ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №2, 2017 Механика
УДК 539.3

ПЕРВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Закарян Т.В.[1]

Ключевые слова: слоистая пластинка, вынужденные колебания, резонанс, асимптотический метод.
Key words: laminated plate, forced oscillations, resonance, asymptotic method.
Բանալի բառեր: շերտավոր սալ, ստիպողական տատանումներ, ռեզոնանս, ասիմպտոտիկ մեթոդ

Zakaryan T.V.
First dynamic boundary problem of the elasticity theory for three-layered plate
The three-dimensional dynamic problem for orthotropic three-layered plate of symmetric shape is solved. It is assumed that the values of components of stress tensors, harmonically changing during the time, are given on front surfaces. There is a full contact between layers. The general asymptotical solution is obtained. It is shown that if external interactions are polynomials of tangential coordinates then the solution will be mathematically exact. The illustrativ eexample is discussed.

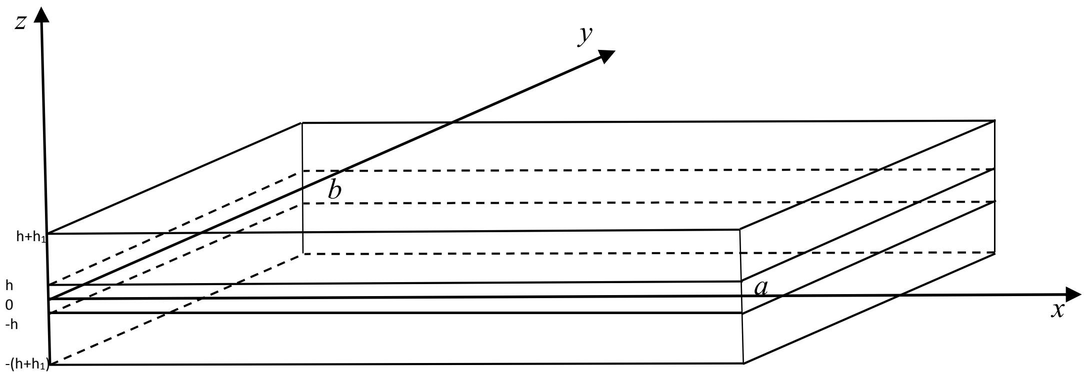
Զաքարյան Տ.Վ.
Առաձգականության տեսության առաջին դինամիկական եզրային խնդիրը եռաշերտ սալի համար
Լուծված է առաձգականության տեսության տարածական դինամիկական խնդիր սիմետրիկ շերտերից բաղկացած եռաշերտ օրթոտրոպ սալի համար: Փաթեթի դիմային մակերևույթների վրա տրված են լարման թենզորի համապատասխան բաղադրիչները, որոնք ըստ ժամանակի փոփոխվում են հարմոնիկորեն: Շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է: Ստացված է ընդհանուր ասիմպտոտիկական լուծումը: Ցույց է տրված, որ երբ արտաքին ազդեցությունները հանդիսանում են տանգենցիալ կոորդինատների նկատմամբ բազմանդամներ, ներքին խնդրի լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ: Արտածված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Բերված է բնութագրիչ օրինակ:

Решена трёхмерная динамическая задача для ортотропной трёхслойной пластинки симметричной структуры. Считается, что на лицевых поверхностях пакета заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, которые изменяются во времени гармонически. Контакт между слоями полный. Получено общее асимптотическое решение. Показано, что если внешние воздействия являются многочленами от тангенциальных координат, решение становится математически точным. Приведён иллюстрационный пример.

Введение. Для решения плоских и пространственных статических и динамических задач балок-полоси пластин оказался эффективным асимптотический метод решения сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений. Решению статических плоских и пространственных задач однослойных и многослойных балок и пластин посвящены монографии [1,2]. Некоторые классы задач о вынужденных колебаниях однослойных и многослойных пластин решены в [3-5]. Первая динамическая краевая задача для изотропной полосы решена в [6], а для ортотропной полосы – в [7]. Первая динамическая пространственная краевая задача, для прямоугольной пластинки решена в [8]. В данной работе решена та же задача для трёхслойной пластинки симметричной структуры.

[1] Работа доложена на Международной школе-конференции молодых учёных, 3-7 октября, 2016, Цахкадзор, Армения.

1.Основные уравнения и постановка краевой задачи. Имеем трёхслойную пластинку, занимающую область $D=\{(x,y,z):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,$ $-(h+h_1)\le z\le h+h_1,\ 2(h+h_1)=H<<l,\ l=\min(a,b)\}$ (фиг.1).



Фиг. 1

Требуется найти решение уравнений движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}^k}{\partial z}=\rho^k\frac{\partial^2u^k}{\partial t^2},\ \frac{\partial\sigma_{xy}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}^k}{\partial z}=\rho^k\frac{\partial^2v}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^k}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}^k}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}^k}{\partial z}=\rho^k\frac{\partial^2w^k}{\partial t^2},\ \ k=I,II,III,$$

при соотношениях упругости (обобщённый закон Гука)

$$\frac{\partial u^k}{\partial x}=a_{11}^k\sigma_{xx}^k+a_{12}^k\sigma_{yy}^k+a_{13}^k\sigma_{zz}^k,\ \frac{\partial v^k}{\partial y}=a_{12}^k\sigma_{xx}^k+a_{22}^k\sigma_{yy}^k+a_{23}^k\sigma_{zz}^k,$$

$$\frac{\partial w^k}{\partial z}=a_{13}^k\sigma_{xx}^k+a_{23}^k\sigma_{yy}^k+a_{33}^k\sigma_{zz}^k,\ \frac{\partial u^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial x}=a_{66}^k\sigma_{xy}^k, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w^k}{\partial x}+\frac{\partial u^k}{\partial z}=a_{55}^k\sigma_{xz}^k,\ \frac{\partial w^k}{\partial y}+\frac{\partial v^k}{\partial z}=a_{44}^k\sigma_{yz}^k.$$

и следующих граничных условиях на лицевых поверхностях пластинки:

$$\sigma_{xz}^I(x,y,h+h_1,t)=\sigma_{xz}^+(\xi,\eta)\exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{yz}^I(x,y,h+h_1,t)=\sigma_{yz}^+(\xi,\eta)\exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{zz}^I(x,y,h+h_1,t)=\sigma_{zz}^+(\xi,\eta)\exp(i\Omega t), \quad (1.3)$$

$$\xi=x/l,\quad \eta=y/l,\quad l=\min(a,b),$$

$$\sigma_{xz}^{III}\left(x,y,-(h+h_1),t\right)=-\sigma_{xz}^{-}\left(\xi,\eta\right)\exp\left(i\Omega t\right),$$
$$\sigma_{yz}^{III}\left(x,y,-(h+h_1),t\right)=-\sigma_{yz}^{-}\left(\xi,\eta\right)\exp\left(i\Omega t\right), \tag{1.4}$$
$$\sigma_{zz}^{III}\left(x,y,-(h+h_1),t\right)=-\sigma_{zz}^{-}\left(\xi,\eta\right)\exp\left(i\Omega t\right),$$

где Ω – частота внешнего воздействия, и условиях полного контакта между слоями

$$\sigma_{xz}^{I}(x,y,h,t)=\sigma_{xz}^{II}(x,y,h,t),\quad \sigma_{yz}^{I}(x,y,h,t)=\sigma_{yz}^{II}(x,y,h,t),$$
$$\sigma_{zz}^{I}(x,y,h,t)=\sigma_{zz}^{II}(x,y,h,t),\quad u^{I}(x,y,h,t)=u^{II}(x,y,h,t), \tag{1.5}$$
$$v^{I}(x,y,h,t)=v^{II}(x,y,h,t),\quad w^{I}(x,y,h,t)=w^{II}(x,y,h,t).$$

$$\sigma_{xz}^{II}(x,y,-h,t)=\sigma_{xz}^{III}(x,y,-h,t),\quad \sigma_{yz}^{II}(x,y,-h,t)=\sigma_{yz}^{III}(x,y,-h,t),$$
$$\sigma_{zz}^{II}(x,y,-h,t)=\sigma_{zz}^{III}(x,y,-h,t),\quad u^{II}(x,y,-h,t)=u^{III}(x,y,-h,t), \tag{1.6}$$
$$v^{II}(x,y,-h,t)=v^{III}(x,y,-h,t),\quad w^{II}(x,y,-h,t)=w^{III}(x,y,-h,t).$$

2. Асимптотическое решение задачи. Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^{k}\left(x,y,z,t\right)=\sigma_{ij}^{k}\left(x,y,z\right)\exp\left(i\Omega t\right),$$
$$\alpha,\beta=x,y,z,\quad i,j=1,2,3,\quad k=I,II,III, \tag{2.1}$$
$$\left(u^{k}(x,y,z,t),v^{k}(x,y,z,t),w^{k}(x,y,z,t)\right)=$$
$$=\left(u_x^{k}(x,y,z),u_y^{k}(x,y,z),u_z^{k}(x,y,z)\right)\exp\left(i\Omega t\right).$$

Перейдя в динамических уравнениях и соотношениях упругости к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi=x/l,\quad \eta=y/l,\quad \zeta=z/H,\ U=u_x/l,\quad V=u_y/l,\quad W=u_z/l, \tag{2.2}$$

и подставив (2.2) в эти преобразованные уравнения, получим сингулярно возмущённую малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему, решение которой складывается из решений внутренней задачи $\left(I^{\text{int}}\right)$ и пограничного слоя $\left(I_b\right)$. Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\sigma_{ij}^{k\,\text{int}}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta)\ ,\qquad i,j=1,2,3,\qquad s=\overline{0,N}$$
$$(U^{k\,\text{int}},V^{k\,\text{int}},W^{k\,\text{int}})=\varepsilon^{s}(U^{k(s)},V^{k(s)},W^{k(s)}),\ k=I,II,III, \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в эту систему и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим непротиворечивую систему для определения величин $\sigma_{ij}^{k(s)},U^{k(s)},V^{k(s)},W^{k(s)}$:

Из этой системы все напряжения можно выразить через перемещения по формулам:

$$\sigma_{13}^{k(s)}=\frac{1}{a_{55}^{k}}\left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\xi}\right),\qquad \sigma_{23}^{k(s)}=\frac{1}{a_{44}^{k}}\left(\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k}\left(\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi}\right),$$

$$\sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k}\left(-A_{23}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right), \qquad (2.4)$$

$$\sigma_{22}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k}\left(-A_{13}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right),$$

$$\sigma_{33}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k}\left(A_{11}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right),$$

где

$$A_{11}^k = a_{11}^k a_{22}^k - \left(a_{12}^k\right)^2,\ A_{12}^k = a_{12}^k a_{33}^k - a_{23}^k a_{13}^k,\ A_{13}^k = a_{11}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{12}^k,\ k = I, II, III$$

$$A_{22}^k = a_{22}^k a_{33}^k - \left(a_{23}^k\right)^2,\ A_{23}^k = a_{13}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{23}^k,\ A_{33}^k = a_{11}^k a_{33}^k - \left(a_{13}^k\right)^2, \qquad (2.5)$$

$$\Delta^k = a_{11}^k A_{22}^k - a_{12}^k A_{12}^k - a_{13}^k A_{23}^k,\quad \mathrm{A}_{ij}^{III} = A_{ij}^I,\ \ \Delta^{III} = \Delta^I,$$

$Q^{k(m)} \equiv 0$ при $m < 0$,

для определения $U^{\mathrm{k}(s)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} = R_U^{k(s)}, \qquad (2.6)$$

$$R_U^{k(s)} = -a_{55}^k\left(\frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta},$$

для определения $V^{\mathrm{k}(s)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} = R_V^{k(s)}, \qquad (2.7)$$

$$R_V^{k(s)} = -a_{44}^k\left(\frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta},$$

для определения $W^{\mathrm{k}(s)}$ имеем уравнение

$$A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta^k \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} = R_W^{k(s)}, \qquad (2.8)$$

$$R_W^{k(s)} = -\Delta^k\left(\frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right) + A_{23}^k \frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^k \frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta},$$

Решениями уравнений (2.6)-(2.8) являются:

$$U^{k(s)} = C_1^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_1^k\zeta + C_2^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_1^k\zeta + U_\tau^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$
$$V^{k(s)} = C_3^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_2^k\zeta + C_4^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_2^k\zeta + V_\tau^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \qquad (2.9)$$
$$W^{k(s)} = C_5^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_3^k\zeta + C_6^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_3^k\zeta + W_\tau^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\gamma_1^k = \Omega_*\sqrt{\rho^k a_{55}^k},\ \gamma_2^k = \Omega_*\sqrt{\rho^k a_{44}^k},\ \gamma_3^k = \Omega_*\sqrt{\rho^k \Delta^k / A_{11}^k},\ \gamma_i^{III} = \gamma_i^I$$

где $U_\tau^{k(s)}$, $V_\tau^{k(s)}$, $W_\tau^{k(s)}$ – частные решения этих уравнений.

Подставив значения $U^{k(s)}$, $V^{k(s)}$, $W^{k(s)}$ в (2.4), для напряжений $\sigma_{13}^{k(s)}, \sigma_{23}^{k(s)}, \sigma_{33}^{k(s)}$ будем иметь:

$$\sigma_{13}^{k(s)} = \Omega_*\sqrt{\rho^k / a_{55}^k}\left(C_1^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_1^k\zeta - C_2^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_1^k\zeta\right) + f_{13}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\sigma_{23}^{k(s)} = \Omega_*\sqrt{\rho^k / a_{44}^k}\left(C_3^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_2^k\zeta - C_4^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_2^k\zeta\right) + f_{23}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \qquad (2.10)$$

$$\sigma_{33}^{k(s)} = \Omega_*\sqrt{\rho^k A_{11}^k / \Delta^k}\left(C_5^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_3^k\zeta - C_6^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_3^k\zeta\right) + f_{33}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

где

$$f_{13}^{k(s)} = \frac{1}{a_{55}^k}\left(\frac{\partial U_\tau^{k(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad f_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k}\frac{\partial V_\tau^{k(s)}}{\partial\zeta} + \frac{1}{a_{55}^k}\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\eta},$$
$$f_{33}^{k(s)} = \frac{A_{11}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W_\tau^{k(s)}}{\partial\zeta} - \frac{1}{\Delta^k}\left(A_{23}^k\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi} + A_{13}^k\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right), \qquad (2.11)$$

Удовлетворив условиям (1.3)-(1.6) и решив соответствующую алгебраическую систему, определим все функции $C_j^{k(s)}$:

$$C_1^{I(s)} = \frac{1}{B_1^I}(\mathrm{d}_1^{(s)} + B_2^I C_2^{I(s)}),\ C_1^{II(s)} = \frac{1}{2g_1}\left(m_1\left(d_{16}^{(s)} + d_{13}^{(s)}\right) + m_2\left(b_1 d_{10}^{(s)} - d_7^{(s)}\right)\right),$$

$$C_1^{III(s)} = \frac{1}{B_1^I}(\mathrm{d}_4^{(s)} - B_2^I C_2^{III(s)}),\ C_2^{I(s)} = \frac{1}{m_2}\left(d_{13}^{(s)} + B_2^{II0} C_1^{II(s)} + B_1^{II0} C_2^{II(s)}\right),$$

$$C_2^{II(s)} = \frac{1}{2g_2}\left(m_1\left(d_{16}^{(s)} - d_{13}^{(s)}\right) + m_2\left(b_1 d_{10}^{(s)} + d_7^{(s)}\right)\right), \qquad (2.12)$$

$$C_2^{III(s)} = \frac{b_1}{m_1}\left(d_{10}^{(s)} - B_1^{II0} C_1^{II(s)} - B_2^{II0} C_2^{II(s)}\right),$$

$$C_3^{I(s)} = \frac{1}{B_3^I}(d_2^{(s)} + B_4^I C_4^{I(s)}),\quad C_3^{II(s)} = \frac{1}{2g_3}\left(m_3\left(d_{17}^{(s)} + d_{14}^{(s)}\right) + m_4\left(b_2 d_{11}^{(s)} - d_8^{(s)}\right)\right),$$

$$C_3^{III(s)} = \frac{1}{B_3^I}(d_5^{(s)} - B_4^I C_4^{III(s)}),\ C_4^{I(s)} = \frac{1}{m_4}\left(d_{14}^{(s)} + B_4^{II0} C_3^{II(s)} + B_3^{II0} C_4^{II(s)}\right),$$

$$C_4^{II(\mathrm{s})}=\frac{1}{2g_4}\Big(m_3\left(d_{17}^{(\mathrm{s})}-d_{14}^{(\mathrm{s})}\right)+m_4\left(b_2 d_{11}^{(\mathrm{s})}+d_8^{(\mathrm{s})}\right)\Big),$$

$$C_4^{III(\mathrm{s})}=\frac{b_2}{m_3}\left(d_{11}^{(\mathrm{s})}-B_3^{II0}C_3^{II(\mathrm{s})}-B_4^{II0}C_4^{II(\mathrm{s})}\right),$$

$$C_5^{I(\mathrm{s})}=\frac{1}{B_5^I}(\mathrm{d}_3^{(\mathrm{s})}+B_6^I C_6^{I(\mathrm{s})}),\quad C_5^{II(\mathrm{s})}=\frac{1}{2g_5}\Big(m_5\left(d_{18}^{(\mathrm{s})}+d_{15}^{(\mathrm{s})}\right)+m_6\left(b_3 d_{12}^{(\mathrm{s})}-d_9^{(\mathrm{s})}\right)\Big),$$

$$C_5^{III(\mathrm{s})}=\frac{1}{B_5^I}(\mathrm{d}_6^{(\mathrm{s})}-B_6^I C_6^{III(\mathrm{s})}),\ C_6^{I(\mathrm{s})}=\frac{1}{m_6}\left(d_{15}^{(\mathrm{s})}+B_6^{II0}C_5^{II(\mathrm{s})}+B_5^{II0}C_6^{II(\mathrm{s})}\right),$$

$$C_6^{II(\mathrm{s})}=\frac{1}{2g_6}\Big(m_5\left(d_{18}^{(\mathrm{s})}-d_{15}^{(\mathrm{s})}\right)+m_6\left(b_3 d_{12}^{(\mathrm{s})}+d_9^{(\mathrm{s})}\right)\Big),$$

$$C_6^{III(\mathrm{s})}=\frac{b_3}{m_5}\left(d_{12}^{(\mathrm{s})}-B_5^{II0}C_5^{II(\mathrm{s})}-B_6^{II0}C_6^{II(\mathrm{s})}\right),$$

где

$$m_1=\frac{\sin\gamma_1^I(\zeta_1-\zeta_0)}{\cos\gamma_1^I\zeta_1},\quad m_2=\frac{\cos\gamma_1^I(\zeta_1-\zeta_0)}{\cos\gamma_1^I\zeta_1},$$

$$b_1=\sqrt{\frac{a_{55}^I\rho^{II}}{a_{55}^{II}\rho^I}},\ b_2=\sqrt{\frac{a_{44}^I\rho^{II}}{a_{44}^{II}\rho^I}},\ b_3=\sqrt{\frac{A_{11}^{II}\rho^{II}\Delta^I}{A_{11}^I\rho^I\Delta^{II}}},$$

$$g_1=\frac{1}{2\cos\gamma_1^I\zeta_1}\Big[(\mathrm{b}_1-1)\cos(\gamma_1^I\zeta_1-(\gamma_1^I+\gamma_1^{II})\zeta_0)+(\mathrm{b}_1+1)\cos(\gamma_1^I\zeta_1+(\gamma_1^{II}-\gamma_1^I)\zeta_0)\Big],$$

$$g_2=\frac{1}{2\cos\gamma_1^I\zeta_1}\Big[(\mathrm{b}_1-1)\sin(-\gamma_1^I\zeta_1+(\gamma_1^I+\gamma_1^{II})\zeta_0)+(\mathrm{b}_1+1)\sin(\gamma_1^I\zeta_1+(\gamma_1^{II}-\gamma_1^I)\zeta_0)\Big],$$

$$(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_3;\gamma_1^i,\gamma_2^i;b_1,b_2),\ (\mathrm{g}_2,\mathrm{g}_4;\gamma_1^i,\gamma_2^i;b_1,b_2),\ (m_1,m_3;\gamma_1^i,\gamma_2^i),\ (m_2,m_4;\gamma_1^i,\gamma_2^i),$$

$$(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_5;\gamma_1^i,\gamma_3^i;b_1,b_3),\ (\mathrm{g}_2,\mathrm{g}_6;\gamma_1^i,\gamma_3^i;b_1,b_3),\ (m_1,m_5;\gamma_1^i,\gamma_3^i),\ (m_2,m_6;\gamma_1^i,\gamma_3^i),$$

$$\begin{aligned}
&B_1^I=\cos\gamma_1^I\zeta_1,\ B_2^I=\sin\gamma_1^I\zeta_1,\quad B_1^{i0}=\cos\gamma_1^i\zeta_0,\ B_2^{i0}=\sin\gamma_1^i\zeta_0,\\
&B_3^I=\cos\gamma_2^I\zeta_1,\ B_4^I=\sin\gamma_2^I\zeta_1,\quad B_3^{i0}=\cos\gamma_2^i\zeta_0,\ B_4^{i0}=\sin\gamma_2^i\zeta_0,\ i=\mathrm{I},\mathrm{II},\\
&B_5^I=\cos\gamma_3^I\zeta_1,\ B_6^I=\sin\gamma_3^I\zeta_1,\quad B_5^{i0}=\cos\gamma_3^i\zeta_0,\ B_6^{i0}=\sin\gamma_3^i\zeta_0,
\end{aligned}\qquad(2.13)$$

$$d_1^{(\mathrm{s})}=\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{55}^I/\rho^I}\left(\sigma_{xz}^+-f_{13}^{I(\mathrm{s})}(\xi,\eta,\zeta_1)\right),d_2^{(\mathrm{s})}=\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{44}^I/\rho^I}\left(\sigma_{yz}^+-f_{23}^{I(\mathrm{s})}(\xi,\eta,\zeta_1)\right),$$

$$d_3^{(\mathrm{s})}=\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I\rho^I}}\left(\sigma_{zz}^+-f_{33}^{I(\mathrm{s})}(\xi,\eta,\zeta_1)\right),\ d_4^{(\mathrm{s})}=-\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{55}^I/\rho^I}\left(\sigma_{xz}^-+f_{13}^{III(\mathrm{s})}(\xi,\eta,-\zeta_1)\right),$$

$$d_5^{(s)} = -\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{44}^I/\rho^I}\left(\sigma_{yz}^- + f_{23}^{III(s)}(\xi,\eta,-\zeta_1)\right),\ d_6^{(s)} = -\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I\rho^I}}\left(\sigma_{zz}^- + f_{33}^{III(s)}(\xi,\eta,-\zeta_1)\right),$$

$$d_7^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{55}^I/\rho^I}\left(f_{13}^{II(s)}(\xi,\eta,\zeta_0) - f_{13}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_0)\right) - \frac{B_1^{I0}}{B_1^I}d_1^{(s)},$$

$$d_8^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{44}^I/\rho^I}\left(f_{23}^{II(s)}(\xi,\eta,\zeta_0) - f_{23}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_0)\right) - \frac{B_3^{I0}}{B_3^I}d_2^{(s)},$$

$$d_9^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I\rho^I}}\left(f_{33}^{II(s)}(\xi,\eta,\zeta_0) - f_{33}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_0)\right) - \frac{B_5^{I0}}{B_5^I}d_3^{(s)},$$

$$d_{10}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{55}^{II}/\rho^{II}}\left(f_{13}^{III(s)}(\xi,\eta,-\zeta_0) - f_{13}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_0)\right) + \frac{B_1^{I0}}{b_1B_1^I}d_4^{(s)},$$

$$d_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{a_{44}^{II}/\rho^{II}}\left(f_{23}^{III(s)}(\xi,\eta,-\zeta_0) - f_{23}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_0)\right) + \frac{B_3^{I0}}{b_2B_3^I}d_5^{(s)},$$

$$d_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^{II}}{A_{11}^{II}\rho^{II}}}\left(f_{33}^{III(s)}(\xi,\eta,-\zeta_0) - f_{33}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_0)\right) + \frac{B_5^{I0}}{b_3B_5^I}d_6^{(s)},$$

$$d_{13}^{(s)} = U_\tau^{II(s)} - U_\tau^{I(s)} - \frac{B_2^{I0}}{B_1^I}d_1^{(s)},\quad d_{14}^{(s)} = V_\tau^{II(s)} - V_\tau^{I(s)} - \frac{B_4^{I0}}{B_3^I}d_2^{(s)},$$

$$d_{15}^{(s)} = W_\tau^{II(s)} - W_\tau^{I(s)} - \frac{B_6^{I0}}{B_5^I}d_3^{(s)},\quad d_{16}^{(s)} = U_\tau^{III(s)} - U_\tau^{II(s)} - \frac{B_2^{I0}}{B_1^I}d_4^{(s)},$$

$$d_{17}^{(s)} = V_\tau^{III(s)} - V_\tau^{II(s)} - \frac{B_4^{I0}}{B_3^I}d_5^{(s)},\quad d_{18}^{(s)} = W_\tau^{III(s)} - W_\tau^{II(s)} - \frac{B_6^{I0}}{B_5^I}d_6^{(s)},$$

Решение будет конечным, если $B_i \neq 0,\ m_i \neq 0,\ g_i \neq 0,\ i = 1,2,3,...,6$. Если же какое-либо из этих величин обращается в ноль, то будет возникать резонанс.

Решение внутренней задачи становится математически точным, если входящие в граничные условия (1.3), (1.4) функции являются многочленами. В качестве иллюстрации приведём решение, соответствующее условиям:

$$\begin{gathered}\sigma_{zz}^+(\zeta_1) = -\mathrm{Z}_1^+ = \mathrm{const},\quad \sigma_{zz}^-(\zeta_1) = -\mathrm{Z}_2^+ = \mathrm{const},\\ \sigma_{xz}^+ = 0,\quad \sigma_{yz}^+ = 0,\ \sigma_{xz}^- = 0,\quad \sigma_{yz}^- = 0,\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$C_5^{I(0)} = \frac{1}{B_5^I}(\mathrm{d}_3^{(0)} + B_6^I C_6^{I(0)}),\quad C_5^{II(0)} = -\frac{1}{2g_5B_5^I\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I\rho^I}}(\mathrm{Z}_1^+ + \mathrm{Z}_2^-),$$

$$C_5^{III(0)} = \frac{1}{B_5^I}(\mathrm{d}_6^{(0)} - B_6^I C_6^{III(0)}),$$

$$C_6^{II(0)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I\rho^I}}\Big[(\mathrm{b}_1-1)\sin(-\gamma_1^I\zeta_1+(\gamma_1^I+\gamma_1^{II})\zeta_0)+$$

$$+(\mathrm{b}_1+1)\sin(\gamma_1^I\zeta_1+(\gamma_1^{II}-\gamma_1^I)\zeta_0)\Big]^{-1}(\mathrm{Z}_1^+-\mathrm{Z}_2^-),$$

$$C_6^{I(0)} = \frac{1}{m_6}\left(d_{15}^{(0)}+B_6^{II0}C_5^{II(0)}+B_5^{II0}C_6^{II(0)}\right), \qquad (2.15)$$

$$C_6^{III(0)} = \frac{b_3}{m_5}\left(d_{12}^{(0)}-B_5^{II0}C_5^{II(0)}-B_6^{II0}C_6^{II(0)}\right), \qquad C_{1,2,3,4}^{I,II,III}=0,$$

$$W^{k(0)} = C_5^{k(0)}(\xi,\eta)\sin\gamma_3^k\zeta + C_6^{k(0)}(\xi,\eta)\cos\gamma_3^k\zeta,$$

$$\sigma_{11}^{k(0)} = -\frac{A_{23}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W^{k(0)}}{\partial\zeta},\quad \sigma_{22}^{k(0)} = -\frac{A_{13}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W^{k(0)}}{\partial\zeta},\quad \sigma_{33}^{k(0)} = \frac{A_{11}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W^{k(0)}}{\partial\zeta},$$

$$u^k=0,\ v^k=0,\ \sigma_{12}^k=0,\quad \sigma_{13}^k=0,\ \ \sigma_{23}^k=0,\ w^k=lW^{k(0)}\exp(i\omega\mathrm{t}),$$

$$\sigma_{xx}^k=\varepsilon^{-1}\sigma_{11}^{k(0)}\exp(i\omega\mathrm{t}),\ \sigma_{yy}^k=\varepsilon^{-1}\sigma_{22}^{k(0)}\exp(i\omega\mathrm{t}),\ \sigma_{zz}^k=\varepsilon^{-1}\sigma_{33}^{k(0)}\exp(i\omega\mathrm{t}),$$

Заключение. Решена пространственная первая динамическая краевая задача теории упругости для трёхслойной ортотропной пластинки симметричной структуры. Асимптотическим методом построен итерационный процесс для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения во внутренней задаче. Показано, что если внешнее воздействие есть многочлен по тангенциальным координатам, то итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение внутренней задачи. Приведён иллюстрационный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. 2015. Singapore. World Scientific Publishing. 376 p. (Русское издание: Москва, Наука, Физматлит. 1997.)
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАНРА. 2005. 468с.(AghalovyanL.A.,Gevorgyan R.S. Nonclassical Boundary-Value Problems of Anisotropic Layered Beams, Plates and Shells.Gitutyun NAS RA 2005. 468p.)
3. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях. //Докл. НАН РА. 1999. Т. 99 №4. С. 315-321.(L.A.Aghalovyan, L.M. Khalatyan Asymptotics of forced vibrations of ortotrop stripe in the mixed boundary conditions.//Reports NAS RA. 1999. V.99. №4. P. 315-321.)
4. Агаловян Л.А., Погосян А.М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Известия НАН РА. Механика. 2005. Т.58. №3. С.36-47.(L.A. Aghalovyan, H.M. Poghosyan. The Forced Vibrations of Two-layers Orthotropic Plate at Coulomb Fraction Between Layers. // Proceeding of NAS RA Mechanics 2005. V.58. №3. P.36-47.)

5. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН РА. 2006. Т.106. №4. С. 312-318. (L.A. Aghalovyan, R.Zh. Hovhannisyan. On the Character of Forced Vibrations of the Three-layered Orthotropic Plates in the Mixed-Boundary Problem.// ReportsNASRA. 2006. V.106. №4. P. 312-318.)
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. //Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т.72. Вып.4. С.633-634. (L.A.Aghalovyan, R.S. Gevorgyan. Asymptotic Solution of the First Boundary-Value Problem of the Theory of Elasticity of the Forced Vibrations of an Isotropic Strip.//Journal of Applied Mathematics and Mechanics V.72 2008. pp.452-460.)
7. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. // В сб.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван: 2007. С.21-27. (L.A. Aghalovyan, T.V. Zakaryan. An asymptotic solution of dynamic first boundary problem of the theory of elasticity for orthotropic strip.//Topical problems of continuum mechanics. Yerevan.2007. P. 21-27.)
8. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН РА. 2009. Т.109. №4. С.304-309. (L.A. Aghalovyan, T.V. Zakaryan. On Solution of the First Dynamic 3D Boundary Problem for Orthotropic Rectangular Plate.//ReportsNASRA. 2009. V.109. №4. P.304-309.)

Сведения об авторе:

Закарян Татевик Владиковна – научн.сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37410) 63 88 82, **E-mail:** zaqaryantatevik@mail.ru

Поступила в редакцию 12.10.2016