ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика

УДК 539.3

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Алексанян Р.К.

Ключевые слова: круглый стержень, поперечное сечение, крутильный момент, круговое кольцо, функция напряжений, периодичность, частное решение, цилиндрическая поверхность.
Բանալի բառեր: ձող, ընդլայնական հատվածք, ոլորող մոմենտ, շրջանային օղակ, լարումների ֆունկցիա, պարբերականություն, մասնակի լուծում, գլանային մակերևույթ
Key words: round bar, cross section, torsional moment, circular ring, the stress function, cylindrical surface, particular solution.

Ալեքսանյան Ռ.Կ.
Շրջանային օղակի տեսքով ընդլայնական հատվածքի տեսք ունեցող պրիզմատիկ ձողի ոլորումը

Աշխատանքում դիտարկվում է համասեռ իզոտրոպ նյութից պատրաստված պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիր, ձողի ճակատային հատվածներում կիրարված մոմենտների ազդեցության դեպքում: Պրիզմատիկ ձողը սահմանափակված է R_1 ներքին և R_2 արտաքին շառավիղներով համառանցք գլանային մակերևույթներով: Կառուցված է ձողի ոլորման համապատասխան մաթեմատիկական եզրային խնդրի ընդհանուր լուծումը՝ Պուասոնի հավասարման մասնակի լուծման և համասեռ հավասարման ընդհանուր, պարբերական լուծումների գումարի տեսքով: Կառուցված լուծումներից սահմանային անցումով ստացվում է հոծ գլանային ձողի ոլորման խնդրի լուծումը:

Alexanyan R.K.
Torsion of prismatic bar with cross-section in a form of circular ring

In the paper the torsion problem is considered for homogeneous isotropic bar under action of a moment applied at the bar interfaces. The cross-section in the bar is a circular ring with internal and external radiuses R_1 and R_2. The general solution of the boundary problem under consideration is constructed as the sum of particular solution of Poisson's equation and periodic solutions of homogeneous equation. In partial case from the obtained solutions with a limiting transition, the solution of torsional problem of the solid cylinder is obtained.

Рассмотрена задача кручения однородного изотропного стержня под действием приложенного на торцах момента. Поперечное сечение стержня представляет собой круговое кольцо. Общее решение математической краевой задачи построено в виде суммы частного решения уравнения Пуассона и периодических решений однородного уравнения. Из полученных решений предельным переходом получается решение задачи кручения сплошного цилиндра.

Введение. В задачах о кручении стержней произвольного сечения получено много аналитических результатов, которые, безусловно, сыграли большую роль в современных численных расчётах сложных математических задач. Результаты исследований о кручении упругих стержней без доказательства приведены в нескольких фундаментальных книгах [7÷10], причём, к круговому сечению относится лишь монография [11]. Наверно, это потому, что в случае стержня с круговым сечением, сечения остаются плоскими.

В предлагаемой работе рассматривается задача о кручении призматического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца моментами, приложенными на торцевых сечениях стержней.

1. Постановка задачи и построение общего решения.

Известно, что при определённых предположениях решение задачи кручения сводится к интегрированию уравнения Пуассона [1-5]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2G\vartheta\,, \tag{1.1}$$

где $F(x,y)$ – искомая функция напряжений при кручении, G – модуль сдвига материала стержня, ϑ – относительный угол закручивания.

Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} при помощи функции напряжений $F(x,y)$ определяются формулами:

$$\tau_{xz}=\frac{\partial F}{\partial y},\qquad \tau_{yz}=-\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Решение однородного уравнения

$$\Delta\Phi=0, \tag{1.3}$$

соответствующее уравнению (1.1), ищем в виде [6]

$$\Phi(x,y)=A(x+\delta y)^{\lambda}.$$

Подставляя (1.4) в (1.3), для δ получим уравнение

$$\delta^2+1=0\Rightarrow\delta=\pm i\,.$$

Решение (1.3) представляется в виде суммы независимых решений

$$\Phi(x,y)=A(x+iy)^{\lambda}+B(x-iy)^{\lambda} \tag{1.4}$$

или для удобства дальнейших рассуждений представим в полярных координатах

$$\Phi(x,y)=r^{\lambda}\left[A(\cos\lambda\varphi+i\sin\lambda\varphi)+B(\cos\lambda\varphi-i\sin\lambda\varphi)\right]. \tag{1.5}$$

Используя периодичность функции $\Phi(x,y)$, получим следующие условия для определения параметра λ:

$$\left[\begin{array}{l}\sin\lambda(\varphi+\pi)\sin\lambda\pi=0\\ \cos\lambda(\varphi+\pi)\sin\lambda\pi=0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\sin\lambda\pi=0,\ \lambda_k\pi=k\pi,\ \lambda_k=k,\ k\in Z$$

На основании (1.5) будем иметь:

$$\Phi(x,y)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k r^k+a_{-k}r^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(b_k r^k-b_{-k}r^{-k}\right)\sin k\varphi\right], \tag{1.6}$$

где введены обозначения:

$$\begin{cases}A_k+B_k=a_k\\ A_k-B_k=-ib_k\end{cases}\qquad \begin{cases}A_{-k}+B_{-k}=a_{-k}\\ A_{-k}-B_{-k}=-ib_{-k}\end{cases}$$

Общее решение уравнения (1.1) имеет вид:

$$F(x,y)=F_0(x,y)+\Phi(x,y)\,. \tag{1.7}$$

Частное решение $F_0(x,y)$ ищем в виде:

$$F_0(x,y)=A\left(x^2+y^2\right)+D\ln r\,. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.1), получим:

$$A=-\frac{G\vartheta}{2},\quad F_0(x,y)=-\frac{G\vartheta}{2}r^2+D\ln r\,.$$

Функция напряжений $F\left(x,y\right)$ представляется в виде:

$$F\left(x,y\right)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k r^k+a_{-k}r^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(b_k r^k-b_{-k}r^{-k}\right)\sin k\varphi-\frac{G\vartheta}{2}r^2+D\ln r\right] \qquad (1.9)$$

2. Обсуждение граничных условий на цилиндрических поверхностях стержня.

Удовлетворим граничным условиям на контурах L_2 и L_1. Следуя работам [2-4], граничные условия берём в виде

а) $F\left(x,y\right)_{r=R_1}=K_1 \qquad F\left(x,y\right)_{r=R_2}=0$

и наряду – равносильные с этими, вторую возможную запись граничных условий:

б) $F\left(x,y\right)_{r=R_1}=0 \qquad F\left(x,y\right)_{r=R_2}=K_2$.

На основании (1.9) в случае а), удовлетворяя на контуре $r=R_2$ условию

$$F\left(x,y\right)_{r=R_2}=0, \qquad (2.1)$$

получим

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k R_2^k+a_{-k}R_2^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(b_k R_2^k-b_{-k}R_2^{-k}\right)\sin k\varphi\right]=\frac{G\vartheta}{2}R_2^2-D_a\ln R_2, \qquad (2.2)$$

откуда

$$a_0=\frac{G\vartheta}{2}R_2^2-D_a\ln R_2, \qquad \begin{cases} a_k R_2^k+a_{-k}R_2^{-k}=0 \\ b_k R_2^k-b_{-k}R_2^{-k}=0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Удовлетворяя на контуре $L_1\left(r=R_1\right)$ условию а)

$$F\left(x,y\right)\Big|_{r=R_1}=K_1, \qquad (2.4)$$

получим

$$a_0=\frac{G\vartheta}{2}R_1^2-D_a\ln R_1+\mathrm{K}_1, \qquad \begin{cases} a_k R_1^k+a_{-k}R_1^{-k}=0 \\ b_k R_1^k-b_{-k}R_1^{-k}=0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

На основании (2.3) и (2.5) будем иметь:

$$D_a=\frac{G\vartheta}{2}\cdot\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln R_2-\ln R_1}-\frac{K_1}{\ln R_2-\ln R_1}; \qquad \begin{cases} a_k R_2^k+a_{-k}R_2^{-k}=0 \\ a_k R_1^k+a_{-k}R_1^{-k}=0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} b_k R_2^k-b_{-k}R_2^{-k}=0 \\ b_k R_1^k-b_{-k}R_1^{-k}=0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

Определители этих однородных систем –

$$\Delta_2=-\Delta_1=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k\neq 0,$$

следовательно, $a_k=a_{-k}=b_k=b_{-k}=0.$

Функцию напряжений $F\left(x,y\right)$ получим в виде

$$F_a\left(x,y\right)=a_0-\frac{G\vartheta}{2}r^2+D\ln r=\frac{G\vartheta}{2}\left(R_2^2-r^2\right)-D_a\left(\ln R_2-\ln r\right) \qquad (2.7)$$

или

$$F_a\left(x,y\right)=\frac{G\vartheta}{2}\left[R_2^2-r^2-\frac{\ln R_2-\ln r}{\ln R_2-\ln \mathrm{R}_1}\left(R_2^2-R_1^2\right)\right]+K_1\frac{\ln R_2-\ln r}{\ln R_2-\ln \mathrm{R}_1}. \qquad (2.8)$$

В случае б) на основании (1.9), удовлетворяя на контуре $r = R_1$ условию

$$F(x,y)\Big|_{r=R_1} = 0\,, \tag{2.1)б}$$

получим

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k R_1^k - a_{-k}R_1^{-k}\right)\cos\varphi + \left(b_k R_1^k - b_{-k}R_1^{-k}\right)\sin\varphi\right] - \frac{G\vartheta}{2}R_1^2 + D_б \ln R_1 = 0 \qquad (2.2)_б$$

$$a_0 = \frac{G\vartheta}{2}R_1^2 - D_б \ln R_1 \qquad \begin{cases} a_k R_1^k + a_{-k}R_1^{-k} = 0 \\ b_k R_1^k - b_{-k}R_1^{-k} = 0 \end{cases} \qquad (2.3)_б$$

Удовлетворяя на L_2 условию

$$F(x,y)\Big|_{r=R_2} = k_2\,, \qquad (2.4)_б$$

получим

$$a_0 = \frac{G\vartheta}{2}R_2^2 - D_б \ln R_2 + k_2\,, \qquad \begin{cases} a_k R_2^k + a_{-k}R_2^{-k} = 0 \\ b_k R_2^k - b_{-k}R_2^{-k} = 0 \end{cases} \qquad (2.5)_б$$

На основании (2.3)б и (2.5)б будем иметь: $a_k = a_{-k} = b_k = b_{-k}$ и

$$D_б = \frac{G\vartheta}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2 - \ln R_1} + \frac{k^2}{\ln R_2 - \ln R_1}\,. \qquad (2.6)_б$$

Функцию напряжений $F(x,y)$ получим в виде

$$F_б(x,y) = a_0 - \frac{G\vartheta}{2}r^2 + D_б \ln r = \frac{G\vartheta}{2}\left(R_2^2 - r^2\right) - D_б\left(\ln R_2 - \ln r\right) + k_2 \qquad (2.7)_б$$

или

$$F_б(x,y) = \frac{G\vartheta}{2}\left[R_2^2 - r^2 - \frac{\ln R_2 - \ln r}{\ln R_2 - \ln R_1}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right] + k_2\frac{\ln r - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\,. \qquad (2.8)_б$$

3. Синхронизация полученных напряжений. На основании (1.2), (2.7) и (2.7)б для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в случаях а) и б) получим следующие значения:

$$\tau_{xz}^{(a)} = \frac{\partial F_a}{\partial y} = y\left(-G\vartheta + \frac{D_a}{r^2}\right); \qquad \tau_{yz}^{(a)} = -\frac{\partial F_a}{\partial x} = x\left(-G\vartheta + \frac{D_a}{r^2}\right) \qquad (3.1)$$

$$\tau_{xz}^{(б)} = -\frac{\partial F_б}{\partial y} = y\left(-G\vartheta + \frac{D_a}{r^2}\right); \qquad \tau_{yz}^{(б)} = -\frac{\partial F_б}{\partial x} = -x\left(-G\vartheta + \frac{D_б}{r^2}\right) \qquad (3.2)$$

Напряжения, определяемые по формулам (3.1) или (3.2), определяют одно и то же напряжённое состояние скручиваемого стержня, следовательно, должны выполняться следующие равенства:

$$\tau_{xz}^{(a)} = \tau_{xz}^{(б)}, \qquad \tau_{yz}^{(a)} = \tau_{yz}^{(б)} \qquad (3.3)$$

или

$$y\left(-\vartheta G + \frac{D_a}{r^2}\right) = y\left(-\vartheta G + \frac{D_б}{r^2}\right); \qquad -x\left(-\vartheta G + \frac{D_a}{r^2}\right) = -x\left(-\vartheta G + \frac{D_б}{r^2}\right), \qquad (3.4)$$

из (3.3) следует:

$$D_a = D_б \;\Rightarrow\; k_2 = -k_1 \qquad (3.5)$$

Граничные условия на свободных от внешних нагрузок внутренней и внешней цилиндрических поверхностях имеют вид:

$$\left(\tau_{xz}\cos(nx)+\tau_{yz}\cos(ny)\right)\Big|_{L_1}=0\,; \qquad \left(\tau_{xz}\cos(nx)+\tau_{yz}\cos(ny)\right)\Big|_{L_2}=0\,. \tag{3.6}$$

Удовлетворяя этим двум условиям в рассмотренных двух случаях а) и б), получим:

в случае а)

$$\left(\tau_{xy}^{(a)}\cos(nx)+\tau_{yz}^{(a)}\cos(ny)\right)\Big|_{r=R_1}=\left[y\cos(nx)-x\cos(ny)\right]\Big|_{r=R_1}\left(-\vartheta G+\frac{D_a}{R_1^2}\right)=0\,,$$

откуда $D_a=\vartheta G R_1^2$.

$$\left(\tau_{xz}^{(a)}\cos(nx)+\tau_{yz}^{(a)}\cos(ny)\right)\Big|_{r=R_2}=\left[y\cos(nx)-x\cos(ny)\right]\Big|_{r=R_2}\left(-\vartheta G+\frac{D_a}{R_2^2}\right)=0,$$

откуда $D_a=\vartheta G R_2^2$.

В случае б) имеем:

$$\left[y\cos(nx)-x\cos(ny)\right]\Big|_{R=R_1}\left(-\vartheta G+\frac{D_б}{R_1^2}\right)=0\Rightarrow D_б=\vartheta G R_1^2\,,$$

$$\left[y\cos(nx)-x\cos(ny)\right]\Big|_{R=R_2}\left(-\vartheta G+\frac{D_б}{R_2^2}\right)=0\Rightarrow D_б=\vartheta G R_2^2\,.$$

Из полученных соотношений следуют два возможных случая, равных между собой, значений D_a и $D_б$:

$$1.\ D_a=D_б=\vartheta G R_1^2\,,\quad 2.\ D_a=D_б=\vartheta G R_2^2\,. \tag{3.7}$$

Выбор одного из этих случаев связан с возможностью получить от общего решения задачи кручения призматического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца решение задачи кручения стержня с круговым поперечным сечением. На основании этого предположения

$$D_a=D_б=\vartheta G R_1^2 \tag{3.8}$$

или

$$\frac{G\vartheta}{2}\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln R_2-\ln R_1}-\frac{k_1}{\ln R_2-\ln R_1}=\vartheta G R_1^2\,,$$

откуда имеем:

$$K_1=\frac{G\vartheta}{2\pi}S_2\left(1-S+S\ln S\right),\quad S_1=\pi R_1^2\quad S_2=\pi R_2^2,\ S=\frac{S_1}{S_2} \tag{3.9}$$

В частном случае, когда $R_1\to 0$, на основании (3.8), (2.7) или (2.7)б получим функцию напряжений при кручении призматического стержня с круговым поперечным сечением

$$F(x,y)=\frac{G\vartheta}{2}\left(R_2^2-r^2\right). \tag{3.10}$$

Заключение. Исследована задача кручения полого призматического стержня кольцевого сечения под действием моментов, приложенных на торцах стержня. Решение задачи относительно функции напряжения представлено в виде суммы частного решения уравнения Пуассона и периодических решений однородного уравнения. Частное решение уравнения Пуассона строится с учётом синхронизации напряжений, полученных в двух эквивалентных вариантах математической граничной задачи.

Этот подход позволяет получить функцию напряжений в случае сплошного кругового стержня, как частный предельный случай, когда радиус внутренней цилиндрической поверхности стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1.Б.Сен-Венан. Мемуары о кручении призм. Мемуары об изгибе призм. М.: Физматлит., 1961. 518с. B.Saint Venant. Memour of Torsion of prisms, Memour of Flexure of prisms. M.: 1961, p.518 (in Russian)

2.Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматлит., 1963. 686с. Arutiunian N.Kh., Abramian B.L. Torsion of elastic bodies. M.: Physmatlit. 1963, p.686. (in Russian)

3.Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Госсоюзиздат Судостр. промышленности, 1958. 369с. Novozhilov V.V. Theory of Elasticity. L.: Izd.Sud.prom. 1958, p.369. (in Russian).

4.Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576с. Timoshenko S.P., Goodier J. Theory of Elasticity. M.: Graw-Hill Book, 1951, 576p. (in Russian).

5.Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с. N. Musrhelishvili Some basic problem of Mathematical Theory of Elasticity. Springer, 1977, 732p.

6.Алексанян Р.К., Чобанян К.С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного сектора. //Прикладная математика. 1977. Т.13. №6. С.90-96. Aleksanyan R.K. Chobanian K.S. Stress character near contact surfase of forsioned anisotropic sector, //Prik,mech., Vol.13, №6, 1977, p.90-96. (in Russian).

7.Gere J.M., Goodno B.J.: Mechanics of Materials, Cengage learning, Stanford, CT, 2009.

8.Gurtin M.E. An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York, 7th edition, 2003.

9.Hearn E.J.: Mechanics of Materials 2 : An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, Butterworth-Heinemann, Oxford, 3rd edition, 1997.

10.Ondr´aˇcek E., Vrbka J., Jan´ıˇcek P.: Mechanika tˇeles : pruˇznost a pevnost II, CERM, Brno, 4th edition, 2006.

11.Brdiˇcka M., Samek L., Sopko B.: Mechanika kontinua, Academia, Praha, third edition, 2005.

Сведения об авторе:

Алексанян Рафик Князевич – Армянский Национальный Университет Строительства и Архитектуры,
Тел.: (+374 93) 51 03 53; **E-mail:** davidaleksanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 14.02.2017