

УДК 536.21; 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ  
СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ  
ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

**Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.**

**Ключевые слова:** Неклассическая краевая задача, асимптотический метод, внутренняя задача, контакт между слоями.

**Keywords:** Thenon-classicalboundary value problem, asymptotic method, theinternal task, contact between the layers.

**Բանալի բառեր:** Ոչ դասական եզրային խնդիր, ասիմպտոտիկական եղանակ, ներքին խնդիր, շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտ:

**Աղաղվյան Լ.Ա., Գևորգյան Ռ.Ս.**

**Երկշերտ սալերի համար ստացված ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության ոչ կապակցված ոչ դասական և զրային պայմաններով խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները**

Հաշվի առնելով ոչ դասական եզրային խնդիրների կիրառական նշանակությունը, մասնավորապես սեյսմոլոգիայում, երկշերտ օրթոտրոպ սալի համար ասիմպտոտիկ եղանակով կառուցված են Ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության ոչ կապակցված ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների լուծումները: Շերտերի միջև կոնտակտը կարող է լինել լրիվ և ոչ լրիվ: Բերված են վերլուծական օրինակներ:

**Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S.**

**Asymptotic solutions of stationary problems of thermal conductivity and thermoelasticity with nonclassical boundary conditions for the two-layer plates with full and incomplete contact layers**

The practical importance of the neoclassical solutions is well known. The solutions of the nonclassical boundary value problems of stationary heat conduction and no connected thermoelasticity theory are constructed for the orthotropic two-layer plates. Examples are given together with their analysis.

В последние годы проявляется повышенный интерес к неклассическим краевым задачам математической физики, когда по какой-либо причине на одной части поверхности области, занимаемой материальным телом, граничных условий задано больше, чем необходимо для краевой задачи данного класса, а на другой части – меньше, чем необходимо или вообще не заданы [1–3]. Возникновение таких задач, в частности, связано с изучением напряжённо-деформированных состояний Литосферных плит Земли [6]. Одним из эффективных методов решения подобных задач является асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений [4–7]. В настоящей работе асимптотическим методом строятся общие интегралы в виде рекуррентных формул для стационарной задачи теплопроводности и несвязанной теории термоупругости. Удовлетворив неклассическим смешанным граничным условиям, однозначно определены все функции интегрирования, позволяющие вычислить температурную функцию, а также компоненты тензора напряжений и вектора перемещения двухслойной ортотропной пластины переменной толщины. Задача, в частности, может моделировать напряжённо-деформированное состояние земной коры в зоне коллизии тектонических плит Земли [1–3,6,7].

**1. Постановка краевых задач и общий интеграл разрешающих уравнений.**

Рассмотрим двухслойный пакет пластин из ортотропных материалов, слои которого ограничены гладкими непересекающимися поверхностями и относительно выбранной прямоугольной системы координат  $Oxuz$  удовлетворяют условиям

$\varphi_1(x, y) > \varphi_0(x, y) > \varphi_2(x, y)$ ,  $h = \text{Sup}|\varphi_1 - \varphi_2| \ll l$ ,  $-\infty < (x, y) < \infty$ , где  $l$  – некоторый характерный продольный размер тонкого пакета.

Пусть на лицевой поверхности  $z = \varphi_1(x, y)$  двухслойного пакета заданы неклассические граничные условия задачи стационарной теплопроводности (изменение температуры и плотность потока теплоты),

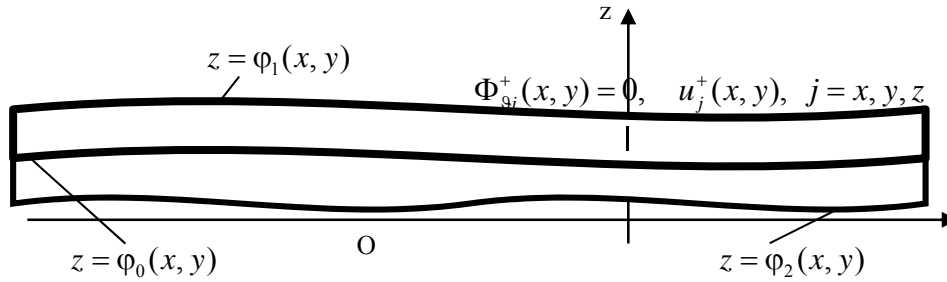
$$z = \varphi_1(x, y): \theta = \theta^+, \quad \theta = T - T_0$$

$$-\frac{q_x}{\Lambda_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{q_y}{\Lambda_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{q_z}{\Lambda_1} = q_{\varphi_1}^+, \quad q_x = -\lambda_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (x, y, z; 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

а также неклассические механические граничные условия одновременно и первой, и второй краевых задач несвязанной теории термоупругости

$$z = \varphi_1(x, y): \frac{\sigma_{jx}}{\Lambda_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\sigma_{jy}}{\Lambda_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\sigma_{jz}}{\Lambda_1} = \Phi_{\varphi_j}^+, \quad u_j(\varphi_1) = u_x^+, \quad j = x, y, z$$

$$\Lambda_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right)^2}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (1.2)$$



Фигура

а на противоположной лицевой поверхности  $z = \varphi_2(x, y)$  пакета никакие условия не заданы. (Задачи с такими или с аналогичными граничными условиями считаются неклассическими краевыми задачами теории упругости). Требуется определить температурное поле и напряженно-деформированное состояние пакета, когда между слоями выполняются условия полного теплового

$$z = \varphi_0(x, y): \theta^{(1)}(z = \varphi_0) = \theta^{(2)}(z = \varphi_0)$$

$$\left(q_x^{(1)} - q_x^{(2)}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \left(q_y^{(1)} - q_y^{(2)}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - \left(q_z^{(1)} - q_z^{(2)}\right) = 0 \quad (1.3)$$

и полного механического

$$z = \varphi_0:$$

$$\left(\sigma_{jx}^{(1)} - \sigma_{jx}^{(2)}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \left(\sigma_{jy}^{(1)} - \sigma_{jy}^{(2)}\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - \left(\sigma_{jz}^{(1)} - \sigma_{jz}^{(2)}\right) = 0, \quad j = x, y, z \quad (1.4)$$

$$U_j = u_j^{(1)} - u_j^{(2)} = 0, \quad j = x, y, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)}$$

контактов, а также неполного механического контакта краевых задач теории упругости [8]

$$z = \varphi_0 : U_z = u_z^{(1)}(\varphi_0) - u_z^{(2)}(\varphi_0) = 0, \quad U_x = u_x^{(1)}(\varphi_0) - u_x^{(2)}(\varphi_0) \neq 0, \quad (x, y)$$

$$\Lambda_0 T_x = \sigma_{xz}^{(i)}(\varphi_0) - \sigma_{xx}^{(i)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \sigma_{xy}^{(i)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \quad (x, y), \quad i = 1, 2 \quad (1.5)$$

$$\Lambda_0 T_z^{(s)} = \sigma_{zz}^{(i,s)}(\varphi_0) - \sigma_{xz}^{(i,s)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \sigma_{yz}^{(i,s)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad i = 1, 2$$

а) по аналогии с гипотезой Винклера – Фусса

$$\sigma_{zz}^{(1)}(z = \varphi_0) = \sigma_{zz}^{(2)}(z = \varphi_0), \quad u_z^{(1)}(z = \varphi_0) = u_z^{(2)}(z = \varphi_0)$$

$$u_x^{(1)}(z = \varphi_0) - u_x^{(2)}(z = \varphi_0) = U_x \quad (x, y) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)}(z = \varphi_0) = \sigma_{xz}^{(2)}(z = \varphi_0) = T_x = \mu_x U_x \quad (x, y)$$

(эта модель предполагает в зоне контакта шероховатых поверхностей образование плотного слоя толщины  $h^{im}$ , который подвергается сдвигу вдоль поверхности  $z = \varphi_0(x, y)$  контакта на величину  $U = (+u_x) - (-u_x)$ , где  $(\pm u_x)(x, y)$  – перемещения точек верхнего и нижнего (краёв) берегов воображаемого уплотнённого слоя контакта шероховатостей и  $\tau = G^{im} U / h^{im}$  – соответственно его касательное напряжение и модуль сдвига).

б) по аналогии закона сухого трения Кулона

$$\sigma_{zz}^{(1)}(z = \varphi_0) = \sigma_{zz}^{(2)}(z = \varphi_0), \quad u_z^{(1)}(z = \varphi_0) = u_z^{(2)}(z = \varphi_0)$$

$$u_x^{(1)}(z = \varphi_0) - u_x^{(2)}(z = \varphi_0) = U \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)}(z = \varphi_0) = \sigma_{xz}^{(2)}(z = \varphi_0) = \tau = f \sigma_{zz}^{(1)}(z = \varphi_0) = f \sigma_{zz}^{(2)}(z = \varphi_0).$$

Доказаны, что всегда существуют классические краевые задачи теории упругости и теории теплопроводности, решения которых совпадают с решениями сформулированных неклассических задач [3,7].

Для решения поставленных краевых задач приведём уравнения и соотношения теории термоупругости ортотропного тела с учётом объёмных сил  $\vec{P} = \{P_x, P_y, P_z\}$  и

изменения температурного поля  $\theta = T - T_0$  по модели Дюгамеля – Неймана

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + P_x = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = e_1 + \beta_{11} \theta, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_{44} \sigma_{yz} \quad (1.8)$$

$$e_m = a_{1m} \sigma_{xx} + a_{2m} \sigma_{yy} + a_{3m} \sigma_{zz}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (y, z, x; 4, 5, 6),$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $u_x, u_y, u_z$  – компоненты вектора перемещения,  $a_{ij}$  – коэффициенты упругой податливости,  $\beta_{ij}$  – коэффициенты теплового линейного расширения.

Допускается возможное медленное изменение во времени заданных функций, при этом, не вызывая ощутимых динамических эффектов в пакете слоёв. Исходя из этого,

здесь и в дальнейшем в формулах и соотношениях время  $t$  не будет фигурировать. Приведём также уравнение стационарной задачи теплопроводности ортотропного тела [9,10]

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = W, \quad q_x = -\lambda_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} (x, y, z; 1, 2, 3), \quad (1.9)$$

где  $q_x, q_y, q_z$  – компоненты вектора плотности теплового потока,  $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$  – коэффициенты теплопроводности,  $W$  – заданная плотность источника тепла. В уравнениях и соотношениях (1.8), (1.9) перейдём к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{l}, \quad u = \frac{u_x}{l}, \quad v = \frac{u_y}{l}, \quad w = \frac{u_z}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}, \quad (1.10)$$

где  $l$  – некоторый продольный характерный размер слоёв.

Подставив (1.10) в (1.8), (1.9), получаем сингулярно-возмущённую геометрическим малым параметром  $\varepsilon$  систему уравнений и соотношений, асимптотическое решение которых, согласно [4,5], складывается из двух решений. Первое из них, называемое внутренним (внешним) решением, удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях пакета. Второе решение, называемое решением задачи пограничного слоя, на лицевых поверхностях пластины удовлетворяет соответствующим однородным (нулевым) условиям, а в сумме с внутренним решением должно удовлетворить граничным условиям, заданным на торцах пакета. Поскольку рассматриваются ортотропные слои (пластины бесконечных размеров), следовательно, решается только внутренняя задача. Решение ищется в виде асимптотического разложения.

$$Q^{(i)}(x, y, z) = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{s+\chi_Q} Q^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad Q^{(i,m)} = 0, \quad m < 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.11)$$

где  $Q^{(i)}$  – любая из неизвестных компонент вектора перемещения  $U_j$ , тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ,  $\chi_Q$  характеризует асимптотический порядок соответствующей величины,  $\chi_u = 0$  – для всех перемещений,  $\chi_\sigma = -1$  – для всех напряжений, а для температурной функции и компонент вектора плотности теплового потока должны быть соответственно  $\chi_\theta = -1$ ,  $\chi_{q_x} = \chi_{q_y} = -1$ ,  $\chi_{q_z} = -2$ .

Одновременно представим заданные объёмные силы и плотности источников тепла  $W$  в виде асимптотических разложений:

$$P_x = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-2+s} l^{-1} P_x^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) (x, y, z), \quad W = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-3+s} l^{-1} W^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.12)$$

$$Q^{(0)} = Q, \quad Q^{(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad Q = \{P_j, W\}.$$

Это означает, что объёмные силы и источник тепла могут влиять на напряжённо-деформированное состояние пакета слоёв, начиная с первого шага итерационного процесса, если их асимптотические порядки будут соответственно  $\varepsilon^{-2}$  и  $\varepsilon^{-3}$ .

Подставив (1.11), (1.12) в систему сингулярных уравнений и приравняв коэффициенты при  $\varepsilon^s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, S$ ) в левых и правых частях уравнений, получим непротиворечивую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.11), что свидетельствует о правильности выбранной асимптотики. После интегрирования полученной системы разрешающих уравнений для температурной функции, компонента тензора напряжений и вектора перемещения получаются рекуррентные формулы, которым присвоим номер соответствующего слоя ( $i = 1, 2$ ) пакета и представим в размерных координатах и перемещениях. Для температурной функции имеем:

$$\theta^{(i,s)} = zA^{(i,s)} + B^{(i,s)} + \frac{1}{\lambda_{33}^{(i)}} \Psi^{(i,s)}$$

$$\Psi^{(i,s)} = - \int_0^z \left[ \int_0^\beta \left( \lambda_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 \theta^{(i,s-2)}}{\partial x^2} + \lambda_{22}^{(i)} \frac{\partial^2 \theta^{(i,s-2)}}{\partial y^2} + W^{(i,s)} \right) d\alpha \right] d\beta, \quad i = 1, 2, \quad (1.13)$$

а для компонент тензора напряжений и вектора перемещения

$$\sigma_{jz}^{(i,s)} = \sigma_{jz0}^{(i,s)}(x, y) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(x, y, z), \quad j = x, y, z$$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = A_{13}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)}(x, y) + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(x, y, z) \quad (xx, yy; 1, 2)$$

$$u_x^{(i,s)} = u_{x0}^{(i,s)}(x, y) + zA_{55}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + u_{x*}^{(i,s)}(x, y, z) \quad (x, y, z; 5, 4, 3), \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_{xy}^{(i,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(i)}} \left( \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial x} \right), \quad \Delta^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)2}$$

$$\sigma_{jz*}^{(i,s)} = - \int_0^z \left( \frac{\partial \sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial y} + P_j^{(i,s)} \right) dz, \quad j = x, y, z$$

$$\sigma_{xx*}^{(i,s)}(x, y, z) = A_{13}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} + B_{11}^{(i)} \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial y} + \gamma_{11}^{(i)} \theta_i^{(s)}(x, y; 1, 2)$$

$$u_{x*}^{(i,s)} = \int_0^z \left( a_{55}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)} - \frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x} \right) dz \quad (x, y; 5, 4) \quad (1.14)$$

$$u_{z*}^{(i,s)} = \int_0^z \left( A_{33}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} - A_{13}^{(i)} \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} - A_{23}^{(i)} \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial y} + \gamma_{33}^{(i)} \theta_i^{(s)} \right) dz$$

$$A_{33}^{(i)} = a_{13}^{(i)} A_{13}^{(i)} + a_{23}^{(i)} A_{23}^{(i)} + a_{33}^{(i)}, \quad A_{kk}^{(i)} = a_{kk}^{(i)}, \quad k = 4, 5, 6$$

$$A_{j3}^{(i)} = -a_{13}^{(i)} B_{j1}^{(i)} - a_{23}^{(i)} B_{j2}^{(i)}, \quad j = 1, 2; \quad B_{11}^{(i)} = \frac{a_{22}^{(i)}}{\Delta^{(i)}}, \quad B_{12}^{(i)} = -\frac{a_{12}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} \quad (1, 2)$$

$$\gamma_{11}^{(i)} = \frac{a_{12}^{(i)} \beta_{22}^{(i)} - a_{22}^{(i)} \beta_{11}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} \quad (1, 2), \quad \gamma_{33}^{(i)} = A_{13}^{(i)} \beta_{11}^{(i)} + A_{23}^{(i)} \beta_{22}^{(i)} + \beta_{33}^{(i)}$$

Полученные общие интегралы (1.13),(1.14) системы уравнений (1.8),(1.9) содержат по восемь функций интегрирования для каждого слоя:  $A^{(i,s)}, B^{(i,s)}, \sigma_{xz0}^{(i,s)}, \sigma_{yz0}^{(i,s)}, \sigma_{zz0}^{(i,s)}, u_{x0}^{(i,s)}, u_{y0}^{(i,s)}, u_{z0}^{(i,s)}$ ,  $i=1,2$ , которые однозначно определяются из неклассических тепловых и механических граничных условий (1.1),(1.2) и соответствующих условий контакта слоёв (1.3) – (1.7) под номерами  $i=1$  и  $i=2$ .

**2. Решения сформулированных краевых задач.** Удовлетворив на лицевой поверхности  $z = \varphi_1(x, y)$  неклассическим граничным условиям (1.1) задачи теплопроводности и условиям полного теплового контакта (1.3), получаем значения температурных функций первого и второго слоёв пакета:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \theta^+ + \frac{\varphi_1 - z}{\lambda_{33}^{(1)}} q_{9z}^+ - \frac{(\varphi_1 - z)^2}{2\lambda_{33}^{(1)}} W^{(1)}, \quad \theta^{(2)} = zA^{(2)} + B^{(2)} - \frac{z^2}{2\lambda_{33}^{(2)}} W^{(2)} \\ A^{(2)} &= -\frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} (q_{9z}^+ - \varphi_0 W^{(2)}) + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\lambda_{33}^{(2)}} W^{(1)} \\ B^{(2)} &= B^{(1)} + \varphi_0 A^{(1)} \left( 1 - \frac{\lambda_{33}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(2)}} \right) + \varphi_0^2 \left( \frac{1}{2\lambda_{33}^{(2)}} - \frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} \right) W^{(1)} \\ A^{(1)} &= -\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} (q_{9z}^+ - \varphi_1 W^{(1)}), \quad B^{(1)} = \theta^+ + \frac{\varphi_1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_{9z}^+ - \frac{\varphi_1^2}{2\lambda_{33}^{(1)}} W^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а из неклассических механических граничных условий (1.2) с учётом веса слоёв определяем все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения первого слоя:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1,s)}(z) &= \sigma_1^{(s)}(z) + \bar{\sigma}_{zz}^{(1,s-1)} \\ \sigma_{xz}^{(1,s)}(z) &= A_{13}^{(1)} \sigma_1^{(s)}(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \gamma_{11}^{(1)} \theta^{(1,s)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \bar{\sigma}_{xz}^{(1,s-1)} \\ \sigma_{xx}^{(1,s)}(z) &= A_{13}^{(1)} \sigma_1^{(s)}(z) + \gamma_{11}^{(1)} \theta^{(1,s)} + \bar{\sigma}_{xx}^{(1,s-1)} \quad (x, y; 13, 23; 11, 22) \\ \sigma_{xy}^{(i,s)}(z) &= \frac{1}{A_{66}^{(i)}} \left( \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial y} \right), \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
u_z^{(1,s)}(z) &= A_{33}^{(1)}(\varphi_1 - z) \left[ \frac{z - \varphi_1}{2} g\rho^{(1)} + \frac{\theta^{(1,s)}}{\Delta_1^{(1)}} \left( \gamma_{11}^{(1)} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \gamma_{22}^{(1)} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \\
&+ (\varphi_1 - z) \gamma_{33}^{(1)} \theta^{(1,s)} + u_z^{+(s)} + A_{33}^{(1)} \int_0^z \bar{\sigma}_{zz}^{(1,s-1)} dz \\
u_x^{(1,s)}(z) &= u_x^{+(s)} + A_{55}^{(1)}(\varphi_1 - z) \gamma_{11}^{(1)} \theta^{(1,s)} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + A_{55}^{(1)} \int_0^z \bar{\sigma}_{xz}^{(1,s-1)} dz + \\
&+ A_{55}^{(1)} A_{13}^{(1)}(\varphi_1 - z) \left[ \frac{z - \varphi_1}{2} g\rho^{(1)} + \frac{\theta^{(1,s)}}{\Delta_1^{(1)}} \left( \gamma_{11}^{(1)} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \gamma_{22}^{(1)} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \\
&(x, y; 5, 4) \quad u_x^{+(0)} = u_x^+, \quad u_x^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (x, y, z),
\end{aligned}$$

где обозначены

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{(s)}(z) &= (z - \varphi_1) g\rho^{(1)} + \frac{\theta^{(1,s)}}{\Delta_1^{(1)}} \left( \gamma_{11}^{(1)} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \gamma_{22}^{(1)} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right) \\
\Lambda_k &= \sqrt{1 + \left( \frac{\partial\varphi_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi_k}{\partial y} \right)^2}, \quad \Delta_k^{(i)} = 1 - A_{13}^{(i)} \left( \frac{\partial\varphi_k}{\partial x} \right)^2 - A_{23}^{(i)} \left( \frac{\partial\varphi_k}{\partial y} \right)^2 \\
&k = 0, 1, \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\bar{\sigma}_{xz}^{(1,s-1)} = \bar{\sigma}_{xy}^{(1,s-1)} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \left( B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_x^{(1,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_y^{(1,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 \quad (x, y; 11, 22)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^{(1,s-1)} = A_{13}^{(1)} \bar{\sigma}_{zz}^{(1,s-1)} + \left( B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_x^{(1,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_y^{(1,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 \quad (x, y; 13, 23; 11, 22)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zz}^{(1,s-1)} &= \frac{2}{\Delta_1^{(1)}} \bar{\sigma}_{xy}^{(1,s-1)} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{1}{\Delta_1^{(1)}} \left( B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_x^{(1,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_y^{(1,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \\
&+ \frac{1}{\Delta_1^{(1)}} \left( B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_x^{(1,s-1)}}{\partial x} + B_{22}^{(1)} \frac{\partial u_y^{(1,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right)^2
\end{aligned}$$

Для определения функций интегрирования компонент тензора напряжений и вектора перемещения второго слоя на поверхности контакта слоёв  $z = \varphi_0(x, y)$  целесообразно ввести функции  $T_x^{(s)}, T_y^{(s)}, T_z^{(s)}$ , которые представляют из себя составляющие по координатным осям  $Oxuz$  компоненты тензора полного напряжения в точках поверхности контакта слоёв:

$$z = \varphi_0 : U_j = u_j^{(2)} - u_j^{(1)} = 0, \quad j = x, y, z$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 T_x^{(s)} &= \sigma_{xz}^{(i,s)}(\varphi_0) - \sigma_{xx}^{(i,s)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \sigma_{xy}^{(i,s)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \quad (x, y) \\ \Lambda_0 T_z^{(s)} &= \sigma_{zz}^{(i,s)}(\varphi_0) - \sigma_{xz}^{(i,s)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \sigma_{yz}^{(i,s)}(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что уравнения (2.4) справедливы и для первого ( $i = 1$ ) и для второго ( $i = 2$ ) слоёв, что позволяет компоненты тензора полного напряжения  $T_x^{(s)}, T_y^{(s)}, T_z^{(s)}$  выразить через уже известные компоненты тензора напряжений (2.2) первого слоя

$$\begin{aligned} \Lambda_0 T_x^{(s)} &= \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) \left( A_{13}^{(1)} \sigma_1^{(s)}(\varphi_0) + \gamma_{11}^{(1)} \theta^{(1,s)} \right) + \bar{\sigma}_{xz}^{(1,s-1)} + \bar{\sigma}_{xx}^{(1,s-1)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \\ &\quad (x, y; 13, 23; 11, 22) \\ \Lambda_0 T_z^{(s)} &= \sigma_1^{(s)}(\varphi_0) \left( 1 - A_{13}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - A_{23}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \theta^{(1,s)} \left( 1 - \gamma_{11}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \gamma_{22}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) + \bar{\sigma}_{zz}^{(1,s-1)} - \bar{\sigma}_{xz}^{(1,s-1)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \bar{\sigma}_{yz}^{(1,s-1)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

после чего формулы компонент тензора напряжений и вектора перемещения второго слоя принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(2,s)}(z) &= \sigma_{zz}^{(1,s)}(\varphi_0) + \sigma_2^{(s)}(z) + \bar{\sigma}_{zz}^{(2,s-1)}, \quad \Pi_0^{(s)} = \frac{\Lambda_0}{\Delta_0^{(2)}} \left( T_x^{(s)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + T_y^{(s)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + T_z^{(s)} \right) \\ \sigma_2^{(s)}(z) &= \Pi_0^{(s)} - (\varphi_0 - z) g \rho^{(2)} + \frac{\theta^{(2,s)}}{\Delta_0^{(2)}} \left( \gamma_{11}^{(2)} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \gamma_{22}^{(2)} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \sigma_{xz}^{(2,s)}(z) &= \sigma_{xz}^{(1,s)}(\varphi_0) + A_{13}^{(1)} \sigma_2^{(s)}(z) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \Lambda_0 T_x^{(s)} + \gamma_{11}^{(2)} \theta^{(2,s)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \bar{\sigma}_{xz}^{(2,s-1)} \\ \sigma_{xx}^{(2,s)}(z) &= A_{13}^{(1)} \sigma_2^{(s)}(z) + \gamma_{11}^{(2)} \theta^{(2,s)} + \bar{\sigma}_{xx}^{(2,s-1)} \quad (x, y; 13, 23; 11, 22) \\ u_z^{(2,s)}(z) &= u_z^{(1,s)}(\varphi_0) + u_z^{+(s)} + A_{33}^{(2)} (\varphi_0 - z) \left[ \sigma_{zz}^{(1,s)}(\varphi_0) + \Pi_0 - \frac{\varphi_0 - z}{2} g \rho^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{33}^{(2)} \theta^{(2,s)} + \frac{\theta^{(2,s)}}{\Delta_0^{(2)}} \left( \gamma_{11}^{(2)} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \gamma_{22}^{(2)} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + A_{33}^{(2)} \int_{\varphi_0}^z \bar{\sigma}_{zz}^{(2,s-1)} dz \\ u_x^{(2,s)}(z) &= u_x^{(1,s)}(\varphi_0) + u_x^{+(s)} + A_{55}^{(2)} (\varphi_0 - z) \left( \sigma_{xz}^{(1,s)}(\varphi_0) + \Lambda_0 T_x^{(s)} + \gamma_{11}^{(2)} \theta^{(2,s)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \end{aligned} \quad (2.6)$$



$$\begin{aligned}
& + A_{55}^{(2)} A_{13}^{(2)} (\varphi_0 - z) \left[ \Pi_0 - \frac{\varphi_0 - z}{2} g \rho^{(2)} + \frac{\theta^{(2,s)}}{\Delta_0^{(2)}} \left( \gamma_{11}^{(2)} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \gamma_{22}^{(2)} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \\
& + A_{55}^{(2)} \int_{\varphi_0}^z \bar{\sigma}_{xz}^{(2,s-1)} dz (x, y; 13, 23; 55, 44), \quad u_x^{+(0)} = u_x^+, \quad u_x^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (x, y, z).
\end{aligned}$$

Здесь обозначены:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xy}^{(2,s-1)} &= \bar{\sigma}_{xy}^{(2,s-1)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \left( B_{11}^{(2)} \frac{\partial u_x^{(2,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial u_y^{(2,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 \\
\bar{\sigma}_{xx}^{(2,s-1)} &= A_{13}^{(2)} \bar{\sigma}_{zz}^{(2,s-1)} + \left( B_{11}^{(2)} \frac{\partial u_x^{(2,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial u_y^{(2,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$(x, y; 13, 23; 11, 22)$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zz}^{(2,s-1)} &= \frac{2}{\Delta_0^{(2)}} \bar{\sigma}_{xy}^{(2,s-1)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{1}{\Delta_0^{(2)}} \left( B_{11}^{(2)} \frac{\partial u_x^{(2,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial u_y^{(2,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \\
& + \frac{1}{\Delta_0^{(2)}} \left( B_{12}^{(2)} \frac{\partial u_x^{(2,s-1)}}{\partial x} + B_{22}^{(2)} \frac{\partial u_y^{(2,s-1)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2
\end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы (2.1)-(2.3), (2.5)-(2.7), позволяющие с любой заранее заданной асимптотической точностью  $O(\varepsilon^S)$  вычислить температурную функцию и компоненты полей напряжений и перемещений двухслойного пакета из ортотропных пластин переменной толщины при полном тепловом и механическом контактах слоёв, если на лицевой поверхности пакета заданы неклассические краевые условия (1.1), (1.2).

Заметим, что условие полного контакта слоёв (1.4) предполагает отсутствие сдвиговой деформации слоёв  $U_x^{(s)} = u_x^{(1,s)}(z = \varphi_0) - u_x^{(2,s)}(z = \varphi_0) = 0 (x, y)$ . Если же механический контакт между слоями неполный, то происходит смещение (сдвиг) слоёв  $U_x^{(s)} = u_x^{(1,s)}(z = \varphi_0) - u_x^{(2,s)}(z = \varphi_0) \neq 0 (x, y)$ . При этом, на поверхности  $z = \varphi_0(x, y)$  раздела слоёв касательные составляющие  $T_x^{(s)}, T_y^{(s)}$  полного напряжения определяются одной из известных моделей неполного контакта (1.6) или (1.7). В таком случае по являющейся аналогом модели Винклера – Фусса (1.6) для каждого шага итерации  $S$  имеем:

$$T_x^{(s)} = \mu_x U_x^{(s)}, \quad U_x^{(s)} = u_x^{(1,s)}(z = \varphi_0) - u_x^{(2,s)}(z = \varphi_0) \neq 0 (x, y), \tag{2.8}$$

а по закону сухого трения Кулона (1.7)

$$T_x^{(s)} = f_x T_z^{(s)} (x, y). \tag{2.9}$$

Следовательно, выведенные асимптотическим методом рекуррентные формулы (2.1)-(2.3), (2.5)-(2.7), с учётом значений  $T_x^{(s)}, T_y^{(s)}$  (2.8) или (2.9), позволяют с любой асимптотической точностью  $O(\varepsilon^S)$  вычислить температурную функцию и компоненты тензора напряжений и вектора перемещений двухслойного пакета из ортотропных пластин переменной толщины также согласно выбранной модели неполного механического контакта слоёв.

Таким образом, рекуррентные расчётные формулы (1.10),(1.11), (2.1)-(2.3), (2.5)-(2.7) позволяют вычислить температурную функцию, а также компоненты тензора напряжений и вектора перемещения в слоях пластины с любой асимптотической точностью  $O(\varepsilon^S)$  в размерных координатах и перемещениях

$$Q^{(i)}(x, y, z) = \sum_{s=0}^S Q^{(i,s)}(x, y, z). \quad (2.10)$$

Они одновременно служат готовым алгоритмом компьютерной программы для аналитического (при необходимости) и численного решений поставленных краевых задач с заданной точностью. В качестве примера рассмотрим частный случай, когда двухслойная пластина состоит из слоёв постоянной толщины  $\varphi_k(x, y) = h_k = \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , постоянной плотности  $\rho^{(i)} = \text{const}$ , с источниками тепла постоянной интенсивности  $W^{(i)} = \text{const}$ , с постоянными граничными условиями

$$\theta^+ = \text{const}, \quad (q_j^+, u_j^+, \sigma_{jz}^+), \quad j = x, y, z. \quad (2.11)$$

Ограничившись исходным приближением, с учётом (2.1)–(2.4) по рекуррентным расчётным формулам (1.10)–(1.11), вычислив значения температурных функций, компонент векторов плотностей потоков теплоты, а также компонент тензоров напряжений и векторов перемещений, для первого слоя получим:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \theta^+ + \frac{\varphi_1 - z}{\lambda_{33}^{(1)}} q_z^+ - \frac{(\varphi_1 - z)^2}{2\lambda_{33}^{(1)}} W^{(1)}, \quad q_z = q_z^+ + (\varphi_1 - z)W_1 \\ u_x^{(1)} &= u_x^+, \quad u_y^{(1)} = u_y^+, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0 \\ \sigma_{zz}^{(1)} &= \rho^{(1)} g(z - \varphi_1), \quad \sigma_{xx}^{(1)} = \rho^{(1)} g A_{13}^{(1)}(z - \varphi_1) + \gamma_{11}^{(1)} \theta^{(1)}(x, y; 1, 2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$u_z^{(1)} = u_z^+ + \frac{(z - \varphi_1)^2}{2} \left( \rho^{(1)} g A_{33}^{(1)} - \frac{\gamma_{33}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(1)}} q_z^+ \right) + \gamma_{33}^{(1)} (z - \varphi_1) \left( \theta^+ - \frac{(z - \varphi_1)^2}{6\lambda_{33}^{(1)}} W^{(1)} \right)$$

а для второго слоя имеем:

$$\begin{aligned} \theta^{(2)} &= \theta^+ + \left( \frac{\varphi_0 - z}{\lambda_{33}^{(2)}} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\lambda_{33}^{(1)}} \right) q^+ + \left[ \frac{(\varphi_0 - z)(\varphi_1 - \varphi_0)}{\lambda_{33}^{(2)}} - \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)^2}{2\lambda_{33}^{(1)}} \right] W^{(1)} - \\ &\quad - \frac{(\varphi_0 - z)^2}{2\lambda_{33}^{(2)}} W^{(2)}, \quad q^{(2)} = q_z^+ + (\varphi_1 - \varphi_0) W^{(1)} + (\varphi_0 - z) W^{(2)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \rho^{(1)} g(\varphi_0 - \varphi_1) + \rho^{(2)} g(z - \varphi_0) \\ \sigma_{xx}^{(2)} = \rho^{(1)} g A_{13}^{(2)} (\rho^{(1)} g(\varphi_0 - \varphi_1) + \rho^{(2)} g(z - \varphi_0)) + \gamma_{11}^{(2)} \theta^{(2)}, \quad (x, y; 1, 2) \\ u_y^{(2)} = u_y^+, \quad u_x^{(2)} = u_x^+ \\ u_z^{(2)} = \bar{u}_z + \frac{(z - \varphi_0)^2}{2} \left( \rho^{(2)} g A_{33}^{(2)} - \frac{\gamma_{33}^{(2)}}{\lambda_{33}^{(2)}} \bar{q} \right) + \gamma_{33}^{(2)} (z - \varphi_0) \left( \bar{\theta} - \frac{(z - \varphi_0)^2}{6\lambda_{33}^{(2)}} W^{(2)} \right) \end{aligned}$$

$$\bar{u}_z = u_z^{(1)}(z = \varphi_0), \quad \bar{\theta} = \theta^{(1)}(z = \varphi_0), \quad \bar{q} = q^{(1)}(z = \varphi_0)$$

Заметим, что решение (2.5), (2.6) примера с неклассическими граничными условиями (2.5) – математически точное (замкнутое) для слоёв постоянной толщины, поскольку следующие шаги итерации дают нули. Учитывая это, на поверхности  $z = \varphi_2(x, y) = h_2 = \text{const}$ , по формулам (2.7) вычислим

$$Q^{-cal} = Q(z = h_2), \quad Q = \left\{ \theta^{(2)}, q^{(2)} \sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(2)}, \sigma_{zz}^{(2)}, u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)} \right\}. \quad (2.14)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться [2,3,5,6], что решение (2.6), (2.7) краевой задачи с неклассическими граничными условиями (2.5) одновременно является решением задачи с классическими граничными условиями:

$$z = \varphi_1 = h_1: \quad \theta^+ = \text{const}, \quad u_j^+(x, y) = \text{const}, \quad j = x, y, z \quad (2.15)$$

$$z = \varphi_2 = h_2: \quad q_2^- = q_2^{-cal}, \quad \sigma_{xz}^{-(2)} = \sigma_{xz}^{-cal} = 0 \quad (x, y), \quad \sigma_{xz}^{-(2)} = \sigma_{xz}^{-cal}$$

Таким образом, асимптотическое решение каждой задачи стационарной теплопроводности и несвязанной теории термоупругости с асимптотической точностью  $O(\varepsilon^S)$  совпадает с решением определённой краевой задачи с классическими граничными условиями [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКНМОНРА «15Т-2С343»

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян А.Г., Тоноян В.С., Хачикян А.С. Распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразийской плит на основе данных GPS //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №3. С.3-13. //Harutyunyan A.G., Tonoayan V.S., Khachikyan A.S. Distribution of deformations in the interaction zone of the Arabian and Eurasian plates on the basis of GPS data / Izv.NAN Armenia.Mechanics. 2003. Т.56. № 3.С.3-13.(In Russian).
2. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. Mathematical simulation of collision of arabian and euroasian plates on the base of GPS data // Изв.НАНАрмении. Механика. 2005. Т.58. №4. С.3-9.
3. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity thory for plates //Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. Vol.155, pp 3-10.
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore - London: World Scientific Publ. 2015. 376 p. (Russian edition of Moscow, Science - Fizmatlit, 1997. 414 с).

5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.//Agalovyan L.A., Gevorkyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of anisotropic layered beams, plates and shells. Yerevan: Gitutyun, 2005. 468p. (InRussian).
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазарян Л.Г. К определению напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли на основе данных GPS систем // Доклады НАН РА. 2012. Том 112. №3. С.264-270 //Agalovyan LA, Gevorkyan R.S., Gulgazaryan L.G. To the determination of stress-strain states of lithospheric plates of the Earth on the basis of GPS system data // Reports of NAS RA. 2012. Vol. 112. №3. P.264-270 (InRussian).
7. Геворкян Р.С., Асратян М.Г. К асимптотическому решению эллиптических уравнений стационарной теплопроводности для тонких полос конечных размеров./ /Материалы X Международной научно-практической конференции: «Актуальные проблемы современной науки» – 2014, Aktualne Problemy Nowoczesnych nauk» – 2014. Математика. Химия и химические технологии. Часть 23. Matematyka, chemia i chemiczne technologie. Przemysl. – 2014. С. 3-11. //Gevorkyan R.S., Asratyan M.G. To the asymptotic solution of elliptic equations of stationary thermal conductivity for thin bands of finite dimensions. // Materials of the X-th International Scientific and Practical Conference «Actual problems of modern science - 2014. Aktualne problemy nowoczesnych nauk – 2014. Mathematics. Chemistry and Chemical Technology. Part 23. Matematyka, chemia i chemiczne technologie. Przemysl.– 2014. P.3-11.(In Russian).
8. Геворкян Р.С. О моделях неполного контакта двухслойных упругих полос из ортотропных слоёв //В сб.: Materials of the XI International Scientific and Practical Conference «Modern Scientific Potential-2015». February 28 - March 7, 2015, V. 37, Technical Sciences Sheffield Science and education ltd 2015 p.p.57- 64. //Gevorgyan R.S. On models of incomplete contact of two-layer elastic bands from orthotropic layers. In Sb. of Materials the XI International Scientific and Practical Conference «Modern Scientific Potential - 2015» February 28 - March 7, 2015, Volume 37, Technical Sciences Sheffield Scienceand education ltd 2015 p.p. 57-64.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: ГИТТЛ, 1952. 392с. //Lykov A.V. Theory of heat conduction. Moscow: GITTL, 1952. 392p. (InRussian)
10. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд. ЛГУ, 1978. 224с. //Zino I.E., Tropp E.A. Asymptotic methods in problems of the theory of heat conduction and thermoelasticity. Leningrad: Leningrad State University, 1978. 224 p. (inRussian).

#### **Сведения об авторах:**

**Агаловян Ленсер Абгарович** – академик НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, заведующий отд.«Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА  
Тел.: (37410) 525835; **E-mail:**[aghal@mechins.sci.am](mailto:aghal@mechins.sci.am)

**Геворкян Рубен Степанович** – профессор, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.  
Тел.: (37410) 270828; **E-mail:**[gevorgyanrs@mail.ru](mailto:gevorgyanrs@mail.ru)

Поступила в редакцию 14.11.2016