управляемости процесса обслуживания, когда динамические характеристики манипулятора во время процесса обслуживания в конечные моменты времени t_i $\left(i=1,2,\cdots,k\right)$ изменяются и динамика движения (1.5) на конечных интервалах времени описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u \text{, где } \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\omega}^i\right)\left(i=1,2,\ldots,k\right), \tag{2.1}$$

k – количество интервалов движения $\left[t_{i-1},t_i\right]\left(i=1,2,\ldots,k\right)$, $\mathbf{x}^i$ $-n$ $\left(n=2l\right)$-мерный фазовый вектор состояния манипулятора $\left(\alpha_j^i = x_j^i, \dot{\alpha}_j^i = x_{l+j}^i, j=1,2,\cdots,l; i=1,2,\cdots,k\right)$, который соответствует движению на интервале времени $t\in\left[t_{i-1},t_i\right]\left(i=1,2,\ldots,k\right)$, $\mathbf{A}_i$ - $\left(n\times n\right)$ – матрица с постоянными элементами на интервале $\left[t_{i-1},t_i\right]$, характеризующая динамические свойства механической модели манипулятора в зависимости от параметра $\boldsymbol{\omega}^i$ (здесь предполагается, что изменение параметра $\boldsymbol{\omega}$ происходит скачкообразно), $\mathbf{b}^i$ – n-мерный постоянный вектор, характеризующий возможность управления на том же интервале времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$ $u\left(t\right)$ – скалярная функция управления, $t\in\left[t_0,T\right]$ (t_0 – начальный, $t_k=T$ – конечный моменты времени). Моменты времени t_i $\left(i=1,2,\ldots,k\right)\left(t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{k-1}<t_k=T\right)$ могут быть фиксированными или определяться из дополнительных условий.

Для простоты исследования предполагаем, что динамики движения объектов заданы, то есть известны решения уравнений (1.1) и положения объектов в каждые моменты времени t_i ($i=1,2,\cdots,k$) и при $l=m$ в n-мерном пространстве определяются фазовой точкой $\left(\mathbf{y}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{y}}^i\left(t_i\right)\right)$, или n-мерным фазовым вектором $\mathbf{z}^i$ ($i=1,2,\cdots,k$), где $\left(y_j^i = z_j^i, \dot{y}_j^i = z_{l+j}^i, j=1,2,\cdots,l; i=1,2,\cdots,k\right)$.

При сделанных предположениях (1.2)-(1.5) краевые условия для задачи обслуживания сформулируем следующим образом. В пространстве состояний заданы произвольные начальные (при $t=t_0$) и конечные (при $t=T, i=k$) положения системы (2.1) в виде

$$\mathbf{x}^1\left(t_0\right)=\mathbf{x}^{1,t_0}, \quad \mathbf{x}^k\left(t_k\right)=\mathbf{x}^k\left(T\right)=\mathbf{x}^{k,\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

а в промежуточные моменты времени t_i $\left(i=1,2,\ldots,k-1\right)$ фазовые векторы составных систем (2.1) должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{x}^i\left(t_i\right)=\mathbf{z}^i\left(t_i\right)=\mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right), \left(i=1,2,\ldots,k-1\right), \tag{2.3}$$

где $\mathbf{z}^i\left(t_i\right)$ – фазовое состояние объектов в моменты времени t_i $\left(i=1,2,\ldots,k-1\right)$. (2.3) является условием преемственности (1.10) в рассматриваемом частном случае и означает, что конец движения манипулятора (2.1) на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$ является началом движения на следующем интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$.

Поскольку на каждом интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ движение описывается системой линейных дифференциальных уравнений (2.1), то при надлежащем выборе управляющей функции $u = u(t)$ $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ из области допустимых управлений, имеем единственную траекторию движения механической системы, удовлетворяющую условиям (2.2), (2.3). Полученные таким образом решения $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}^i(t)\}$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ уравнений (2.1), являются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми, то есть всегда, кроме моментов времени t_i $(i = 1,2,\ldots,k)$, решение $x(t)$ является непрерывно дифференцируемым. Для наглядности, уравнения (2.1) при условиях (2.2), (2.3), для каждого $i(i = 1,2,\cdots,k)$ представим в виде

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}^1 + \mathbf{b}^1 u \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le t_1 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}^2 + \mathbf{b}^2 u \quad \text{при} \quad t_1 \le t \le t_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\mathbf{x}}^{k-1} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{b}^{k-1} u \quad \text{при} \quad t_{(k-2)} \le t \le t_{(k-1)} \\ \dot{\mathbf{x}}^k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}^k + \mathbf{b}^k u \quad \text{при} \quad t_{(k-1)} \le t \le t_k = T \end{array}\right. \tag{2.4}$$

$(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T)$

Как известно [13-15], каждая система из совокупности (2.4)

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u, \quad (i = 1,2,\ldots,k) \tag{2.5}$$

является вполне управляемой на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,\ldots,k)$, если ранг матрицы управляемости равен n, то есть

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\mathbf{b}^i & \mathbf{A}_i\mathbf{b}^i & \mathbf{A}_i^2\mathbf{b}^i & \ldots & \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{b}^i\end{pmatrix} = n \quad (i = 1,2,\ldots,k) \tag{2.6}$$

и не управляемой на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$, если

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\mathbf{b}^i & \mathbf{A}_1\mathbf{b}^i & \mathbf{A}_i^2\mathbf{b}^i & \ldots & \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{b}^i\end{pmatrix} < n \quad (i = 1,2,\ldots,k). \tag{2.7}$$

В случае (2.7) вопросы вполне управляемости (2.5) исследуются в некотором подпространстве (подпространстве управляемости) фазового пространства меньшей размерности [14].

Следуя работам [14-16], приведём определение вполне управляемости автономных динамических систем (2.5). Автономная система (2.5) на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ называется вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любой пары точек $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ и $\mathbf{x}^i(t_i)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ существует ограниченное измеримое управление $u = u(t)$ $t \in [t_{i-1}, t_i]$, переводящее систему (2.5) из точки $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ в точку $\mathbf{x}^i(t_i)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$. Из определения вполне управляемости систем (2.5) и условий (2.2), (2.3), следует обобщённое определение вполне управляемости совокупности (2.4) на интервале времени $t \in [t_0, T]$.

Определение. Совокупность (2.4) на интервале времени $[t_0, T]$ является вполне управляемой, если для любого начального $\mathbf{x}^1(t_0)$ и конечного $\mathbf{x}^k(T)$ состояний существует допустимое управление $u = u(t)$ $t \in [t_0, T]$, переводящее (2.4) из начального состояния в конечное, с обеспечением в промежуточные моменты времени t_i $(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T)$ условий $\mathbf{x}^i(t_i) = \mathbf{x}^{i+1}(t_i)$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$ (управление $u = u(t)$ строится как объединение управлений манипулятором на каждом этапе обслуживания).

Поскольку совокупность (2.4) описывает весь процесс обслуживания манипулятором технологического участка, и каждая система (2.5) является уравнением управляемого движения на интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$, то управляемость технологического процесса в целом зависит от управляемости на каждом интервале. Нетрудно показать, что процесс обслуживания является вполне управляемым, если он вполне управляем на каждом этапе, и не управляемым, если хотя бы одна из систем (2.5) не вполне управляема на своём интервале определения. Для доказательства этого утверждения предполагаем, что на интервале времени $[t_0, T]$ имеется только один промежуточный момент t_1, где происходит изменение динамических характеристик механической системы манипулятора (2.1), движение которого на каждом интервале $[t_0, t_1]$, $[t_1, T]$, ($k = 2$) описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}^1 + \mathbf{b}^1 u \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{2.8}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}^2 + \mathbf{b}^2 u \quad \text{при} \quad t_1 \le t \le t_2 = T\,, \tag{2.9}$$

удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{x}^1(t_0) = \mathbf{x}^1_{t_0}\,,\ \mathbf{x}^1(t_1) = \mathbf{z}^1(t_1) = \mathbf{x}^2(t_1)\,,\ \mathbf{x}^2(t_2) = \mathbf{x}^2_T\ . \tag{2.10}$$

Согласно критерию управляемости, автономные системы (2.8) и (2.9) вполне управляемы на интервалах времени $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, если соответствующие матрицы управляемости имеют максимальный ранг, то есть

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{b}^1 & \ldots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}^1\end{pmatrix} = n \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_1] \tag{2.11}$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{b}^2 & \ldots & \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{b}^2\end{pmatrix} = n \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.12}$$

Здесь, в общем случае, матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и векторы $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$ имеют следующие структуры:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^i & a_{n2}^i & \cdots & a_{nn}^i \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}^i = \left(b_1^i, \ b_2^i, \ \ldots, \ b_n^i\right)^T, \ \left(i = 1,2\right) \tag{2.13}$$

Для удобства дальнейшего исследования вопросов о вполне управляемости на всём промежутке времени $\left[t_0, T\right]$ формально расширим размеры пространства состояний в два раза и введём $2n$-мерный вектор состояния манипулятора $\mathbf{y}$ следующим образом:

$$\mathbf{y} = \left(x_1^1, \ x_2^1, \ \ldots \ x_n^1, \ x_1^2, \ x_2^2, \ \ldots \ ,x_n^2\right)^T \quad \text{при } \left[t_0, t_2\right] \tag{2.14}$$

где

$$\mathbf{y}^1 = \left(x_1^1, \ x_2^1, \ \ldots, \ x_n^1, \ 0, \ 0, \ \ldots, \ 0\right)^T \quad \text{при } t_0 \le t \le t_1 \tag{2.15}$$

$$\mathbf{y}^2 = \left(0, \ 0, \ \ldots, \ 0, \ x_1^2, \ x_2^2, \ \ldots, \ x_n^2\right)^T \quad \text{при } t_1 \le t \le t_2 \tag{2.16}$$

В момент времени t_1, из $\mathbf{x}^1\left(t_1\right) = \mathbf{z}^1\left(t_1\right) = \mathbf{x}^2\left(t_1\right)$ следует, что $\left|\mathbf{y}^1\left(t_1\right)\right| = \left|\mathbf{y}^2\left(t_1\right)\right|$. Введём также блочную матрицу $\mathbf{C}$ с размерностью $\left(2n \times 2n\right)$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{A}_i$ $\left(i = 1,2\right)$ определяются из (2.13),

$$\mathbf{d} = \left(b_1^1, \ b_2^1, \ \ldots, \ b_n^1, \ b_1^2, \ b_2^2, \ \ldots, \ b_n^2\right)^T \tag{2.18}$$

В соответствии с (2.14)- (2.16), матрицу $\mathbf{C}$ (2.17) и вектор $\mathbf{d}$ (2.18) можно представить в виде суммы следующих компонентов:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{d}^1 = \left(b_1^1, b_2^1, \ldots b_n^1, 0, 0, \ldots 0\right)^T \quad \text{при } t_0 \le t \le t_1 \tag{2.19}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d}^2 = \left(0, 0, \ldots 0, b_1^2, b_2^2, \ldots b_n^2\right)^T \quad \text{при } t_1 \le t \le t_2 \tag{2.20}$$

(матрицы $\mathbf{0}$ с нулевыми элементами в (2.17), (2.19), (2.20) имеют размерности $\left(n \times n\right)$)

С учётом (2.14) - (2.20) системы (2.8), (2.9) в общем случае можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{y}}^1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{y}^1 + \mathbf{d}^1 u \ \text{ в } t \in \left[t_0, t_1\right], \tag{2.21}$$

$$\dot{\mathbf{y}}^2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{y}^2 + \mathbf{d}^2 u \ \text{ в } t \in \left[t_1, t_2\right] \tag{2.22}$$

(систему уравнений (2.21) можно рассматривать на всем промежутке времени $t\in[t_0,t_2]$ с нулевыми элементами при $t\in[t_1,t_2]$, а (2.22) – при $t\in[t_0,t_2]$ с нулевыми элементами в $t\in[t_0,t_1]$) .

Объединяя системы (2.21) и (2.22), процесс обслуживания формально можно описать уравнением

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{C}\mathbf{y}+\mathbf{d}u,\quad t\in[t_0,t_2] \tag{2.23}$$

с условиями (2.14)-(2.20).

Поскольку в каждый момент времени $t\in[t_0,t_2]$ (2.23) либо совпадает с системой (2.21), либо с (2.22), то в переменных и параметрах (2.14)-(2.20) матрицы управляемости для систем (2.11) и (2.12) имеют следующие структуры, соответственно:

$$\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{d}^1 & \mathbf{C}_1\mathbf{d}^1 & \mathbf{C}_1^2\mathbf{d}^1 & \dots & \mathbf{C}_1^{n-1}\mathbf{d}^1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{b}^1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}^1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\ \text{при}$$

$$t\in[t_0,t_1] \tag{2.24}$$

и

$$\mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{d}^2 & \mathbf{C}_2\mathbf{d}^2 & \mathbf{C}_2^2\mathbf{d}^2 & \dots & \mathbf{C}_2^{n-1}\mathbf{d}^2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{b}^2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{b}^2\end{bmatrix},$$

$$\text{при } t\in[t_1,t_2] \tag{2.25}$$

Здесь, матрицы $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ имеют размерности $(2n\times n)$, соответственно. С учётом (2.11), (2.12), $\operatorname{rang}\mathbf{M}_1=n$, $\operatorname{rang}\mathbf{M}_2=n$, Объединяя матрицы (2.24) и (2.25), получим:

$$\mathbf{M}^1=\{\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2\}=\{(\mathbf{d}^1,\mathbf{C}_1\mathbf{d}^1,\mathbf{C}_1^2\mathbf{d}^1,\dots,\mathbf{C}_1^{n-1}\mathbf{d}^1),(\mathbf{d}^2,\mathbf{C}_2\mathbf{d}^2,\mathbf{C}_2^2\mathbf{d}^2,\dots,\mathbf{C}_2^{n-1}\mathbf{d}^2)\}=$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22}\end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Блочная матрица $\mathbf{M}^1$ имеет размерность $(2n\times 2n)$,

где $\mathbf{M}_{11}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{b}^1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}^1\end{pmatrix}$

совпадает с матрицей управляемости (2.11) системы (2.8),

а $\mathbf{M}_{22}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{b}^2\end{pmatrix}$ совпадает с матрицей управляемости (2.12) системы (2.9).

Определитель блочно-диагональной матрицы $\mathbf{M}^1$ вычисляется следующим образом [16]

$$\det \mathbf{M}^1 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} = \det\left(\mathbf{M}_{11} \cdot \mathbf{M}_{22}\right) = \det \mathbf{M}_{11} \cdot \det \mathbf{M}_{22} \neq 0\,, \tag{2.27}$$

Следовательно, $\operatorname{rang} \mathbf{M}^1 = 2n$.

По аналогии с (2.11) и (2.12) в качестве матрицы управляемости для объединения (2.23) на всём промежутке времени можно принять матрицу $\mathbf{M}^1$.

Из (2.27) следует, что движение механической системы манипулятора или процесс обслуживания, описываемый объединением (2.23), включающим системы (2.21) и (2.22), вполне управляем на интервале времени $t \in \left[t_0, T\right]$ тогда и только тогда, когда системы (2.8) и (2.9) при (2.10) вполне управляемы на интервалах времени $\left[t_0, t_{1-}\right]$ и $\left[t_{1+}, t_2\right]$, соответственно, и не управляемы, если одна из систем (2.8) или (2.9) не вполне управляема на своём интервале определения, то есть

$$\det \mathbf{M}^1 = \det \mathbf{M}_{11} \cdot \det \mathbf{M}_{22} = 0$$

если $\operatorname{rang} \mathbf{M}_{11}$ или $\operatorname{rang} \mathbf{M}_{22}$ меньше, чем n .

Нетрудно убедиться, что утверждение об управляемости верно и при k промежуточных моментах изменений динамических характеристик манипулятора, то есть определитель матрицы управляемости объединения систем (2.4) определяется следующим образом:

$$\det \mathbf{M}^k = \det \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} = \det\left(\mathbf{M}_{11} \times \mathbf{M}_{22} \times \dots \times \mathbf{M}_{\mathbf{kk}}\right) =$$

$$= \det \mathbf{M}_{11} \cdot \det \mathbf{M}_{22} \cdot \det \mathbf{M}_{33} \cdot \ldots \cdot \det \mathbf{M}_{kk} \neq 0 \tag{2.28}$$

Здесь матрица $\mathbf{M}_{jj}$ $\left(j = 1, 2, \ldots, k\right)$ является матрицей управляемости системы под номером $j\left(j = 1, 2, \cdots, k\right)$ из (2.4) на интервале времени движения $\left[t_{j-1}, t_j\right]$ и имеет размерность $\left(n \times n\right)$, а матрица управляемости $\mathbf{M}^k$ объединённой системы на интервале времени $\left[t_0, t_k\right]$ имеет размерность $\left[kn \times kn\right]$. Следовательно, $\operatorname{rang} \mathbf{M}^k = kn$, если процесс обслуживания на каждом этапе является вполне управляемым, то есть $\det \mathbf{M}_{jj} \neq 0$ $\left(j = 1, 2, \ldots, k\right)$.

Следовательно, процесс обслуживания манипулятором, описываемый совокупностью (2.4) с промежуточными состояниями (2.3) на всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ вполне управляем, если каждый этап обслуживания (2.5) вполне управляем и не управляем, если хотя бы на одном интервале обслуживания (2.4) процесс не управляемый.

Заключение. Описывается абстрактная модель процесса обслуживания, состоящего из манипулятора и других объектов, которые могут быть как подвижными, так и неподвижными. Моделируется процесс, когда манипулятор должен автоматически обслуживать непрерывную работу объектов. Предполагается, что динамические характеристики манипулятора могут изменяться в зависимости от массы переносимого груза или инструмента в некоторые конечные моменты времени. В частном случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы, исследуются вопросы управляемости всего процесса в зависимости от управляемости на каждом этапе движения. Показано, что процесс обслуживания на всём промежутке времени является вполне управляемым, если он управляем на каждом интервале обслуживания и не управляем, если он не управляем хотя бы на одном интервале обслуживания. Получены матрицы управляемости всей системы, объединяющей конечное число составных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с. Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G. Manipulation Robots. M.: Nauka, 1989, 363 p. (in Russian).
2. Хватов Б. Н. Гибкие производственные системы. Расчет и проектирование. Томбов, Изд. ТГТУ, 2007, 117с. Khvatov B.N. Flexible manufacturing systems. Calculation and modelling. Publishing house TITY. 2007, 117 p. (in Russian).
3. Иванов А.А. Проектирование системы автоматизированного машиностроения. Изд. «Инфра-М, Форум», 2004. Ivanov A.A. Modelling of the system of automotive engineering, Pub. Infra-M. Forum, 2004. (in Russian).
4. Соломенцев Ю.М. Технологические основы гибких производственных систем. 2000. pdf. Solomentsev Yu. M. Technological bases for flexible manufacturing systems. 2000. Pdf. (in Russian).
5. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. //Известия АН СССР. МТТ. №4. 1986, с.21-29. Akulenko, L.D., Bolotnik, N.N. Synthesis of Optimal Control of Transport Motions of Manipulation Robots, MTT, №4, 1986, p.21-29. (in Russian).
6. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004, 478 с. Zenkevich S. L. , Yushchenko A. S. Foundations of the control of manipulator robots, Moscow, MSTU after N. Bauman, 2004, 478 p. (in Russian).
7. Динамика управления роботами. /Под. Редакцией Е.И. Юревича. М.: Наука, 1984. 336 с. Yurevich E.I. (Ed) Dynamics of robotic control. Moscow: «Nauka», 1984. 336p. (in Russian).
8. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Известия АН Арм. ССР, Механика. Т.39. №6. 1986. С.39-49. Ghukasyan A.A. A problem of optimal modelling of technological processes served by a manipulator robot. Proceeding AS Arm SSR, Mechanics, V.39, №6, 1986, p39-49.(in Russian).
9. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА. Механика. 2002. №1. С.75-81. Ghukasyan A.A., Matevosyan A.G. About controlled movement of a material, point of unset mass. Proceeding of NAS RA, Mechanics. V.55. №1. 2002, с.75-81.(in Russian).

10. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сборнике научных трудов «Математический анализ и его приложения» АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван 2003, вып.3, с.29-40. Ghukasyan A.A., Matevosyan A. G. A problem of the control of the movement of the changeable mass point. Mathematical analysis and its attachments, Collection of scientific works, ASPU after Kh. Abovyan, Yerevan, 2003, № 3, p. 29-40. (in Russian).
11. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами. //ДАН СССР. 1967. Т.176. №4. С.754-756. Velichenko V.V. Optimal control of composite systems. Dokl. Akad. Nauk SSSR, V.176. №4.1967. p.754-756., (in Russian).
12. Величенко В.В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями. //ДАН СССР. 1967. Т.174. №5. С.1011-1013. Velichenko V.V. Optimality conditions in the problems of control with intermediate conditions. Dokl. Akad. Nauk SSSR,V.174. №5. 1967, p.1011-1013. (in Russian).
13. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем. М.: Наука, 2016. 230 с. Barseghyan V.R. Control of compound dynamic systems, Moscow, Nauka, 2016, 230 p. (in Russian).
14. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с. Krasovskii N.N The Theory of Motion Control. Moscow: Nauka,1968, 475 p. (in Russian).
15. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 551с. Roytenberg Ya. N. Automatic control, Moscow, Nauka, 1978, 551p. (in Russian).
16. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с. Lee E.B, Markus L. Foundations of optimal control theory M.: Nauka, 1972, 574 p. (in Russian).
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560с. Hantmaher F.R. Theory of matrices. Moscow, physico-mathematical literature, 2004, 560 p. (in Russian).
18. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83. Ghukasyan A.A On the kinematics of multilink manipulator motion with elastic connecting nodes and elastic links. // Proceeding of NAS RA, Mechanics. 2014. V.67. №3. P.68-83. (in Russian).
19. Гукасян А.А. Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.316-324. Ghukasyan A.A. On Kinematic Control of Elastic Two-Link Manipulator Clamp Motion. // Reports, NAS Armenia. 2014. V.114. № 4. P.316-324 . (in Russian).
20. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.53-64. Ghukasyan A.A. On a spatial position and deformation of manipulator elastic links// Proceeding of NAS RA, Mechanics. 2014. V.67. №4. P.53-64.(in Russian).

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апресович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Горисского Государственного университета, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **E-mail:** ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.03.2017